单生过程

张余辉
(北京师范大学数学科学学院)

第一稿, 2007年8月

1 引言

令 $(X(t))_{t\geq 0}$ 为定义在可数状态空间 $E=\{0,1,2,\cdots\}$ 上的连续时间不可约马氏链, 具有转移概率矩阵 $P(t)=(p_{ij}(t))$ 和速率 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$. 如果其速率矩阵 $Q=(q_{ij})$ 满足: $q_{i,i+1}>0$, $q_{ij}=0$ $(j\geq i+2,\, i,j\in E)$, 则称 $(X(t))_{t\geq 0}$ 为单生过程, 该速率矩阵称为单生 Q 矩阵. 假定此过程代表某生物种群的个体数目, 由 q_{ij} 的概率意义可知, 在每个时刻群体个数增加(生)只能是一个. 如果其速率矩阵 $Q=(q_{ij})$ 满足: $q_{i,i+1}=:b_i>0\,(i\geq 0)$, $q_{i,i-1}=:a_i>0\,(i\geq 1)$, 且对一切 $|i-j|\geq 2$, $q_{ij}=0$, 则称 $(X(t))_{t\geq 0}$ 为生灭过程, 该速率矩阵称为生灭 Q 矩阵, 简记为 (a_i,b_i). 当然生灭过程只是单生过程的特例.

我们研究单生过程的理由主要是四个. 一是由于通常单生过程可以看作最简单的不可逆过程, 而不可逆过程的研究通常要困难得多, 这给我们的研究带来挑战, 注意生灭过程是最简单的可逆过程, 其研究也并不简单; 二是由于单生 Q 矩阵的流出边界至多一个极点, 从方程的观点来说, 我们处理的通常是单参数方程, 这又给研究带来希望, 我们可能就一些经典问题得到显式的判别准则; 三是单生过程本身有很强的应用背景, 在生物学、人口学、化学、经济学、电子通信等学科中都有重要的应用, 在种群理论中又称该过程为非向上跨跳过程(skip-free upwardly process), 带大灾难的生灭过程(birth and death process with catastrophes), 或生灭大灾难过程(birth, death and catastrophe process), 参见[1, 2, 3, 4, 17]. 四是单生过程在理论上是一类极其重要的马尔可夫过程和数学工具, 常将复杂过程与之比较进行研究, 往往是研究一般马尔可夫过程的切入点和有力工具.

这些年来, 关于单生过程的研究已获得很多结果. 国内外学者研究的侧重点也不一样, 国外同行主要用母函数的方法研究灭绝概率等问题, 自然要对 Q 矩阵施加条件, 即研究一些特定的单生 Q 矩阵(见[1, 2, 3, 4, 17]). 国内学者则对一般的单生 Q 矩阵使用分析方法研究其唯一性和遍历理论等经典问题, 对其唯一性, 常返性, 遍历性和强遍历性, 已得到了显式判别准则, 还获得了其平稳分布的显式表达式, 同时, 对指数遍历性也得到一些结果, 如显式充分条件等. 可参阅[5, 8, 9, 16, 22, 23, 24].

所谓 Q 矩阵即: $q_{ij}\geq 0\,(j\neq i)$, $\sum_{j\neq i}q_{ij}\leq q_i:=-q_{ii}$. 本文只考虑全稳定且保守的单生 Q 矩阵, 即

对一切 $i \geq 0$ 有 $q_i = \sum_{j\neq i} q_{ij} < \infty$. 如果 Q 矩阵全稳定保守且确定唯一 Q 过程, 我们称 Q 矩阵是正则的.

我们的内容安排为: 第二至第四节分别介绍单生过程唯一性、常返性、遍历性和强遍历性的显式判别准则. 第五节是关于单生过程首中时, 击中时的矩和平稳分布的显式表达. 第六节则讲单生过程 ℓ 遍历的判别. 第七节涉及我们最关心的部分—单生过程指数遍历性. 第八节介绍一类单生过程, 第九节介绍单生过程的应用, 第十节只要是讲与单生过程相关的研究课题.

2 唯一性

从Chapman-Kolmogorov方程出发, 可以导出两个微分方程:

$$\text{Kolmogorov 向后方程} \qquad P'(t) = QP(t).$$

$$\text{Kolmogorov 向前方程} \qquad P'(t) = P(t)Q.$$

类似于微分方程, 在实际中, 我们知道的是 Q 而非 $P(t)$.

定义2.1. 给定 Q 矩阵 $Q = (q_{ij})$. 若具非负性、Chapman-Kolmogorov条件、连续性条件(跳条件)及 $P(t)1 \leq 1$ 的次转移概率矩阵 $P(t)$, 满足 $P'(t)|_{t=0} = Q$, 则称该过程 $P(t)$ 为 Q 过程.

现在, 自然要问对于给定 Q 矩阵, Q 过程是否存在?是否唯一? 回顾全稳定、保守的假设, 我们知道: 每一 Q 过程都满足向后方程. 由此出发, Q 过程的存在、唯一性就转化为向后方程的解的存在、唯一性. 事实上, 我们最终知道 Q 过程总存在, 且向后、向前方程有相同的最小解.

关于 Q 矩阵决定的 Q 过程唯一性的判别, 实际上, 可由[8, 定理2.40和定理2.47]立即得出如下引理.

引理2.1. 给定全稳定保守 Q 矩阵 $Q = (q_{ij})$. 则其决定的 Q 过程是唯一的, 当且仅当方程

$$u_i = \sum_{j\neq i} q_{ij} u_j/(\lambda + q_i), \qquad 0 \leq u_i \leq 1, \, i \geq 0$$

对某个(等价地, 对所有) $\lambda > 0$ 只有平凡解, 或者说最大解为零解. 等价地, 方程

$$u_i = \sum_{j\neq i} q_{ij} u_j/(\lambda + q_i), \qquad u_i \geq 0, \, i \geq 0 \tag{2.1}$$

对某个(等价地, 对所有) $\lambda > 0$ 的非平凡解无界.

此判别准则的优美之处是 Q 矩阵, 而且方程的最大解也存在迭代算法. 但对单生过程, 一个更好的判别准则—显式的、完全可计算的, 是期盼的. 但一个更好的判别准则应该是显式的、完全可计算的. 我们最终的确得到这样的判别准则. 为叙述主要结果, 引入下面的记号. 本文的系列记号源于文献[8], 专用于单生过程的研究.

对 $0\le k<n$, 定义 $q_n^{(k)}=\sum_{j=0}^k q_{nj}$. 再定义

$$m_0=\frac{1}{q_{01}},\qquad m_n=\frac{1}{q_{n,n+1}}\bigg(1+\sum_{k=0}^{n-1}q_n^{(k)}m_k\bigg),\quad n\ge 1, \tag{2.2}$$

$$F_n^{(n)}=1,\qquad F_n^{(i)}=\frac{1}{q_{n,n+1}}\sum_{k=i}^{n-1}q_n^{(k)}F_k^{(i)},\quad 0\le i<n. \tag{2.3}$$

实际上, 这两组记号可以用后一组统一表示, 因为用归纳法不难证明

$$F_n^{(i)}=\sum_{k=i+1}^{n}\frac{F_n^{(k)}q_k^{(i)}}{q_{k,k+1}},\quad n>i\ge 0;\qquad m_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{F_n^{(k)}}{q_{k,k+1}},\quad n\ge 0. \tag{2.4}$$

现在得到的唯一性判别准则如下, 注意它只依赖于单生 Q 矩阵, 因此是可计算的.

定理2.1. 给定单生 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$. 则单生过程唯一当且仅当 $R:=\sum_{n=0}^\infty m_n=\infty$.

证明: (1) 对任意 $\lambda>0$, 我们证明单生 Q 矩阵的方程

$$(\lambda+q_i)u_i=\sum_{j\ne i}q_{ij}u_j,\qquad u_0=1, u_i\ge 0,\, i\ge 0 \tag{2.5}$$

的解 (u_i) 一定关于 i 是严格单调增的.

