Input-to-state stabilization of nonlinear systems with quantized state measurements

Chuang Zheng

Joint work with C. Li and L. Li

Beijing Normal University

July 30th, 2015, Guizhou

目录

目录

介绍

众所周知，稳定性是各类控制系统中重要的一个性能. 在经典的状态反馈控制中，我们通常假设状态x直接传输到控制器，然后控制器利用状态x的信息实现对系统的稳定性的控制.

理想线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \geq t_0 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$x \in R^n$是状态变量，$u \in R^m$是输入变量，$A \in R^{n\times n}$，$B \in R^{n\times m}$.

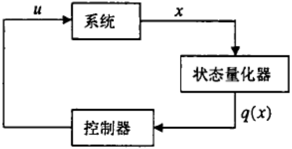
1. $u = 0, \dot{x} = Ax.$
2. $u = Kx, \dot{x} = (A + BK)x.$

若$A + BK$为Hurwitz矩阵，则系统是状态反馈镇定的.

有限反馈线性系统

工程应用上的反馈控制系统，不能实现对状态x直接传输，需要一些其他的处理设备(信息收集、编码器、网络通道、解码器)．即 $u = Kq(x)$.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + BKq(x), \quad t \geq t_0 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$



量化器：分块常值函数$q(x): R^n \to Q \subset R^n$，其中$Q$有限.

例如:

(1)信息收集器：$x(t_1) = 30$

(2)编码器:

$$\begin{cases} \cdots \\ 0 \le x \le 50 \longrightarrow 1 \\ 50 \le x \le 100 \longrightarrow 2 \\ \cdots \end{cases}$$

(3)信息网络通道

(4)解码器：$1 \longrightarrow 25$(取中间值)，最后实际得到$q(x(t_1)) = 25$.

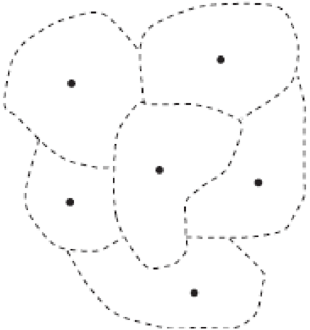


Figure: Quantization regions

通常假定量化器满足以下两个假设

假设1: 存在实数$M > \Delta > 0$, 使得下面两个条件成立:

$$|z| \leq M \Rightarrow |q(z) - z| \leq \Delta,$$

$$|z| > M \Rightarrow |q(z)| > M - \Delta,$$

其中M, Δ分别是量化器的量化能力与量化误差.

假设2: 存在实数$\Delta_0 > 0$, 使得

$$q(z) = 0, \quad \forall |z| \leq \Delta_0.$$

有限能力量化器的缺陷

"Saturation"：饱和量化.系统状态超出量化范围M时，量化误差很大，这使得针对理想系统设计的控制不能达到预期目的.

"Deterioration"：平衡点附近的劣化. 设计目标与系统状态足够接近时，量化误差决定了能达到的精度. 轨线只能到达设计目标的一个小邻域.

需单独设计量化函数q与反馈控制规则. 最终得到输入到状态稳定/ISS

Delchamps, 1990; Raisch,1995; Chou, Chen, Horng,1996; Feng, Loparo,1997; Sur,Paden,1998; Lunze,Nixdorf,Schroöder, 1999;

可调节量化器

使用如下量化器

$$q_\mu(x) := \mu q(\frac{x}{\mu}), \mu > 0.$$

其中μ是可调的变焦参数. 只在有限时间点进行调节,原因有:

- 硬件设计更经济;
- 不需要连续调节.

可调节量化器

使用如下量化器

$$q_\mu(x) := \mu q(\frac{x}{\mu}), \mu > 0.$$

其中μ是可调的变焦参数. 只在有限时间点进行调节,原因有:

- 硬件设计更经济;
- 不需要连续调节.

"zooming-out": 增大量化能力, 直至系统状态可以被测量.

