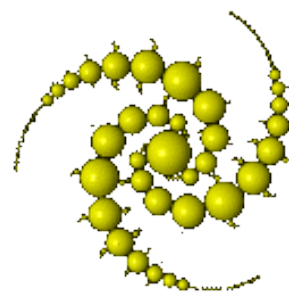

浅谈对数螺旋线 (logarithmic spiral)



摘要: 我们常常可以在自然界中发现螺旋扩大的图形, 比如: 蜘蛛织的网、向日葵的花盘、鹦鹉螺外部切面等等。这种图形叫做对数螺旋线。本文, 将从数学的视角, 探讨对数螺旋线的来源、历史上数学家们对它的研究、如何建立模型、这种模型的性质和它在工业、农业、建筑业等方面的应用。

We often can find expanding spiral graphics in nature, such as: spider weaving a network, sunflower chrysanthemum, Nautilus external aspect and so on. This graph is called the logarithmic spiral. This article, from the perspective of mathematics to explore the source of logarithmic spiral, mathematicians in the history who studied it, how to build models, the nature of the models and the application it is in industry, agriculture, construction, etc.

作者: 陈红 (200911233021) 陈虹邑 (200911233012)
殷怡 (200911233008)

关键词: 对数螺旋线、应用、蜗牛壳、对数螺旋线叶片

二、螺旋线的来源

1、在自然界中的踪影

在自然界中对数螺旋线非常普遍,

向日葵花盘上瘦果的对数螺旋线的弧形排列, 这样就可以使果实排得最紧、数量最多、产生后代的效率也最高。

当我们观察着园蛛, 我们会发现它的网并不是杂乱无章的, 那些辐排得很均匀, 每对相邻的辐所交成的角都是相等的;

蜘蛛在织网时, 首先要在两地之间架“天索”, 把丝固定在一定的地方, 并在固定的丝上来回走几趟, 使丝加粗。然后在“天索”上设置对角线, 再在对角线的

中央织一个白点，这是将来网的中心。以后往返于中心和圆周之间织许多呈辐射状的半径线。接着自圆心向外作第一螺旋线，再自外向里织粘性强的第二螺旋线。织好第二螺旋线后，将第一螺旋线及其部分射线吃掉，并继续自外向里作螺旋线。愈近中心，每圈间的距离也愈密，直到不可辨认的地步。这正符合数学上的对数螺线的情况。蜘蛛的确不愧是“数学家”、“织网家”。

车前草的叶片是轮生的，叶片间的夹角为 $137^{\circ} 30'$ ，这是圆的黄金分割的张角。按照这一角度排列的叶片，能很好地镶嵌而又互不重叠，这是采光面积最大的排列方式，有效地提高了植株光合作用的效率。植物叶子在茎上的排列，一般都是螺旋状。

鹦鹉螺外壳切面呈现优美的等角螺线，而等角螺线本身又与黄金分割有着密不可分的关系，这使鹦鹉螺在亮丽的外表之外又增加了许多大自然的神秘色彩。

有一些特殊的运动所产生的轨迹也是螺旋线。一只蚂蚁以不变的速率，在一个均匀旋转的唱片中心沿半径向外爬行，结果蚂蚁本身就描绘出一条螺旋线。蝙蝠从高处往下飞，是按空间螺旋线——锥形螺旋线的路径飞行的。

星体的运行轨迹有的也是螺旋线。日本国家天文台的中井直政博士，在对银河系中部的气体密度进行了为期3年的观察研究后认为，银河系是呈螺旋状的，即星体以圆心呈螺旋状向外扩。

象鼻、动物的角、毛都呈对数螺旋线；

菊的种子排列成等角螺旋；

鹰以等角螺旋的方式接近光源；

漩涡星系的悬臂差不多是等角螺旋，银河系的四大旋臂的倾斜度为 12° ；

低气压（热带气旋、温带气旋）的外观像等角螺旋。

2、著名数学家对对数螺旋线的研究

螺旋线这个名词来源于希腊文，它的原意是“旋卷”或“缠卷”。例如，平面螺旋便是以一个固定点开始向外逐圈旋绕而形成的曲线。在2000多年以前，古希腊数学家阿基米德就对螺旋线进行了研究。著名数学家笛卡尔于1683年首先描述了对数螺旋线，并且列出了螺旋线的解析式。