实际上, 此时的方程(2.5)即为 $u_0=1$ 且

$$q_{i,i+1}(u_{i+1}-u_i)=\sum_{j=0}^{i-1}q_i^{(j)}(u_{j+1}-u_j)+\lambda u_i,\qquad i\ge 0. \tag{2.6}$$

由此即可归纳得出解 (u_i) 的严格单调增性. 从此往后, 取定 $\lambda=1$, 应用引理2.1于此情形, 只需证明 (u_i) 无界当且仅当 $R=\infty$.

(2) 由归纳法及(2.3)容易证明

$$F_n^{(0)}\le q_{01}m_n,\qquad n\ge 0. \tag{2.7}$$

(3) 我们证明单生过程的方程(2.5)的解满足

$$m_n\le u_{n+1}-u_n\le (u_1-u_0)F_n^{(0)}+u_n m_n,\qquad n\ge 0. \tag{2.8}$$

下面用归纳法证明之. 首先, 由(2.6)知

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{q_{n,n+1}}\bigg(\sum_{i=0}^{n-1}q_n^{(i)}(u_{i+1}-u_i)+u_n\bigg),\qquad n\ge 0. \tag{2.9}$$

所以, 当 $n=0$ 时, 显然有 $u_1-u_0<(u_1-u_0)F_0^{(0)}+u_0m_0$, 再由(2.9) 我们得到

$$u_1-u_0=\frac{u_0}{q_{01}}=m_0.$$

假设直至 $n-1$ 时(2.8)都成立. 则一方面由(2.9)及假设得出

$$u_{n+1}-u_n\ge\frac{1}{q_{n,n+1}}\bigg(\sum_{i=0}^{n-1}q_n^{(i)}m_i+u_n\bigg)>m_n.$$

另一方面, 同样由(2.9)及假设得出

$$u_{n+1}-u_n\le\frac{1}{q_{n,n+1}}\bigg((u_1-u_0)\sum_{i=0}^{n-1}q_n^{(i)}F_i^{(0)}+\sum_{i=0}^{n-1}q_n^{(i)}m_iu_i+u_n\bigg)$$

$$\begin{aligned}&\le (u_1-u_0)F_n^{(0)}+\frac{u_n}{q_{n,n+1}}\left(1+\sum_{i=0}^{n-1}q_n^{(i)}m_i\right)\\&=(u_1-u_0)F_n^{(0)}+u_nm_n.\end{aligned}\tag{2.10}$$

故由归纳法得证(2.8).

(4) 我们现在证明方程(2.5)的解 (u_i) 有界当且仅当 $R<\infty$. 由于有(2.7)和(2.8), 不难证明此结论. 实际上, 若 (u_i) 有界, 则由(1)知 $u_\infty:=\lim_{n\to\infty}u_n<\infty$. 再由(2.8), 我们有

$$R=\sum_{k=0}^{\infty}m_k\le\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1}-u_k)=u_\infty-u_0<\infty.$$

反之, 设 $R<\infty$. 由于 $u_\infty=\prod_{k=0}^{\infty}u_{k+1}/u_k$ 且 $u_{k+1}/u_k>1\,(k\ge 0)$, 故可知 $\prod_k u_{k+1}/u_k$ 与级数 $\sum_k\log(u_{k+1}/u_k)$ 同敛散(当 $u_{k+1}/u_k\to 1$ 时), $\sum_k\log(u_{k+1}/u_k)$ 又与 $\sum_k(u_{k+1}/u_k-1)$ 同敛散. 其次, 由(2.7)和(2.8)可得

$$0<\frac{u_{n+1}}{u_n}-1\le\frac{(u_1-u_0)F_n^{(0)}}{u_n}+m_n<(1+q_{01}(u_1-u_0))m_n,\qquad n\ge 0.$$

综合以上事实, 我们推出 $u_\infty<\infty$ 即 (u_i) 有界. 故结论得证.

对生灭 Q 矩阵 (a_i,b_i), (2.2)有简单的形式:

$$m_n=\frac{1}{\mu_nb_n}\mu[0,n],\qquad n\ge 0,$$

其中

$$\mu_0=1,\qquad \mu_i=\frac{b_0b_1\cdots b_{i-1}}{a_1a_2\cdots a_i},\quad i\ge 1,$$

且 $\mu[i,k]=\sum_{j=i}^{k}\mu_j$.

定理2.2. 给定生灭 Q 矩阵 (a_i,b_i). 则生灭过程唯一当且仅当 $R:=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\mu_nb_n}\mu[0,n]=\infty$.

3 常返性

对于连续时间情形, 可以证明 $p_{ii}(t)>0\,(t\ge 0)$, $p_{ij}(t)$ 关于 t 在 $(0,\infty)$ 上或恒为正或恒为零. 因而不存在周期问题. 另外, $(p_{ij}(t))$ 不可约等价于 $Q=(q_{ij})$ 不可约.

定义3.1. 给定过程 $P(t)=(p_{ij}(t))$. 若对一切 $h>0$, 离散链 $P(h)$ 常返, 等价地, $\int_0^\infty p_{ii}(t)\mathrm{d}t=\infty$, 则称该过程 $P(t)$ 为常返的.

关于一般 Q 过程常返性的判别有如下引理. 参见[8, 引理4.51].

引理3.1. 设 $Q=(q_{ij})$ 是不可约 Q 矩阵. 则相应的 Q 过程常返的充分必要条件是方程

$$x_i=\sum_{j\ne j_0,i}q_{ij}x_j/q_i,\qquad 0\le x_i\le 1,\ i\ge 0$$

对某个(等价地, 对所有)固定的 j_0 只有平凡解, 或者说最大解为零解. 等价地, 方程

$$x_i = \sum_{j\neq j_0,i} q_{ij}x_j/q_i, \qquad x_i \geq 0,\, i \geq 0 \tag{3.1}$$

对某个(等价地, 对所有)固定的 j_0 的非平凡解无界.

这个判别准则也依赖于方程解的性质, 对于单生过程, 我们还是希望得到一个只依赖于 Q 矩阵的判别准则, 即是显式的、可计算的. 答案如下.

定理3.1. 给定不可约单生 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$. 则其相应的单生过程常返当且仅当 $\sum_{n=0}^\infty F_n^{(0)} = \infty$, 其中 $F_n^{(k)}$ 由(2.3)所定义.

证明: 由引理3.1, 我们只需证明方程(3.1)有非平凡有界解当且仅当 $\sum_{n=0}^\infty F_n^{(0)} < \infty$. 为此, 取定 $j_0=0$. 而方程(3.1)有非平凡有界解等价于方程

$$x_i = \sum_{j\neq 0,i} q_{ij}x_j/q_i, \qquad x_0=1,\, x_i \geq 0,\, i \geq 0 \tag{3.2}$$

有有界解. 设 (x_i) 是方程(3.2)的解. 因此只需证明 (x_i) 有界当且仅当 $\sum_{n=0}^\infty F_n^{(0)} < \infty$.

首先, 由(3.2)知 $x_0=x_1=1$, 且有

$$q_{n,n+1}(x_{n+1}-x_n) = \sum_{j=1}^{n-1} q_{nj}(x_n-x_j) + q_{n0}x_n = \sum_{k=1}^{n-1} q_n^{(k)}(x_{k+1}-x_k) + q_{n0}x_1, \qquad n \geq 1. \tag{3.3}$$

同时由(3.2)知 $x_1 = \sum_{k\neq 0,1} q_{1k}x_k/q_1 = q_{12}x_2/(q_{12}+q_{10}) \leq x_2$. 由以上及归纳法易知 (x_i) 是单调增的.