"zooming-in": 应用反馈, 同时减小量化误差使状态趋于平衡点.

可调节量化器

- Linear system. Wong,Brockett,1999; Aström, Bernhardsson,1999; Liberzon, Brockett,2000; Elia, Mitter,2001;Ishii, Francis,2002; Liberzon,2003, Liberzon, Neusić, 2005.
- Nonlinear system. Neusić, Teel, Sontag, 1999, Neusić, Teel, 2004, Liberzon, 2006, 2009, Liberzon, 2012.

难点

1. 量化器的设计. (M和Δ)

难点

1. 量化器的设计. (M和Δ)
2. 量化区域的划分. (直线划分、六边形、任意形状、$\cdots$)

难点

1. 量化器的设计. (M和Δ)
2. 量化区域的划分. (直线划分、六边形、任意形状、$\cdots$)
3. 工程上可行的控制策略. (连续观测、采样观测)

难点

1. 量化器的设计. (M和Δ)
2. 量化区域的划分. (直线划分、六边形、任意形状、$\cdots$)
3. 工程上可行的控制策略. (连续观测、采样观测)
4. $\mu(t)$的值和切换时间.(混合系统)

难点

1. 量化器的设计. (M和Δ)
2. 量化区域的划分. (直线划分、六边形、任意形状、$\cdots$)
3. 工程上可行的控制策略. (连续观测、采样观测)
4. $\mu(t)$的值和切换时间.(混合系统)
5. 非线性系统的反馈控制.

目录

线性系统

Liberzon(Automatica03)考虑线性系统

$$(*)\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \quad t \geq t_0 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

其中$A \in R^{n\times n}, B \in R^{n\times m}$是定常矩阵，$x \in R^n$是状态变量，$u \in R^m$是控制输入.

线性系统

Theorem (Liberzon(Automatica03))

如果存在反馈控制,使得系统(∗)全局渐近稳定, 则存在一个有限能力量化器与反馈控制律使得系统(∗)全局渐近稳定.

线性系统

Theorem (Liberzon(Automatica03))

如果存在反馈控制,使得系统(∗)全局渐近稳定, 则存在一个有限能力量化器与反馈控制律使得系统(∗)全局渐近稳定.

证明概要:

1. Zoom-out $u = 0$. 增大μ, 直至系统状态可以被测量.

线性系统

Theorem (Liberzon(Automatica03))

如果存在反馈控制,使得系统$(*)$全局渐近稳定, 则存在一个有限能力量化器与反馈控制律使得系统$(*)$全局渐近稳定.

证明概要:

1. Zoom-out $u = 0$. 增大μ, 直至系统状态可以被测量.
2. Zoom-in 加入反馈, 减小μ, 使得系统状态趋于原点.

带干扰的线性系统

Liberzon&Nešić (AC07)考虑带干扰的线性系统

$$(**)\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Dd, \quad t \geq t_0 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

其中$A \in R^{n\times n}, B \in R^{n\times m}, D \in R^{n\times s}$都是定常矩阵, $x \in R^n$是状态变量, $u \in R^m$ 是控制输入, $d \in R^s$是具有未知上界的有界干扰.

Definition

连续函数$\alpha : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$属于$\mathcal{K}_\infty$, 如果$\alpha$是严格递增, $\alpha(0) = 0$, 且$r \to +\infty, \alpha(r) \to +\infty$.

例: $\alpha(r) = r^2 \in \mathcal{K}_\infty$.

Definition

系统(∗∗)是输入到状态稳定的(ISS), 如果对任意的初始值x_0以及任意有界的干扰d, 存在$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathcal{K}_\infty$使系统满足

$$|x(t)| \leq \gamma_1(|x_0|) + \gamma_2(||d||_{[t_0,+\infty)}), \forall t \geq t_0,$$

$$\lim_{t\to+\infty} \sup |x(t)| \leq \gamma_3(\lim_{t\to+\infty} \sup |d(t)|).$$

注: 当$d = 0$时, *ISS* 退化为全局渐近稳定.