对于等角螺线的探讨，以伯努利（J. Bernoulli, 1654~1705年）的成果最为丰硕。他痴心于研究对数螺线，发现将等角螺线作某些变换时，所得的曲

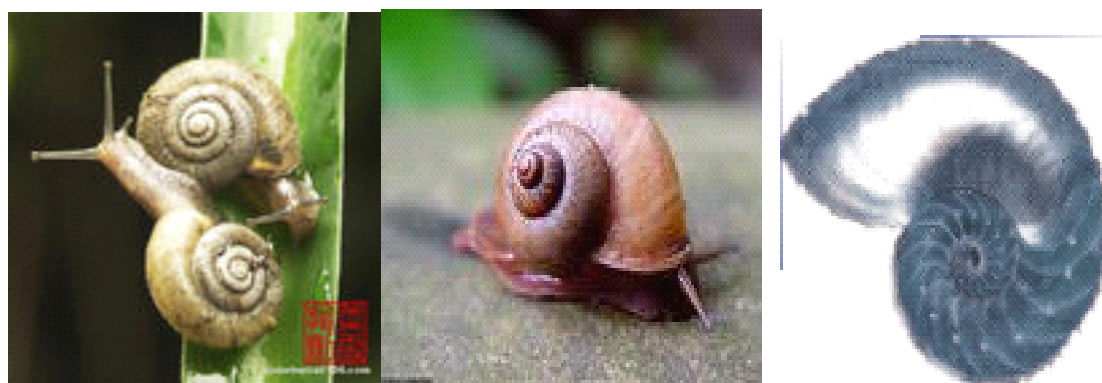
线仍是全等的等角螺线。这些变换包括：求等角螺线的垂足曲线；求等角螺线的渐屈线；求等角螺线反演曲线；求等角螺线的焦线；将等角螺线以其极点为中心作伸缩变换，由于这些变换都可以使等角螺线再生，这个现象使伯努利大为欣慰，他惊叹这种曲线的神奇，竟在遗嘱里要求后人将对数螺线刻在自己的墓碑上，并附以颂词“纵然变化，依然故我”，用以象征死后永生不朽，并幽默地写上“我将按着原来的样子变化后复活”的墓志铭。

三、数学模型

1、螺旋蜗牛壳

有一种蜗牛的壳就是依照对数螺线构造的。世界上第一只蜗牛知道了对数螺线，然后用它来造壳，一直到现在，壳的样子还没变过。

在壳类的化石中，这种螺线的例子还有很多。现在，在南海，我们还可以找到一种太古时代的生物的后代，那就是鹦鹉螺。它们还是很坚贞地守着祖传的老法则，它们的壳和世界初始时它们的老祖宗的壳完全一样。也就是说，它们的壳仍然是依照对数螺线设计的。并没有因时间的流逝而改变，就是在我们的死水池里，也有一种螺，它也有一个螺线壳，普通的蜗牛壳也是属于这一构造。



从图片中蜗牛壳的形状看，我们可以从中抽象出一个平面图形，类似于上述乌龟爬行路线的曲线，这个图形并不随着蜗牛躯体的大小而变化，始终如一地保持着这个平面图形：



图 1

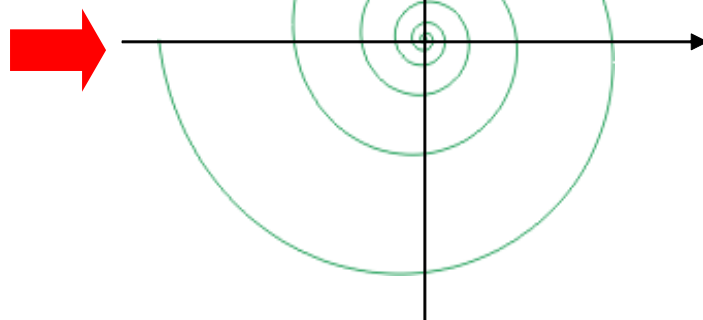


图 2

把图 1 中蜗牛壳每一个轮廓抽象出来，忽略掉轮廓线以外的蜗牛壳图案，我们可以得到图 2 这样的曲线。它有顺时针方向和逆时针方向螺旋线两种类型。（在选择顺时针方向螺旋线或逆时针方向螺旋线时，经验告诉我们，逆时针方向螺旋线的准确性较大）