其次, 设 (x_i) 有界. 令 $y_0=x_1$ 和 $y_i = x_{i+1}-x_i\,(i\geq 1)$. 则 (y_i) 非负有界且由(3.3)有

$$y_i = \frac{1}{q_{i,i+1}}\left(\sum_{j=1}^{i-1} q_i^{(j)}y_j + q_{i0}y_0\right) = \frac{1}{q_{i,i+1}}\sum_{j=0}^{i-1} q_i^{(j)}y_j, \qquad i\geq 1.$$

由以上及 $F_n^{(0)}$ 的定义, 用归纳法易证 $y_i = F_i^{(0)}\,(i\geq 0)$. 进而有

$$x_n = \sum_{i=1}^{n-1}(x_{i+1}-x_i) + x_1 = \sum_{i=1}^{n-1} y_i + y_0 = \sum_{i=0}^{n-1} F_i^{(0)}.$$

故结合 (x_i) 的有界性得到 $\sum_{n=0}^\infty F_n^{(0)} < \infty$.

反之, 设 $\sum_{n=0}^\infty F_n^{(0)} < \infty$. 取 $x_0=x_1=1$ 和 $x_{n+1} = x_n + F_n^{(0)}\,(n\geq 1)$. 则

$$x_n = \sum_{i=1}^{n-1}(x_{i+1}-x_i) + x_1 = \sum_{i=1}^{n-1} F_i^{(0)} + F_0^{(0)} = \sum_{i=0}^{n-1} F_i^{(0)} < \infty.$$

所以 (x_i) 是有界正的且单调增. 另外, 由 (x_i) 的取法, 易证 (x_i) 满足(3.3), 进而 (x_i) 满足方程(3.2). 从而证明了方程(3.2)有有界解 (x_i). 所以定理结论得证. □

对生灭 Q 矩阵 (a_i,b_i), (2.3)有简单的形式:

$$F_n^{(0)} = \frac{b_0}{\mu_n b_n}, \qquad n\geq 0.$$

定理3.2. 给定生灭 Q 矩阵 (a_i,b_i). 则生灭过程常返当且仅当 $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{\mu_n b_n} = \infty$.

4 遍历性

在马尔可夫氏链的遍历理论研究中, 通常研究的三种遍历性即普通遍历, 指数遍历和强遍历. 先给出遍历的定义.

定义4.1. 给定过程 $P(t) = (p_{ij}(t))$ 和概率测度 (π_i). 若对一切 $h > 0$, 离散链 $P(h)$ 遍历, 等价地, $\lim_{t\to\infty} p_{jj}(t) = \pi_j > 0\,(j \in E)$, 则称该过程 $P(t)$ 为遍历的, (π_i) 为过程的平稳分布.

遍历性等价地有: $\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = \pi_j > 0$ 与 i 无关, 也可写成 $\lim_{t\to\infty} |p_{ij}(t) - \pi_j| = 0$. 关于这三种遍历性的相关论题, 请参阅文献[1, 8, 9]. 我们将给出了单生过程这三种遍历性的显式判别准则或充分条件, 同时也将研究所谓 ℓ 遍历性. 这一节只研究普通的遍历性. 为此, 我们先回顾一个用检验函数的遍历性判别准则, 参见[8, 定理4.45].

引理4.1. 设 $Q = (q_{ij})$ 是正则不可约 Q 矩阵, H 是 E 的一个有限非空子集, 则相应 Q 过程遍历当且仅当方程

$$\begin{cases} \sum_{j\in E} q_{ij} y_j \le -1, & i \notin H \\ \sum_{i\in H} \sum_{j\ne i} q_{ij} y_j < \infty \end{cases} \tag{4.1}$$

有有限非负解.

对于单生过程, 我们依然希望得到一个只依赖于 Q 矩阵、无需检验函数的判别准则. 为此, 引入下列记号.

$$d_0 = 0, \qquad d_n = \frac{1}{q_{n,n+1}}\left(1 + \sum_{k=0}^{n-1} q_n^{(k)} d_k\right), \quad n \ge 1. \tag{4.2}$$

这组记号也可以用(2.3)统一表示. 因为用归纳法可以证明

$$d_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{F_n^{(k)}}{q_{k,k+1}}, \quad n \ge 0. \tag{4.3}$$

结合(2.4)和(4.3)知, 三组记号(2.2)、(2.3)和(4.2)满足如下关系:

$$m_n = \frac{F_n^{(0)}}{q_{01}} + d_n, \qquad n \ge 0. \tag{4.4}$$

单生过程遍历性(正常返性)显式判别准则如下.

定理4.1. 给定正则不可约单生 Q 矩阵 $Q = (q_{ij})$. 则其决定的单生过程遍历(正常返)当且仅当

$$d := \sup_{n\ge 0} \sum_{k=0}^{n} d_k \Big/ \sum_{k=0}^{n} F_k^{(0)} < \infty. \tag{4.5}$$

证明: 在方程(4.1)中取定 $H = \{0\}$. 在单生 Q 矩阵的情形, 方程(4.1)即为

$$\sum_{j\ne i} q_{ij}(y_j - y_i) + 1 \le 0, \qquad i \ge 1. \tag{4.6}$$

设 (u_i) 是方程(4.6)的一个有限非负解. 不妨取 $u_0=0$. 此时 $u_1\geq 1/q_1>0$. 事实上, 在方程(4.6)中取 $i=1$ 得到 $1\leq q_{12}u_2+1\leq q_1u_1$. 我们从(4.6)得到

$$u_{i+1}-u_i\leq \frac{1}{q_{i,i+1}}\bigg(\sum_{j=0}^{i-1}q_{ij}(u_i-u_j)-1\bigg)=\frac{1}{q_{i,i+1}}\bigg(\sum_{j=0}^{i-1}q_i^{(j)}(u_{j+1}-u_j)-1\bigg),\qquad i\geq 1.$$

由此及(2.3)和(4.2)用归纳法可证得

$$u_{n+1}-u_n\leq F_n^{(0)}u_1-d_n,\qquad n\geq 0.$$

所以

$$0\leq u_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1}-u_k)\leq u_1\sum_{k=0}^{n}F_k^{(0)}-\sum_{k=0}^{n}d_k,\qquad n\geq 0.$$

故知 $\sum_{k=0}^n d_k/\sum_{k=0}^n F_k^{(0)}\leq u_1\,(n\geq 0)$, 进而 $d\leq u_1<\infty$.

反之, 假设 $d<\infty$. 令

$$u_0=0,\quad u_1=d,\quad u_{n+1}=u_n+F_n^{(0)}u_1-d_n,\qquad n\geq 0.$$

则对所有的 $n\geq 0$, 有

$$u_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1}-u_k)=\sum_{k=0}^{n}\big(dF_k^{(0)}-d_k\big)=d\sum_{k=0}^{n}F_k^{(0)}-\sum_{k=0}^{n}d_k\geq 0.$$

所以 (u_n) 有限非负. 此时, 对每个 $i\geq 1$, 我们容易证明

$$\begin{aligned}q_{i,i+1}(u_{i+1}-u_i)+1&=q_{i,i+1}F_i^{(0)}u_1-q_{i,i+1}d_i+1=\sum_{j=0}^{i-1}q_i^{(j)}F_j^{(0)}u_1-\sum_{j=0}^{i-1}q_i^{(j)}d_j\\&=\sum_{j=0}^{i-1}q_i^{(j)}(u_{j+1}-u_j)=\sum_{j=0}^{i-1}q_{ij}(u_i-u_j).\end{aligned}$$

此即 $\sum_{j\neq i}q_{ij}(u_j-u_i)+1=0\,(i\geq 1)$. 所以 (u_n) 满足(4.6). 因此, (u_n) 是方程(4.6)的一个有限非负解. 最后, 由引理4.1立即推出单生过程是遍历的. □

例4.1. 给定正则不可约单生 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$. 若 $\inf_{k\geq 1}q_{k0}>0$, 则单生过程遍历. 因为由合分比性质及(2.4)和(4.3)式, 可得

$$d\leq \sup_{i\geq 1}\frac{d_i}{F_i^{(0)}}\leq \sup_{k\geq 1}\frac{1}{q_k^{(0)}}=\frac{1}{\inf_{k\geq 1}q_{k0}}.$$

所以 $d<\infty$. 后面的研究将给出比之更强的结论.