带干扰的线性系统

Theorem (Liberzon&Nešić (AC07))

考虑系统(**)，存在一个量化器与反馈控制律使得系统(**)输入到状态稳定.

证明概要:

1. Zoom-out $u = 0$. 增大μ，直至系统状态可以被测量.

2. 加入反馈控制. 不同于无干扰线性情况，由于干扰d，需要在Zoom-out与Zoom-in之间转换，即量化值超出一定范围，μ就放大，量化值低于一定范围，μ就放小，最终可以得到μ是有界的，即长时间的干扰不会累积使得μ趋于无穷大.

目录

非线性系统

我们考虑如下非线性系统

$$(***)\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) + Bu(t) + Dd(t), \quad t \geq t_0 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

其中$x \in R^n$是状态变量，$u \in R^m$是控制输入，$d \in R^s$是未知的有界干扰，$f : R^n \to R^n$是局部Lipschitz函数.

非线性系统

我们考虑如下非线性系统

$$(***)\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) + Bu(t) + Dd(t), & t \geq t_0 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

其中$x \in R^n$是状态变量，$u \in R^m$是控制输入，$d \in R^s$是未知的有界干扰，$f : R^n \to R^n$是局部Lipschitz函数。我们假定存在矩阵K，正常数N，正常数L，使得$\forall x \in R^n$都有

$$x^T(f(x) + BKx) \leq -N|x|^2, \qquad |f(x)| \leq L|x|.$$

注：L与K与N无关.

Theorem

考虑系统$(***)$, 存在一个量化器与反馈控制律使得系统$(***)$输入到状态稳定.

我们也使用如下量化器

$$q_\mu(x) := \mu q(\frac{x}{\mu}), \mu > 0,$$

要求量化器的M, Δ满足以下条件

$$M > 5\Delta + \frac{2||BK||}{N}\Delta.$$

系统是混合系统, 它包含连续的变量与离散的变量.

系统是混合系统，它包含连续的变量与离散的变量.

1.连续变量　系统的状态x以及两个初值为0的重置时钟变量τ_{out}, τ_{in}，其中$\tau_{out} \in [0, T_{out}]$, $\tau_{in} \in [0, T_{in}]$.

系统是混合系统，它包含连续的变量与离散的变量.

1.连续变量　系统的状态x以及两个初值为0的重置时钟变量τ_{out}，τ_{in}，其中$\tau_{out} \in [0, T_{out}]$，$\tau_{in} \in [0, T_{in}]$.

2.离散变量　初值为μ_0的可调变焦参数μ以及初值为“no”的逻辑变量$capture$，其中$capture \in \{\text{“}yes\text{”}, \text{“}no\text{”}\}$.

系统是混合系统，它包含连续的变量与离散的变量.

1.连续变量　系统的状态x以及两个初值为0的重置时钟变量τ_{out}，τ_{in}，其中$\tau_{out} \in [0, T_{out}]$，$\tau_{in} \in [0, T_{in}]$.

2.离散变量　初值为μ_0的可调变焦参数μ以及初值为“no” 的逻辑变量$capture$，其中$capture \in \{“yes”, “no”\}$.

我们设计反馈控制律为

$$u(t) = \begin{cases} 0, & capture = “no” \\ Kq_\mu(x), & capture = “yes”. \end{cases}$$

系统变量的演化包含连续事件与离散事件.

系统变量的演化包含连续事件与离散事件.

1.连续事件　x满足系统的方程, 重置时钟变量τ_{out}, τ_{in}满足

$$\dot{\tau}_{out} = \begin{cases} 1 & \tau_{out} < T_{out} \\ 0 & \tau_{out} = T_{out}, \end{cases}$$

$$\dot{\tau}_{in} = \begin{cases} 1 & \tau_{in} < T_{in} \\ 0 & \tau_{in} = T_{in}. \end{cases}$$

系统变量的演化包含连续事件与离散事件.