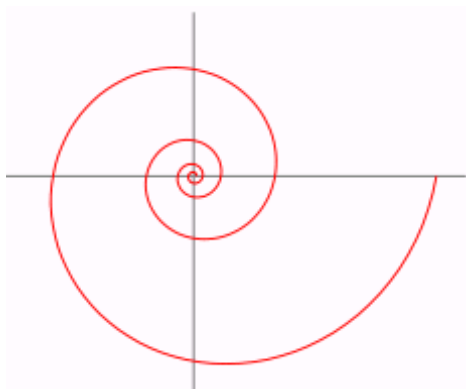


图 3 逆时针螺旋线

2、乌龟爬行

一个为人们所熟知的行进路线问题是四个乌龟的问题。它涉及到对数螺旋线，下面我们将以“乌龟爬行”的小故事引出它的数学模型。

汤姆·皮莎训练了四个小海龟：阿娜、玻瑟、查尔斯、蒂里拉，把它们依次编号为甲、乙、丙、丁。一天，他把四个小海龟放在一间屋子的四个角落里，让甲始终朝着乙所在的位置前进，让乙始终朝着丙所在的位置前进，同理，丙朝着丁、丁朝着甲的方向走。皮莎先生高兴地说，“每个海龟都以同样的速度径直向它前面的海龟爬去，那么，每一时刻它们四个都处在某个正方形的角上。”(如图 4 和图 5 所示)

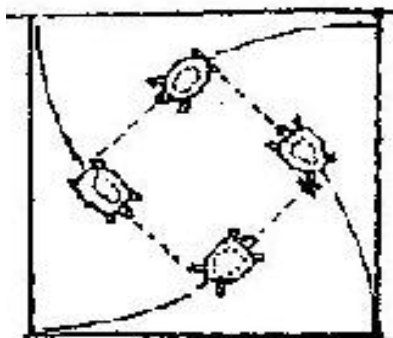


图 4

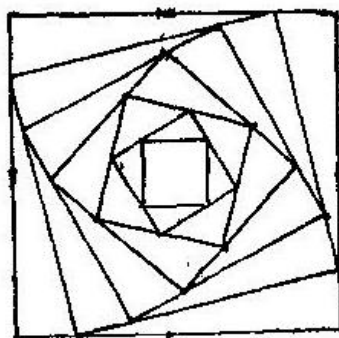


图 5

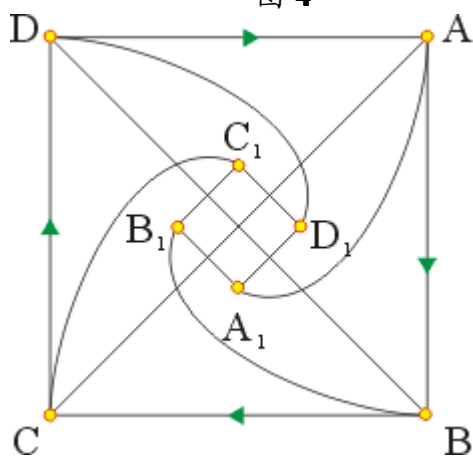


图 6

假设四只乌龟在某一时刻的位置分别为 A_1 、 B_1 、 C_1 、 D_1 (见图 6), 则根据四只乌龟的行动一致所产生的对称性, 可知 $\square A_1 B_1 C_1 D_1$ 也是正方形, 而且它的中心也就是正方形 $\square ABCD$ 的中心 O 。更进一步地, 由于在 A_1 点的甲乌龟

系冲向在 B_1 点的乙乌龟, 所以, 甲乌龟在此一时刻的速度方向在向量 $\overrightarrow{A_1 B_1}$ 上。或者说, 甲乌龟所跑的路径在 A_1 点的切线与直线 OA_1 形成 45° 的夹角。同理, 乙乌龟所跑的路径在 B_1 点的切线与直线 OB_1 形成 45° 的夹角相等。

一般而言, 若一曲线在每个点 P 的切向量都与某定点 O 至此点 P 所成的向量 \overrightarrow{OP} 夹成一定角, 且定角不是直角, 则此曲线称为一等角螺线 (equiangular spiral), O 点称为它的极点 (pole)。

前面所提的四狗追逐问题中, 每只乌龟所经过的路线都是一等角螺线的一部分, 此等角螺线中的定角是 $\frac{\pi}{4}$ (或 $\frac{3\pi}{4}$, 因为切向量可选成相反方向), 而其极