对生灭 Q 矩阵 (a_i,b_i), (4.2)有简单的形式:

$$d_n=\frac{1}{\mu_nb_n}\mu[1,n],\qquad n\geq 0.$$

定理4.2. 给定正则生灭 Q 矩阵 (a_i,b_i). 则生灭过程遍历当且仅当 $\mu[0,\infty)<\infty$.

5 强遍历性

这一节研究单生过程的强遍历性. 我们先给出一般过程强遍历的定义.

定义5.1. 给定正则不可约 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$ 和概率测度 (π_i). 相应的 Q 过程记为 $P(t)=(p_{ij}(t))$. 若 $\lim_{t\to\infty}\sup_i|p_{ij}(t)-\pi_j|=0\,(j\in E)$, 则称该过程 $P(t)$ 为强遍历的或一致遍历的.

由Chapman-Kolmogorov方程, 得出强遍历可等价定义为 $\lim_{t\to\infty}\mathrm{e}^{\beta t}\sup_i|p_{ij}(t)-\pi_j|=0\,(j\in E)$. 最佳(即最大)的 β 称为强遍历速度. 对于一般的 Q 过程, 文献[8, 定理4.45]给出了一个用检验函数的强遍历性判别准则如下.

引理5.1. 设 $Q=(q_{ij})$ 是正则不可约 Q 矩阵, H 是 E 的一个有限非空子集, 则相应 Q 过程强遍历当且仅当方程

$$\begin{cases}\sum_{j\in E}q_{ij}y_j\le -1, & i\notin H\\ \sum_{i\in H}\sum_{j\ne i}q_{ij}y_j<\infty\end{cases}\tag{5.1}$$

有有界非负解.

该判别准则一个好的应用见命题8.1. 对于单生过程, 我们还是能够得到如下只依赖于 Q 矩阵、无需检验函数的强遍历判别准则.

定理5.1. 给定正则不可约单生 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$. 则其决定的单生过程强遍历的当且仅当

$$S:=\sup_{n\ge 0}\sum_{k=0}^{n}\left(dF_k^{(0)}-d_k\right)<\infty,$$

其中 d 的定义见4.5.

证明: (1) 我们先证明如下结论(参看[22, 8]): 方程

$$y_i=\sum_{j\ne i}\frac{q_{ij}}{q_i}y_j+\frac{1}{q_i},\quad i\ge 1;\qquad y_0=0,\tag{5.2}$$

有一有界非负解当且仅当 $S<\infty$. 此时, 我们有

$$d=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}d_k\Big/\sum_{k=0}^{n}F_k^{(0)},$$

而且方程(5.2)的唯一解有下面的形式:

$$y_0=0,\quad y_1=d,\quad y_{n+1}=y_n+F_n^{(0)}y_1-d_n,\qquad n\ge 1.\tag{5.3}$$

首先, 假定 $S<\infty$, 如(5.3)定义 (y_i). 容易验证 (y_i) 是方程(5.2)的有界非负解.

其次, 设 (y_i) 是方程(5.2)的有界非负解. 定义 $v_n=y_{n+1}-y_n\,(n\ge 0)$. 由(5.2)不难推出

$$v_n=\frac{1}{q_{n,n+1}}\left(\sum_{k=0}^{n-1}q_n^{(k)}v_k-1\right),\qquad n\ge 1.$$

由归纳法, 我们容易证明 $v_n=F_n^{(0)}v_0-d_n\,(n\ge 0)$. 留意 $v_0=y_1$. 综合以上事实, 我们得到

$$y_{k+1}=\sum_{n=0}^{k}v_n=\sum_{n=0}^{k}(F_n^{(0)}v_0-d_n),\qquad k\ge 0.\tag{5.4}$$

一方面, 由(5.4)和 $y_{k+1}\ge 0$, 得出

$$v_0\ge\sum_{n=0}^{k}d_n\Big/\sum_{n=0}^{k}F_n^{(0)},\qquad k\ge 0.$$

因此, $v_0 \geq d = \sup_{k\geq 0} \sum_{n=0}^k d_n / \sum_{n=0}^k F_n^{(0)}$. 另一方面, 再由(5.4)得出

$$\frac{y_{k+1}}{\sum_{n=0}^k F_n^{(0)}} = v_0 - \frac{\sum_{n=0}^k d_n}{\sum_{n=0}^k F_n^{(0)}}, \qquad k \geq 0. \tag{5.5}$$

注意到 (y_i) 有界且由常返性知, 当 $k \to \infty$ 时, $\sum_{n=0}^k F_n^{(0)} \to \infty$. 在(5.5)中令 $k \to \infty$, 我们得到 $v_0 = d' := \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^k d_n / \sum_{n=0}^k F_n^{(0)}$, 进而, $v_0 = d' \leq d$. 因此, 我们得到

$$y_1 = v_0 = d = d'.$$

结合(5.4), 我们知道方程(5.2)的解 (y_i) 必定有(5.3)的表达式, 因此解是唯一的. 最后, 由 (y_i) 的有界性和(5.4), 推出 $S < \infty$. 由此我们完成了所需等价性的证明.

(2)在方程(5.1)中取定 $H = \{0\}$. 此时, 在单生 Q 矩阵的情形, 方程(5.1)即为

$$\sum_{j\neq i} q_{ij}(y_j - y_i) + 1 \leq 0, \qquad i \geq 1. \tag{5.6}$$

我们证明单生过程强遍历的充分必要条件是方程(5.6)有一有界非负解.

假设单生过程强遍历, 则方程(5.6)存在一有界非负解 (u_i), 即

$$u_i \geq \sum_{j\neq i} \frac{q_{ij}}{q_i} u_j + \frac{1}{q_i}, \quad i \geq 1; \quad u_0 \geq 0.$$

记 (u_i^*) 是方程(5.2)的最小非负解. 则由比较定理([8, 定理2.6])得到 $u_i \geq u_i^*\ (i \geq 0)$. 因此, (u_i^*) 有界且方程(5.2)有一有界非负解. 再由(1)中的等价性即知 $S < \infty$.

反之, 设 $S < \infty$. 由(5.3)定义 (y_i). 则由(1)中证明的等价性知, (y_i) 是方程(5.2)的有界非负解. 显然 (y_i) 也是方程(5.6)的有界非负解. 再由引理5.1知, 这蕴涵单生过程的强遍历性. □

定理5.2. 给定正则生灭 Q 矩阵 (a_i, b_i). 则生灭过程强遍历当且仅当 $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{\mu_n b_n} \mu[n+1, \infty) = \sum_{n=1}^\infty \mu_n \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\mu_j b_j} < \infty$.

6 首中时, 击中时与平稳分布

在研究 ℓ 遍历与指数遍历前, 我们希望研究前面几节引入的记号和得到的显式判别准则的概率意义. 为此, 需要介绍一些概念.

给定不可约 Q 矩阵 $Q = (q_{ij})$. 令 $(X(t))_{t\geq 0}$ 为定义在概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ 上相应的马尔可夫链. 其相继的跳时刻定义如下:

$$\eta_0 = 0, \qquad \eta_n = \inf\{t : t > \eta_{n-1}, X(t) \neq X(\eta_{n-1})\}, \qquad n \geq 1.$$

若 Q 矩阵正则, 我们知道飞跃点 $\eta := \lim_{n\to\infty} \eta_n = \infty$. 设 H 为 E 的一个非空有限子集, 定义 H 击中时为 $\sigma_H = \inf\{t \geq \eta_1 : X(t) \in H\}$. 简记 $\sigma_{\{i\}}$ 为 σ_i. 定义 i 的首中时为: $\tau_i = \inf\{t > 0 : X(t) = i\}$. 显然, 若出发点不是 i, 则 $\sigma_i = \tau_i$.

文献[21]证明了 $m_n=\mathbb{E}_n\sigma_{n+1}=\mathbb{E}_n\tau_{n+1}$, $R=\mathbb{E}_0\sigma_\infty$, 其中 $\sigma_\infty:=\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\lim_{n\to\infty}\tau_n$(极限以概率 1 存在), 故 σ_∞ 可看作 ∞ 的首中时. 注意几乎处处有 $\sigma_\infty=\eta$, 而且

$$\mathbb{P}_0(\sigma_0<\infty)=1-\bigg(\sum_{n=0}^{\infty}F_n^{(0)}\bigg)^{-1}.$$

因此, 我们现在能够更好地理解唯一性判别准则和常返性判别准则的概率意义. 文献[8, 定理4.44]告诉我们这样一个概率准则.