1.连续事件　x满足系统的方程, 重置时钟变量τ_{out}, τ_{in}满足

$$\dot{\tau}_{out} = \begin{cases} 1 & \tau_{out} < T_{out} \\ 0 & \tau_{out} = T_{out}, \end{cases}$$

$$\dot{\tau}_{in} = \begin{cases} 1 & \tau_{in} < T_{in} \\ 0 & \tau_{in} = T_{in}. \end{cases}$$

2.离散事件　可调变焦参数μ与逻辑变量$capture$满足下面的算法.

离散事件算法

step 1(捕获):

If $\quad capture = \text{“}no\text{”}$

if $\quad |q_{\mu^-}(x)| \leq \ell_{out}\mu^-$ and $\tau_{out}^- \in [T_c, T_{out} - T_c]$

then $\quad \mu = \Omega_{out}\mu^-, \ capture = \text{“}yes\text{”}$

end

if $\quad \tau_{out}^- = T_{out}$

then $\quad \mu = \Omega_{out}\mu^- \ , \ \tau_{out} = 0$

end

End

step 2(调整焦距):

If $\quad capture =$ "*yes*"

Zoom-out:

if $\quad |q_{\mu^-}(x)| \geq \ell_{out}\mu^-$

then $\quad \mu = \Omega_{out}\mu^-,\ \tau_{out} = 0$

end

Zoom-in:

if $\quad |q_{\mu^-}(x)| \leq \ell_{in}\mu^-$ and $\min\{\tau_{in}^-, \tau_{out}^-\} \geq T_{in}$

then $\quad \mu = \Omega_{in}\mu^-,\ \tau_{in} = 0$

end

End

其中$T_{in}, T_c, T_{out}, \Omega_{in}, \Omega_{out}$ 是正数且满足下面的不等式

$$
\begin{aligned}
T_{in} &\leq T_{out}, \\
T_c &< \frac{1}{2} T_{out}, \\
\Omega_{out} &> \frac{M}{M - 2\Delta}, \qquad \text{by Lemma 2} \\
T_{out} &< \log \Omega_{out}/L, \qquad \text{by Lemma 1} \\
\Omega_{in} &< 1, \\
\Omega_{in}(M - 2\Delta) - 3\Delta &> \frac{2||BK||}{N}\Delta. \qquad \text{by Lemma 2}
\end{aligned}
$$

其中ℓ_{in}, ℓ_{out}定义如下

$$\ell_{in} = \Omega_{in}(M - 2\Delta) - 2\Delta, \quad \ell_{out} = M - \Delta.$$

可捕获性

Lemma (1)

存在一个时间$t_1 \geq t_0$以及函数$\rho_x, \rho_\mu : R_{\geq 0} \to R_{\geq 0}$, 使得

$$||x||_{[t_0,t_1]} \leq \rho_x(|x_0| + ||D||||d||_{[t_0,+\infty)})$$
$$\mu(t_1) \leq \rho_\mu(|x_0| + ||D||||d||_{[t_0,+\infty)})$$

以及$\forall t \geq t_1$, 我们都有$capture =$ "yes", $|x(t)| \leq M\mu(t)$.

证明概要:

1. $|x(t)| \leq e^{L(t-t_0)}(|x_0| + \frac{1}{L}||D||||d||_{[t_0,t]})$
2. $\mu(t_0 + kT_{out}) = \Omega_{out}^k \mu_0, k = 0, 1, 2\cdots$
3. $T_{out} < \log \Omega_{out}/L$

定义

$$\hat{\mu} := \frac{2||D||||d||_{[t_0,+\infty)}}{N(M-2\Delta)-2||BK||\Delta}.$$

Lemma (2)

$\forall t \geq t_1$，我们都有$\mu(t) \leq \Omega_{out} \max\{\hat{\mu}, \mu(t_1)\}$.

注:

1. $\mu(t_1) \leq \rho_\mu(|x_0| + ||D||||d||_{[t_0,+\infty)})$
2. $|x(t)| \leq M\mu(t), \forall t \geq t_1$.
3. 找到ISS定义中的γ_1, γ_2.