点是正方形 $\square ABCD$ 的中心 O 。

3、对数螺旋线方程

对数螺旋线又称等角螺旋线。若一条曲线在每个点 P 的切向量都与某定点 O 至此点 P 所成的向量 \overline{OP} 夹成一定角，且定角不是直角，则此曲线称为一条等角螺线， O 点称为它的极点。在坐标平面上，若极坐标方程

式 $r = f(\theta)$ 表示一等角螺线 ($f(\theta) > 0$)，其极点是原点 O ，定角为 α ($0 < \alpha < \pi, \alpha \neq \frac{\pi}{2}$)，则因在点 $(f(\theta), \theta)$ 的切向量为

$$(f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \sin \theta, f'(\theta) \sin \theta + f(\theta) \cos \theta)$$

所以，可得

$$= \frac{\cos \alpha}{\cos \theta (f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \sin \theta) + \sin \theta (f'(\theta) \sin \theta + f(\theta) \cos \theta)} \sqrt{(f'(\theta))^2 + (f(\theta))^2}$$

即

$$\frac{f'(\theta)}{\sqrt{(f'(\theta))^2 + (f(\theta))^2}}$$

由此可得下述结果：

$$\begin{aligned} \frac{f'(\theta)}{f(\theta)} &= \cot \alpha \\ \ln f(\theta) &= \theta \cot \alpha + \text{常数} \ln a, (\text{上式两端积分}) \\ f(\theta) &= ae^{\theta \cot \alpha} \end{aligned}$$

换言之，此等角螺线的极坐标方程式为

$$r = ae^{\theta \cot \alpha}$$

在前面所提的四只乌龟追逐问题中，若中心 O 是极点而点 A 的极坐标为 $A(a, \frac{\pi}{4})$ ，则甲、乙、丙、丁四只乌龟所跑的路径分别在下述四等角螺线上：

$$r = ae^{(\theta - \frac{\pi}{4}) \cot \alpha}, r = ae^{(\theta + \frac{\pi}{4}) \cot \alpha}, r = ae^{(\theta + \frac{3\pi}{4}) \cot \alpha}, r = ae^{(\theta - \frac{5\pi}{4}) \cot \alpha}$$

前面所提的 $r = ae^{\theta \cot \alpha}$ ，就是等角螺线的极坐标方程式。由于在导出此方程式的过程中曾经引用了自然对数，所以，等角螺线也称为对数螺线 (logarithmic

spiral).

四、模型的性质

1、相似性质

根据等角螺线的方程式 $r = ae^{\theta \cot \alpha}$ ，可以看出：对每个 θ 值，都有一个对应的 r 值；而且不同的 θ 值所对应的 r 值也不同（因为 $\cot \alpha \neq 0$ ）。这种现象表示：从等角螺线上某个点出发，随着 θ 值的无限制增大与无限制减小，此曲线会环绕它的极点形成无数多圈，一面是愈绕愈远，一面是愈绕愈聚集在极点附近。若 $\cot \alpha > 0$ ，则当 $\theta \rightarrow -\infty$ 时，曲线聚集在极点附近。若 $\cot \alpha < 0$ ，则当 $\theta \rightarrow -\infty$ 时，曲线愈绕越远。图 7 是等角螺线的一部分 ($\cot \alpha < 0$)。

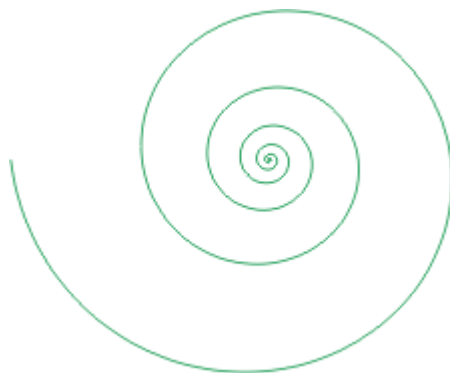


图 7

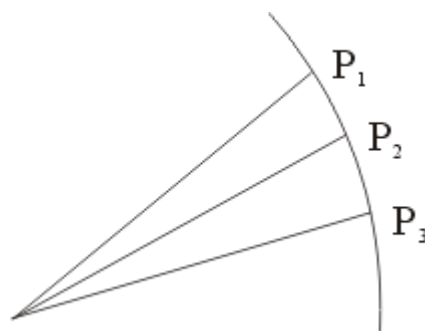


图 8

若辐角 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$ 构成一个等差数列，则由指数的性质，对应的向径 $ae^{\theta_1 \cot \alpha}, ae^{\theta_2 \cot \alpha}, ae^{\theta_3 \cot \alpha}, \dots$ 就构成等比数列。若令 P_n 表示极坐标 $(ae^{\theta_n \cot \alpha}, \theta_n)$ 的点，则上述结果表示 $\overline{OP_1}, \overline{OP_2}, \overline{OP_3}, \dots$ 构成一个等比数