定理6.1. 给定正则不可约 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$. 则相应的过程遍历当且仅当 $\mathbb{E}_0\sigma_0<\infty$; 过程强遍历当且仅当 $\sup_{i\geq 0}\mathbb{E}_i\sigma_0<\infty$; 过程指数遍历当且仅当 $\mathbb{E}_0\mathrm{e}^{\lambda\sigma_0}<\infty$, 其中 $0<\lambda<q_i\,(i\geq 0)$.

那么, 在前面几节中我们得到的遍历和强遍历显式判别准则与定理6.1有何关系, 如何从概率意义来理解呢? 为此, 考虑 0 的首中时的 n 阶矩: $m_i^{(n)}=\mathbb{E}_i\tau_0^n\,(i\geq 1)$. 关于该首中时的 n 阶矩, 有如下命题(参看[8, 命题4.56]和[15]).

命题6.1. 给定正则不可约 Q 过程. 则 $(m_i^{(n)})$ 是下列方程的最小非负解:

$$x_0=0,\qquad x_i=\sum_{j\neq i}\frac{q_{ij}}{q_i}x_j+\frac{n}{q_i}m_i^{(n-1)},\quad i\geq 1. \tag{6.1}$$

为研究单生过程 0 的首中时的 n 阶矩, 我们定义

$$d_0^{(n)}=0,\qquad d_i^{(n)}=\frac{1}{q_{i,i+1}}\bigg(m_i^{(n-1)}+\sum_{k=0}^{i-1}q_i^{(k)}d_k^{(n)}\bigg),\quad i\geq 1. \tag{6.2}$$

用归纳法可证

$$d_i^{(n)}=\sum_{k=1}^{i}\frac{F_i^{(k)}m_k^{(n-1)}}{q_{k,k+1}},\quad i\geq 0. \tag{6.3}$$

再令

$$d^{(n)}=\sup_{i\geq 1}\frac{\sum_{j=0}^{i-1}d_j^{(n)}}{\sum_{j=0}^{i-1}F_j^{(0)}}=\sup_{i\geq 0}\frac{\sum_{j=0}^{i}d_j^{(n)}}{\sum_{j=0}^{i}F_j^{(0)}}. \tag{6.4}$$

注意到 $m_i^{(0)}=1\,(i\geq 1)$. 则由(6.2)和(4.2), 可得 $d_j^{(1)}=d_j\,(j\geq 0)$. 进而, 由(6.4)和(4.5), 得到 $d^{(1)}=d$. $d^{(n)}$ 与后面一节的 ℓ 遍历(见定义7.1)有关.

下面是单生过程 0 的首中时的 n 阶矩的显式表达.

定理6.2. 单生过程首中时的 n 阶矩可由如下表达式给出:

$$\mathbb{E}_1\tau_0^n=nd^{(n)}=\mathbb{E}_1\sigma_0^n,\qquad \mathbb{E}_i\tau_0^n=n\sum_{j=0}^{i-1}(F_j^{(0)}d^{(n)}-d_j^{(n)})=\mathbb{E}_i\sigma_0^n,\quad i\geq 1. \tag{6.5}$$

$$\mathbb{E}_0\sigma_0^n=n!\Big(q_{01}^{-n}+\sum_{k=1}^{n}(k!q_{01}^{n-k})^{-1}\mathbb{E}_1\sigma_0^k\Big),\quad n\geq 1. \tag{6.6}$$

特别地, 下面的表达式成立:

$$\mathbb{E}_1\sigma_0=\mathbb{E}_1\tau_0=d,\qquad \mathbb{E}_i\sigma_0=\mathbb{E}_i\tau_0=\sum_{j=0}^{i-1}(F_j^{(0)}d-d_j),\quad i\geq 1. \tag{6.7}$$

$$\mathbb{E}_0\sigma_0=q_{01}^{-1}+\mathbb{E}_1\sigma_0=q_{01}^{-1}+d. \tag{6.8}$$

证明：将命题6.1中的方程(6.1)变形为

$$x_0 = 0, \qquad q_{i,i+1}(x_{i+1} - x_i) = \sum_{j=0}^{i-1} q_{ij}(x_i - x_j) - n m_i^{(n-1)}, \qquad i \geq 1.$$

则

$$x_{i+1} - x_i = \frac{1}{q_{i,i+1}} \bigg(\sum_{j=0}^{i-1} q_i^{(j)} (x_{j+1} - x_j) - n m_i^{(n-1)} \bigg). \tag{6.9}$$

一方面, 由(2.4), (6.2), (6.3)和(6.9), 可得

$$\begin{aligned}
x_{i+1} - x_i &= \sum_{j=0}^{i-1} \frac{F_i^{(i)} q_i^{(j)}}{q_{i,i+1}} (x_{j+1} - x_j) - \frac{n F_i^{(i)} m_i^{(n-1)}}{q_{i,i+1}} \\
&= \sum_{j=0}^{i-2} \frac{F_i^{(i)} q_i^{(j)}}{q_{i,i+1}} (x_{j+1} - x_j) + F_i^{(i-1)} (x_i - x_{i-1}) - \frac{n F_i^{(i)} m_i^{(n-1)}}{q_{i,i+1}} \\
&= \sum_{j=0}^{i-2} \sum_{k=i-1}^{i} \frac{F_i^{(k)} q_k^{(j)}}{q_{k,k+1}} (x_{j+1} - x_j) - n \sum_{k=i-1}^{i} \frac{F_i^{(k)} m_k^{(n-1)}}{q_{k,k+1}} = \cdots \\
&= \sum_{k=1}^{i} \frac{F_i^{(k)} q_k^{(0)}}{q_{k,k+1}} \cdot x_1 - n \sum_{k=1}^{i} \frac{F_i^{(k)} m_k^{(n-1)}}{q_{k,k+1}} \\
&= F_i^{(0)} x_1 - n d_i^{(n)}, \qquad i \geq 1.
\end{aligned} \tag{6.10}$$

事实上, 对所有的 $i \geq 0$, (6.10)皆成立. 因此,

$$x_i = \sum_{j=0}^{i-1} F_j^{(0)} x_1 - n \sum_{j=0}^{i-1} d_j^{(n)}, \qquad i \geq 1. \tag{6.11}$$

因为 $(m_i^{(n)})$ 是(6.1)的非负解, 故由(6.11)可知 $n d^{(n)} \leq m_1^{(n)}$.

另一方面,令 $u_0 = 0$, $u_1 = n d^{(n)}$ 且 $u_i = n \sum_{j=0}^{i-1} (F_j^{(0)} d^{(n)} - d_j^{(n)})\,(i \geq 2)$. 则可验证 (u_i) 是(6.1)的一非负解. 由 $(m_i^{(n)})$ 的最小性, 推出 $m_1^{(n)} \leq n d^{(n)}$.

综合以上, 我们得出 $m_1^{(n)} = n d^{(n)}$. 再由(6.11)知, 前面所构造的解 (u_i) 正是 $(m_i^{(n)})$, 换而言之, 0 首中时 n 阶矩的表达式是(6.5).容易验证(6.6). 而(6.7)和(6.8)只是 $n = 1$ 的特殊情形. □

由定理6.1和6.2, 自然立刻得到遍历的判别准则是 $d < \infty$, 强遍历的判别准则是 $\sup_{i \geq 1} \sum_{j=0}^{i-1} (F_j^{(0)} d - d_j) < \infty$. 这两个准则的概率意义显然: $d = \mathbb{E}_1 \sigma_0$, $S = \mathbb{E}_\infty \sigma_0$. 我们也再次给出了显式判别准则的证明.