任取$\varepsilon > 0$. 存在一个时间$t_2 \geq t_1$使得

$$|d(t)| \leq \lim_{t\to\infty} sup|d(t)| + \varepsilon, \quad \forall t \geq t_2.$$

定义

$$\widetilde{\mu} := \frac{2||D||}{N(\ell_{in} - \Delta) - 2||BK||\Delta}(\lim_{t\to\infty} sup|d(t)| + \varepsilon).$$

Lemma (3)

存在一个时间$t_3 \geq t_2$, 使得$\forall t \geq t_3$都有$\mu(t) \leq \Omega_{out}\widetilde{\mu}$.

注:

1. $|x(t)| \leq M\mu(t), \forall t \geq t_1$.
2. 找到ISS定义中的γ_3.

例子1. 考虑系统

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin x + u + 10d \\ x(0) = 1000 \end{cases}$$

我们取$K = -2$, 容易得到

$$|\sin x| \leq |x|, \quad \forall x \in R$$

$$x(\sin x - 2x) \leq -x^2, \quad \forall x \in R.$$

例子2. 考虑系统

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 \\
\dot{x}_2 = 2x_1 \sin x_1 + 2x_2 + u(t) + 100d(t) \\
x_1(0) = 0 \\
x_2(0) = 10000
\end{cases}
$$

我们取$K = (-1, -4)$, 容易得到

$$
|f(x)| \le 4|x|, \quad \forall x \in R^2,
$$

$$
x^T(f(x) + BKx) \le -|x|^2, \quad \forall x \in R^2.
$$

我们取有界干扰

$$d(t) \in [0, 0.01]$$

以及各参数的值为

$$M = 50, \Delta = \frac{\sqrt{2}}{10}, \mu_0 = 10,$$

$$T_{in} = T_{out} = 0.16, T_c = 0.01,$$

$$\Omega_{in} = 0.4, \Omega_{out} = 3,$$

进行仿真.

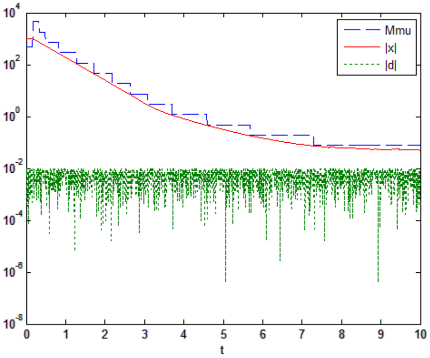


Figure: Simulation result for example 1

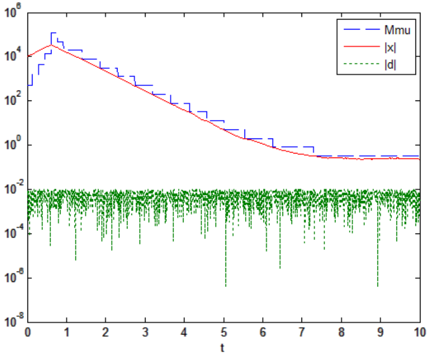


Figure: Simulation result for example 2

后继工作设想

1. 无穷维系统的有限反馈稳定性.

后继工作设想

1. 无穷维系统的有限反馈稳定性.
2. 采样观测下的控制策略.

后继工作设想

1. 无穷维系统的有限反馈稳定性.
2. 采样观测下的控制策略.
3. 反馈能力有限时，离散系统反馈稳定性的收敛性质.

参考文献

- E.D. Sontag, Smooth stabilization implies coprime factorization,IEEE AC, 1989.(1549)
- D. Liberzon, Hybrid feedback stabilization of systems with quantized signals, Automatica, 2003. (407)
- D. Liberzon and D. Nešić, ISS of linear systems with quantized state measurements, IEEE AC, 2007. (137)
- C. Li, L. Li and C. Zheng, ISS of nonlinear systems with quantized state measurements, preprint.

谢谢!