列。又因 $\angle P_1OP_2 = \angle P_2OP_3 = \dots$ ，所以可知 $\triangle P_1OP_2$ 与 $\triangle P_2OP_3$ 相似。由此可知：

$$\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \overline{P_3P_4} \dots$$

构成一个等比数列。

若上述等差数列 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$ 的公差是 2π ， P_1, P_2, P_3, \dots 等乃是过极点的一射线与等角螺线的交点。可见：过极点作任意射线，则此射线与等角螺线的交点必以等比数列的形式排列在射线上。

对于一般的几何图形，若我们选定某个点做为伸缩中心将图形放大或缩小，则可得到一个相似的图形，在等角螺线的情形中，若伸缩中心是它的极点，则不论放大或缩小多少倍，所得的不只是相似图形而已，它是与原等角螺线全等的一个等角螺线。为什么呢？若以极点为伸缩中心将等角螺线 $r = ae^{\theta \cot \alpha}$ 伸缩 m 倍，则所得的图形是等角螺线 $r = ame^{\theta \cot \alpha}$ 。因为 $m \neq 0$ ，所以可找到一个实数 ϕ 使得 $m = e^{\phi \cot \alpha}$ 。于是伸缩后的图形为 $r = ae^{(\theta+\phi) \cot \alpha}$ ，这个图形其实就是等角螺线 $r = ae^{\theta \cot \alpha}$ 绕极点顺时针旋转 ϕ 角所得，它自然与原等角螺线 $r = ae^{\theta \cot \alpha}$ 全等。

根据前段的说明，我们可以了解：等角螺线上的一段弧经伸缩若干倍后，必与该等角螺线上的另一弧全等。事实上，若等角螺线 $r = ae^{\theta \cot \alpha}$ 经伸缩成 $r = ae^{(\theta+\phi) \cot \alpha}$ ，则在等角螺线 $r = ae^{\theta \cot \alpha}$ ，辐角 θ 满足 $\beta \leq \theta \leq \gamma$ 的弧，经伸缩后必与该等角螺线上辐角 θ 满足 $\beta + \phi \leq \theta \leq \gamma + \phi$ 的弧全等。等角螺线的这项特性，使得自然界中许多物体都呈现等角螺线的形状。

对数螺旋线是常见形状中一种非常特殊的几何形状，从严格的数学观点看一个螺旋在平面上是一个曲线，其极半径为其极角的递增或递减函数。它具有特殊的性质，如以恒定角度与半径相交，这个角度与其连续方根相符。这意味着它尽管是增量曲线，但增量遵守着不变法则。可以把它看作是一个翻转的在两端无限延伸的圆锥的投影，这个数学描述非常重要。

对数螺旋线在科学领域是很著名的。对数螺旋线是一根无止尽的螺线，它永远向着极绕，越绕越靠近极，但又永远不能到达极。即使用最精密的仪器，我们也看不到一根完全的对数螺旋线。这种图形只存在科学家的假想中，可令人惊讶的是小小的蜘蛛也知道这线，它就是依照这种曲线的法则来绕它网上的螺线的，而且做得很精确。

这螺旋线还有一个特点。如果你用一根有弹性的线绕成一个对数螺旋线的图形，再把这根线放开来，然后拉紧放开的那部分，那么线的运动的一端就会划成一个和原来的对数螺旋线完全相似的螺线，只是变换了一下位置。这个定理是一位名叫杰克斯·勃诺利的数学教授发现的，他死后，后人把这条定理刻在他的墓碑上，算是他一生中最为光荣的事迹之一。