现在我们来研究单生过程的平稳分布. 为此, 令

$$c_k = \sup_{i > k} \frac{\sum_{j=k}^{i-1} m_j}{\sum_{j=k}^{i-1} F_j^{(k)}} = \sup_{i \geq k} \frac{\sum_{j=k}^{i} m_j}{\sum_{j=k}^{i} F_j^{(k)}}. \tag{6.12}$$

显然 $c_k \geq m_k$ 且 $c_0 = q_{01}^{-1} + d$. 下面是关于 i_0 首中时的一阶矩的结果.

定理6.3. 任意给定 $i_0 \geq 0$. 单生过程的 i_0 首中时的一阶矩可由如下表达式给出:

$$\mathbb{E}_i \tau_{i_0} = \sum_{j=i}^{i_0-1} m_j, \quad i < i_0; \qquad \mathbb{E}_i \tau_{i_0} = \sum_{j=i_0}^{i-1} (F_j^{(i_0)} c_{i_0} - m_j), \quad i \geq i_0 + 1. \tag{6.13}$$

证明: 令 $u_i = \mathbb{E}_i \tau_{i_0}$. 由文献[8, 命题4.56](类似于命题6.1)知, (u_i) 是下列方程的最小非负解:

$$x_{i_0} = 0, \qquad x_i = \sum_{j \neq i} \frac{q_{ij}}{q_i} x_j + \frac{1}{q_i}, \quad i \neq i_0. \tag{6.14}$$

将等式(6.14)变形为

$$x_{i_0}=0,\qquad q_{i,i+1}(x_{i+1}-x_i)=\sum_{j=0}^{i-1}q_{ij}(x_i-x_j)-1,\quad i\neq i_0.$$

则

$$x_{i+1}-x_i=\frac{1}{q_{i,i+1}}\bigg(\sum_{j=0}^{i-1}q_i^{(j)}(x_{j+1}-x_j)-1\bigg),\qquad i\neq i_0. \tag{6.15}$$

一方面, 同定理6.2的(6.10)式之证明, 从(6.15)可立刻得到

$$x_{i+1}-x_i=F_i^{(0)}(x_1-x_0)-d_i,\qquad i<i_0. \tag{6.16}$$

另一方面, 借助定理6.2的证明方法, 当 $i>i_0$ 时, 由(2.4), (4.3), (6.15)及(6.16), 我们有:

$$\begin{aligned}
x_{i+1}-x_i&=\sum_{j=0}^{i-2}\frac{F_i^{(i)}q_i^{(j)}}{q_{i,i+1}}(x_{j+1}-x_j)+F_i^{(i-1)}(x_i-x_{i-1})-\frac{F_i^{(i)}}{q_{i,i+1}}\\
&=\sum_{j=0}^{i-2}\sum_{k=i-1}^{i}\frac{F_i^{(k)}q_k^{(j)}}{q_{k,k+1}}(x_{j+1}-x_j)-\sum_{k=i-1}^{i}\frac{F_i^{(k)}}{q_{k,k+1}}=\cdots\\
&=\sum_{j=0}^{i_0}\sum_{k=i_0+1}^{i}\frac{F_i^{(k)}q_k^{(j)}}{q_{k,k+1}}(x_{j+1}-x_j)-\sum_{k=i_0+1}^{i}\frac{F_i^{(k)}}{q_{k,k+1}}\\
&=\sum_{j=0}^{i_0-1}\sum_{k=i_0+1}^{i}\frac{F_i^{(k)}q_k^{(j)}}{q_{k,k+1}}(x_{j+1}-x_j)-\sum_{k=i_0+1}^{i}\frac{F_i^{(k)}}{q_{k,k+1}}+\sum_{k=i_0+1}^{i}\frac{F_i^{(k)}q_k^{(i_0)}}{q_{k,k+1}}(x_{i_0+1}-x_{i_0})\\
&=\sum_{j=0}^{i_0-1}\sum_{k=i_0}^{i}\frac{F_i^{(k)}q_k^{(j)}}{q_{k,k+1}}(x_{j+1}-x_j)-\sum_{k=i_0}^{i}\frac{F_i^{(k)}}{q_{k,k+1}}-\sum_{j=0}^{i_0-1}\frac{F_i^{(i_0)}q_{i_0}^{(j)}}{q_{i_0,i_0+1}}(x_{j+1}-x_j)+\frac{F_i^{(i_0)}}{q_{i_0,i_0+1}}+F_i^{(i_0)}x_{i_0+1}\\
&=\cdots\\
&=\sum_{k=1}^{i}\frac{F_i^{(k)}q_k^{(0)}}{q_{k,k+1}}(x_1-x_0)-\sum_{k=1}^{i}\frac{F_i^{(k)}}{q_{k,k+1}}-\frac{F_i^{(i_0)}}{q_{i_0,i_0+1}}\bigg(\sum_{j=0}^{i_0-1}q_{i_0}^{(j)}(F_j^{(0)}(x_1-x_0)-d_j)-1\bigg)+F_i^{(i_0)}x_{i_0+1}\\
&=-(F_i^{(0)}(x_0-x_1)+d_i)+F_i^{(i_0)}(F_{i_0}^{(0)}(x_0-x_1)+d_{i_0})+F_i^{(i_0)}x_{i_0+1},
\end{aligned} \tag{6.17}$$

事实上, 对所有的 $i\geq i_0$, (6.17)式皆成立.

注意到, 若在(6.14)中取定 $x_i=u_i\,(0\leq i<i_0)$, 则由文献[8, 定理2.13](局部化定理)知, $(u_i,i>i_0)$ 是下列方程

$$x_{i_0}=0,\qquad x_i=\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{q_i}x_k+\frac{1}{q_i},\qquad i>i_0, \tag{6.18}$$

的最小非负解. 而由文献[21]知, $m_i=\mathbb{E}_i\tau_{i+1}$. 此时, 对 $i<i_0$, 可直接证明:

$$u_i=\sum_{j=i}^{i_0-1}m_j. \tag{6.19}$$

实际上, 由 $u_0-u_1=q_{01}^{-1}$ 及(4.4)和(6.16), 也可证明(6.19). 再由(6.17)和(6.19)及(4.4)推出

$$x_{i+1}-x_i=-m_i+F_i^{(i_0)}(m_{i_0}+x_{i_0+1}),\qquad i\geq i_0.$$

因此,

$$x_i=-\sum_{j=i_0}^{i-1}m_j+\sum_{j=i_0}^{i-1}F_j^{(i_0)}(m_{i_0}+x_{i_0+1}),\qquad i>i_0. \tag{6.20}$$

因为 $(u_i, i>i_0)$ 是(6.18)的非负解, 故由(6.12)和(6.20)可知 $c_{i_0}-m_{i_0}\le u_{i_0+1}$.

若令 $v_{i_0+1}=c_{i_0}-m_{i_0}$ 且 $v_i=\sum_{j=i_0}^{i-1}(F_j^{(i_0)}c_{i_0}-m_j)\,(i\ge i_0+2)$. 则可验证 $(v_i, i>i_0)$ 是(6.18)的一非负解. 由 $(u_i, i>i_0)$ 的最小性, 推出 $u_{i_0+1}\le c_{i_0}-m_{i_0}$.