五、应用

大家可别小看了对数螺旋线：在工业生产中，把抽水机的涡轮叶片的曲面作成对数螺旋线的形状，抽水就均匀；

在农业生产中，把轧刀的刀口弯曲成对数螺旋线的形状，它就会按特定的角度来切割草料，又快又好。

建筑师们参照车前草叶片排列的这一原理，设计出现代化螺旋式的高楼，可以使高楼的每个房间都很明亮，达到较佳的采光效果。

螺旋线被广泛应用于各个方面，如机械上的螺杆、螺帽、螺钉和日常用品的螺丝扣等。枪膛中的膛线也是螺旋线，就连一些楼梯也是螺旋状的。被称为“世界七大奇观”之一的意大利比萨斜塔的楼梯，便是 294 阶的螺旋线。美国加州设计师还向车前草借鉴了采光原理，设计了一幢 13 层的螺旋状排列的大楼，结果证明，每个房间都能得到充足的阳光。下面我们详细阐述一下对数螺旋线在叶片结构设计上的应用。

1、结构设计要点

图一为 θ 值从 $0 \sim 2\pi$ 之间变化时的对数螺旋线。对数螺旋线叶片是取其一段 (BC 段)，此时，对数螺旋线上任意一点 M 的向径 OM 与 M 点切线 MT 的夹角 Ψ 为常数。对数螺旋线叶片设计公式

$$r = ae^{(0.858 \sim 0.84)\theta} \quad (1)$$

式中 r —向径

θ —极角

a —常数

从式(1)可知,当 $\theta=0$ 时, $r=a$,因此 a 值大小决定对数螺线开始时的位置。同时, a 值大小也决定叶片的强度和刚度。一般 a 值愈大,叶片的强度刚度也愈大。

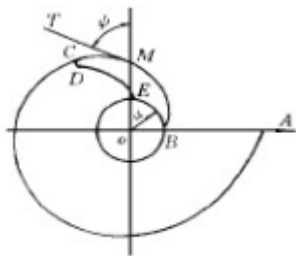


图1 对数螺线

2、对数螺线叶片的动力学分析

2.1 物料不沾筒壁

如图2所示,设叶片以 ω 转动,筒底物料 m 以 v_1 速度运动。方向垂直 oA 。遇到斜角为 Ψ 的叶片后,改变方向(沿叶片上A点的切线方向)以 v_1 速度越过叶片末端A点和筒壁之间的间隙 S 后,在B点与筒壁碰撞之后,以 v_2 速度反射(此时 $v_1=v_2$,同时入射角与反射角相等为 γ)。

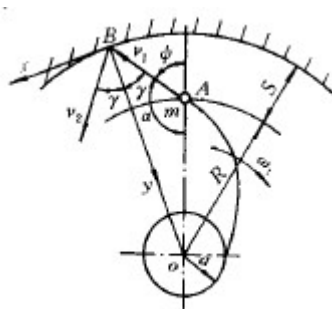


图2 物料运动分析

在直角坐标系 xoy 中,由冲量、动量关系有

$$F_x \Delta t = mv_{2x} - mv_{1x} \quad (2)$$

$$F_y \Delta t = mv_{2y} - mv_{1y} \quad (3)$$

而 $v_{1x} = v_1 \sin \gamma$

$$v_{2x} = v_2 \sin \gamma$$

$$v_{1y} = -v_1 \cos \gamma \quad (4)$$

$$V_{2y} = v_2 \cos \gamma$$

由式 (2)、(3)、(4) 得

$$F_x \Delta t = mv_2 \sin \gamma - mv_1 \sin \gamma \quad (5)$$

$$F_y \Delta t = mv_2 \cos \gamma + mv_1 \cos \gamma \quad (6)$$

由于 $v_1 = v_2$, 所以 $F_x \Delta t = 0$. 则有

$$F_y \Delta t = 2mv_1 \cos \gamma$$

$$F_y = \frac{2mv_1 \cos \gamma}{\Delta t} \quad (7)$$

由式 (7) 知, γ 越大, F_y 越小, 物料贴筒壁的可能性越小, 而 $\gamma = 0$, F_y 最大, 则越易粘筒壁, 直杆式搅拌叶片, 因 $\Psi = 0$, $\gamma = 0$, 故容易粘筒壁。

2.2 物料不粘叶片

如图三所示, 当叶片以 ω 回转时, 叶片对物料的作用力 F_n 可分解为 F_1 及 F_2 .

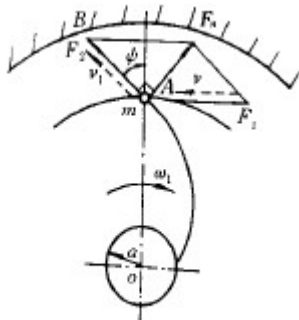


图3 叶片对物料的作用力

$$F_1 = \frac{F_n}{\cos \Psi} \quad (8)$$

$$F_2 = F_n \tan \Psi$$

F_1 、 F_2 方向垂直 OA

F_2 方向沿叶片切线方向

当物料所受 F_2 力大于叶片对物料的摩擦力 $F_n \mu$ 时, 物料沿 F_2 方向移动, 及物料速度由 v 改为 V_1 的方向, 相当于 F_2 不断刮叶片。 F_2 力起刮叶片的作用, 由于 Ψ 是常数, 在叶片上任何一点, 刮料的力都存在。故叶片不易粘住物料。而直杆式叶片 $\Psi = 0$, 不具备刮削物料的作用, 物料易粘叶片。

3、对数螺线在叶片中的应用

由于目前搅拌设备中，大多采用直杆式搅拌叶片，其 $\gamma=0$ ，F 值最大，故有物料粘筒壁、粘叶片、磨损大、能耗高等缺点，而对数螺线叶片能正好克服以上缺点。故它可作为搅拌设备的叶片取代直杆式搅拌叶片，应用于搅拌设备中。

如在搅拌设备，设置几层叶片并布置成一凹一凸的形式，可增加搅拌路程，提高搅拌效率。如图 4 箭头方向所示。

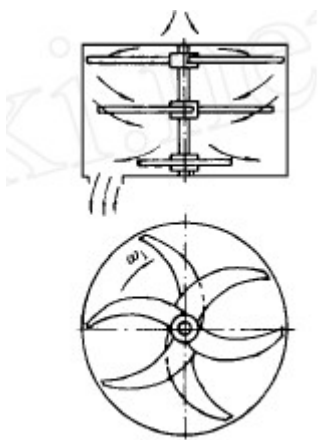


图 4 叶片布置方式

六、总结

通过对对数螺线的研究，我们知道，对数螺线在自然界，尤其是生物界非常常见，向日葵、车前草、菊的种子、蜘蛛、鹦鹉螺、蜗牛、海螺、星体运行轨迹、象鼻、动物的角和毛……自然界中的生物总是倾向于选择最佳的可行方案，这意味着自然系统总是力争最优性能。

在查阅了大量资料的基础上，我们通过建立数学模型，抽象出了对数螺旋线，并了解了它的一些性质，诸如变化趋势等，对数螺旋线是一种奇妙的曲线，优美的曲线，“生命的曲线”，盘旋扩大而上升至远方、更远方，以至无穷，向下盘旋而缩小，又无法找出其出发点。自然界的一切，都像螺旋线那样的美；自然界的一切，都像螺旋线那样呈现出无限宽广的图景。

在理论联系实际方面，发掘到它在工业、农业、建筑业、设计方面的广泛应用，尤其深入研究了它在工业方面的搅拌叶片的应用，由此我们更发现了它的奇妙。大自然中有许许多多的奥妙，人类总是先发掘然后应用到人类世界中来。

这种自然的几何学告诉我们，宇宙间有一位万能的几何学家，他已经用它神奇的工具测量过宇宙间所有的东西。所以万事万物都有一定的规律。我觉得用这个假设来解释鹦鹉螺和蛛网的对数螺线，似乎比蠕虫绞尾巴而造成螺线的说法更恰当。

七、参考资料:

网址:

<http://cfc.nankai.edu.cn/readings/bonuli.htm> (螺旋线来源)

<http://www.xici.net/b12018/d7952923.htm>

202.113.227.137/songz/index/homework/2004/45.doc (螺旋线图像及方程)

<http://zh.wikipedia.org/wiki/%E7%AD%89%E8%A7%92%E8%9E%BA%E7%BA%BF>

http://blog.sina.com.cn/s/blog_5bca8fb50100eh75.html

<http://zhidao.baidu.com/question/59657742.html>

<http://www.cnmaths.com>

参考文献:

- 1 张秉荣《工程力学》北京机械工业出版社 1996
- 2 金庆国《特种加工》北京航空工业出版社 1988
- 3 杨黎明《机械零件设计手册》北京国防工业出版社 1984