综合以上, 我们得出 $u_{i_0+1}=c_{i_0}-m_{i_0}$. 再由(6.20)可验证, 前面所构造的解 $(v_i, i>i_0)$ 正是 $(u_i, i>i_0)$, 换而言之, i_0 的首中时一阶矩的表达式是(6.13). □

注6.1. 由定理6.3知, $m_i=\mathbb{E}_i\tau_{i+1}$ 且 $\sum_{j=k}^{i-1}m_j=\mathbb{E}_k\tau_i$. 再由(6.13), 可以看出

$$c_i=m_i+\mathbb{E}_{i+1}\tau_i=\mathbb{E}_i\tau_{i+1}+\mathbb{E}_{i+1}\tau_i,\qquad i\ge 0.$$

所以, $\mathbb{E}_{i+1}\tau_i=c_i-m_i>0$, 即 $c_i>m_i\,(i\ge 0)$. 若 $c_k<\infty$, 由(6.13)及上式推出

$$\sum_{j=k}^{i-1}F_j^{(k)}=\frac{\mathbb{E}_k\tau_i+\mathbb{E}_i\tau_k}{\mathbb{E}_k\tau_{k+1}+\mathbb{E}_{k+1}\tau_k},\qquad 0\le k<i;$$

结合(6.12), 得出 $\inf_{i>k}(\mathbb{E}_i\tau_k/\mathbb{E}_k\tau_i)=0$. 注意, 当 $k=0$ 时,

$$\sum_{j=0}^{i-1}F_j^{(0)}=\frac{\mathbb{E}_0\tau_i+\mathbb{E}_i\tau_0}{\mathbb{E}_0\tau_1+\mathbb{E}_1\tau_0},\qquad i>0,$$

所以, 由上式和(4.4)及 $\mathbb{E}_0\tau_1=1/q_{01}$, 我们有

$$\sum_{j=0}^{i-1}d_j=\frac{\mathbb{E}_1\tau_0\mathbb{E}_0\tau_i+\mathbb{E}_i\tau_0\mathbb{E}_0\tau_1}{\mathbb{E}_0\tau_1+\mathbb{E}_1\tau_0},\qquad i>0.$$

我们知道, 当过程遍历时, 对一切 $i\ne j$ 有 $\mathbb{E}_i\tau_j<\infty$; 此时,对任意 $i\ge 0$, 必然有 $c_i<\infty$.

定理6.4. 单生过程的 i 击中时一阶矩之表达式由下式给出:

$$\mathbb{E}_i\sigma_i=\frac{q_{i,i+1}c_i}{q_i},\qquad i\ge 0.$$

进而, 若单生过程是遍历的, 则其平稳分布为

$$\pi_i=\frac{1}{q_{i,i+1}c_i},\qquad i\ge 0.$$

证明: 由(6.13)及 m_n 的定义,有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_i\sigma_i&=\frac{1}{q_i}+\sum_{k=0}^{i-1}\frac{q_{i,k}}{q_i}\mathbb{E}_k\tau_i+\frac{q_{i,i+1}}{q_i}\mathbb{E}_{i+1}\tau_i\\&=\frac{1}{q_i}+\sum_{k=0}^{i-1}\frac{q_{i,k}}{q_i}\sum_{j=k}^{i-1}m_j+\frac{q_{i,i+1}}{q_i}(c_i-m_i)\\&=\frac{q_{i,i+1}}{q_i}\bigg(\frac{1}{q_{i,i+1}}\bigg(1+\sum_{j=0}^{i-1}m_j\sum_{k=0}^{j}q_{i,k}\bigg)+c_i-m_i\bigg)r\\&=\frac{q_{i,i+1}}{q_i}\bigg(\frac{1}{q_{i,i+1}}\bigg(1+\sum_{j=0}^{i-1}q_i^{(j)}m_j\bigg)+c_i-m_i\bigg)\\&=\frac{q_{i,i+1}c_i}{q_i}.\end{aligned}$$

所以得证前一结论. 再由 $\pi_iq_i\mathbb{E}_i\sigma_i=1$ 推出后一结论. □

注6.2. 由定理6.4, 当单生过程遍历时, 应该有 $\sum_{i=0}^{\infty}(q_{i,i+1}c_i)^{-1}=1$. 这个式子并不直观, 遗憾的是尚不能用另外的办法直接证明它.

例6.1. 考虑单生过程的特例—生灭过程: 生速 $b_i=q_{i,i+1}>0\,(i\geq 0)$, 死速 $a_i=q_{i,i-1}>0\,(i\geq 1)$. 定义 $\mu_0=1$, $\mu_i=b_0\cdots b_{i-1}/a_1\cdots a_i\,(i\geq 1)$. 再令$\mu=\sum_{i=0}^{\infty}\mu_i$. 我们知道, 生灭过程遍历等价于 $\mu<\infty$. 通过计算, 得到 $c_i=\mu/(\mu_i b_i)$, 再由定理6.4得到熟知的结果: 平稳分布为 $\pi_i=\mu_i/\mu\,(i\geq 0)$.

例6.2. 令单生 Q 矩阵为: $q_{i,i+1}=1\,(i\geq 0)$, $q_{10}=1$ 且 $q_{i,i-2}=1\,(i\geq 2)$, 其它的 $q_{ij}=0\,(i\neq j)$. 则 $F_k^{(k)}=F_{k+1}^{(k)}=1$, $F_j^{(k)}=F_{j-1}^{(k)}+F_{j-2}^{(k)}\,(j\geq k+2)$. 因此, $\{F_j^{(k)}\}_{j=k}^{\infty}$ 是Fibonacci数列:

$$F_{k+n}^{(k)}=\frac{1}{\sqrt{5}}[A^{n+1}-(-B)^{n+1}]=:F_n,\qquad n\geq 0,k\geq 0,$$

其中 $A=(\sqrt{5}+1)/2, B=(\sqrt{5}-1)/2$. 经过计算, 得到 $m_j=\sum_{k=0}^{j}F_k\,(j\geq 0)$. 注意到Fibonacci数列有如下性质: $\sum_{k=0}^{n}F_k=F_{n+2}-F_1\,(n\geq 0)$. 所以, $m_j=F_{j+2}-F_1\,(j\geq 0)$. 因此,

$$\frac{\sum_{j=k}^{i}m_j}{\sum_{j=k}^{i}F_j^{(k)}}=\frac{F_{i+4}-F_{k+3}-(i-k+1)F_1}{F_{i-k+2}-F_1}\to A^{k+2},\qquad i\to\infty.$$

同时,可以证明

$$\frac{\sum_{j=k}^{i}m_j}{\sum_{j=k}^{i}F_j^{(k)}}<A^{k+2},\qquad i\geq k.$$

综合以上及(6.12), 得到 $c_k=A^{k+2}$. 注意 $A\cdot B=1$. 进而, 由定理6.4知, 平稳分布为 $\pi_k=B^{k+2}\,(k\geq 0)$.

例6.3. 令单生过程的 Q 矩阵为: $q_{i,i+1}=1\,(i\geq 0)$ 且 $q_{i0}=1\,(i\geq 1)$, 其它的 $q_{ij}=0\,(i\neq j)$. 由命题8.1知, 该过程是强遍历的. 经过计算, $F_k^{(k)}=1$, $F_j^{(k)}=2^{j-k-1}(j\geq k+1)$; $m_j=2^j\,(j\geq 0)$. 因此,

$$\frac{\sum_{j=k}^{i}m_j}{\sum_{j=k}^{i}F_j^{(k)}}=2^{k+1}(1-2^{k-i-1})\uparrow 2^{k+1},\qquad i\to\infty.$$

所以得到 $c_k=2^{k+1}$. 进而, 由定理6.4知, 平稳分布为 $\pi_k=2^{-k-1}\,(k\geq 0)$.

例6.4. 考虑种群理论中的均匀大灾难模型, 即 $q_{i,i+1}=\lambda_i:=a+\lambda i\,(i\geq 0)$, $q_{ij}=\beta\,(0\leq j<i)$, 其它的 $q_{ij}=0\,(i\neq j)$, 其中的 a, λ, β 均为正常数. 则该 Q 矩阵正则当且仅当

$$\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{\lambda_{k-1}+k\beta}{\lambda_k}=\infty.$$

此时, 相应的过程是强遍历的且平稳分布为

$$\pi_0=\frac{\beta}{a+\beta},\qquad \pi_k=\frac{(k+1)\beta}{a+\beta}\prod_{j=0}^{k-1}\frac{\lambda_j}{\lambda_{j+1}+(j+2)\beta},\qquad k\geq 1.$$

特别当 $a=\lambda$ 时, 则 $\pi_k=\beta a^k/(a+\beta)^{k+1}\,(k\geq 0)$. 进一步, 当 $a=\lambda=\beta=1$ 时, 则 $\pi_k=2^{-k-1}\,(k\geq 0)$. 我们得到均匀大灾难模型平稳分布的方法是不同于[1, 296页]的.

7 ℓ 遍历性

这一节对单生过程, 我们研究所谓的 ℓ 遍历性. 先就一般的过程给出 ℓ 遍历的定义.

定义7.1. 给定正整数 ℓ, 记从状态 i 出发状态 j 的击中时 σ_j 的 ℓ 阶矩为 $m_{ij}^{(\ell)} := \mathbf{E}_i \sigma_j^{\ell}$. 常返马尔可夫链 $X(t)$ 若对某个(等价地, 对所有) $j \in E$ 满足 $m_{jj}^{(\ell)} < \infty$, 则称之为 ℓ 遍历的.

离散时间马尔可夫链 ℓ 遍历的定义最早出现在文献[12]的第九章, 近些年的研究结果参看文献[14]及其所引文献. 文献[11, 15]把 ℓ 遍历的概念推广到连续时间马尔可夫链, 在该文章中通过击中时的矩研究了高价偏差矩阵的存在性, 同时给出了转移矩阵向平稳测度的多项式收敛速率估计. 由定义知, 1遍历对应于通常的正常返性. 所以为统一, 我们称通常的零常返为 0遍历. 对单生过程, 0遍历和1遍历已经有显式判别准则, 我们期望其 ℓ 遍历($\ell \geq 2$)有一个显式的判别准则. 答案如下.

定理7.1. 给定正则不可约单生 Q 矩阵 (q_{ij}). 假定相应的单生过程常返. 则对 $\ell \geq 1$, 单生过程 ℓ 遍历当且仅当 $d^{(\ell)} < \infty$, 其中 $d^{(\ell)}$ 的定义见(6.4). 此时, 对所有 $i, j \geq 0$, 有 $p_{ij}(t) - \pi_j = o(t^{-(\ell-1)})\,(t \to \infty)$, 其中 (π_i) 为过程的平稳分布.

证明: 在定理6.2的(6.5)中, 已经得到如下表达式.

$$m_{10}^{(n)} = n d^{(n)}, \qquad m_{i0}^{(n)} = n \sum_{j=0}^{i-1} (F_j^{(0)} d^{(n)} - d_j^{(n)}), \quad i \geq 1. \tag{7.1}$$

$$m_{00}^{(n)} = n! \Big(q_{01}^{-n} + \sum_{k=1}^{n} (k! q_{01}^{n-k})^{-1} m_{10}^{(k)} \Big), \qquad n \geq 1. \tag{7.2}$$

因此, 若过程是 ℓ 遍历的, 则 $m_{00}^{(\ell)} < \infty$. 由(7.1)和(7.2)立刻推出 $d^{(\ell)} = m_{10}^{(\ell)}/\ell < \infty$. 反之, 若 $d^{(\ell)} < \infty$, 由(7.1), 我们得到 $m_{10}^{(\ell)} < \infty$; 进而, 可得 $m_{10}^{(k)} < \infty\,(k = 1, \cdots, \ell)$. 再由(7.2)我们知道 $m_{00}^{(\ell)} < \infty$. 所以过程是 ℓ 遍历的. 后一结论直接由[15, 定理1.2]得出. □

8 指数遍历性

这一节我们研究单生过程的指数遍历性. 先给出一般过程指数遍历的定义.

定义8.1. 给定正则不可约 Q 矩阵 $Q = (q_{ij})$ 和概率测度 (π_i). 相应的 Q 过程记为 $P(t) = (p_{ij}(t))$. 若存在常数 $\alpha > 0$ 及 $c_{ij} < \infty$, 使得 $|p_{ij}(t) - \pi_j| \leq c_{ij} \mathrm{e}^{-\alpha t}$ 对于一切 $i, j \in E$ 和 $t \geq 0$ 都成立, 则称该过程 $P(t)$ 为指数遍历的. 最佳(即最大)的 α 称为指数遍历速度.

指数遍历的等价定义为: $\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{\alpha t} |p_{ij}(t) - \pi_j| = 0$. 下面是一个用检验函数的指数遍历性判别准则, 参见[8, 定理4.45].

引理8.1. 设 $Q = \{q_{ij} : i, j \in E\}$ 是正则不可约 Q 矩阵, H 是 E 的一个有限非空子集, 则相应 Q 过程指数遍历当且仅当对某 $\lambda > 0$, 满足 $\lambda < q_i\,(i \in E)$, 方程

$$\begin{cases} \sum_{j \in E} q_{ij} y_j \leq -\lambda y_i - 1, & i \notin H \\ \sum_{i \in H} \sum_{j \neq i} q_{ij} y_j < \infty \end{cases} \tag{8.1}$$

有有限非负解.

在(8.1)中以 $(\tilde{y}_i = \lambda y_i + 1)$ 代替 (y_i), 则可改写(8.1)为

$$\begin{cases} y_i \geq 1, \quad i \in E \\ \sum_{j\in E} q_{ij} y_j \leq -\lambda y_i, \quad i \notin H \\ \sum_{i\in H}\sum_{j\neq i} q_{ij} y_j < \infty \end{cases} \tag{8.2}$$

定理8.1. 给定正则不可约单生 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$. 若

$$q := \inf_{i\geq 0} q_i > 0 \quad 且 \quad M := \sup_{i>0} \sum_{j=0}^{i-1} F_j^{(0)} \sum_{j=i}^{\infty} \frac{1}{q_{j,j+1} F_j^{(0)}} < \infty, \tag{8.3}$$

则其决定的单生过程指数遍历.

证明: 基于引理8.1, 条件 $q > 0$ 确实是必要的. 由引理8.1, 取定 $H = \{0\}$, 单生过程指数遍历当且仅当对某 $\lambda > 0$, 满足 $\lambda < q_i \,(i \in E)$, 方程

$$y_i \geq 1, \quad i \in E; \qquad \sum_j q_{ij} y_j \leq -\lambda y_i, \quad i \geq 1 \tag{8.4}$$

有一有限解. 为此, 对满足 $0 < \lambda < q$ 的固定的 λ, 我们需要构造方程(8.4)的一个有限解 (g_i). 首先, 定义算子

$$I\!I_i(f) = \frac{1}{f_i} \sum_{j=0}^{i-1} F_j^{(0)} \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{f_k}{q_{k,k+1} F_k^{(0)}}, \qquad i \geq 1.$$

这个算子是在文献[6]多次用到的算子 $I(f)$ 的仿造, 所以本质上来源于谱空隙的研究. 其次, 定义

$$\varphi_0 = 0, \qquad \varphi_i = \frac{1}{q_{01}} \sum_{j=0}^{i-1} F_j^{(0)}, \quad i \geq 1.$$

则 φ 关于 i 单调增且 $\varphi_1 = q_{01}^{-1}$. 取定常数 $c > 1$, 令 $f = c q_{10}\sqrt{q_{01}\varphi}$. 则 f 单调增且 $f_1 = c q_{10}$. 最后, 定义 $g = f I\!I(f)$. 则 g 是单调增的且

$$g_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{q_{k,k+1} F_k^{(0)}} \geq \frac{f_1}{q_{12} F_1^{(0)}} = c > 1.$$

由[6, 引理3.6], 我们得到

$$\begin{aligned} g_i &= c q_{10} \sqrt{q_{01}} \sum_{j=0}^{i-1} F_j^{(0)} \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{\sqrt{\varphi_k}}{q_{k,k+1} F_k^{(0)}} \leq \frac{2Mcq_{10}}{\sqrt{q_{01}}} \sum_{j=0}^{i-1} F_j^{(0)} \varphi_{j+1}^{-1/2} \\ &\leq 2Mcq_{10} \sum_{j=0}^{i-1} F_j^{(0)} < \infty, \qquad i \geq 1. \end{aligned}$$

令 $g_0 = 1$. 则 $1 \leq g_i < \infty \,(i \geq 0)$. 现在我们由方程(8.4)来确定 λ. 当 $i=1$ 时, 得到 $\lambda \leq (c-1)c^{-1} I\!I_1(f)^{-1}$. 当 $i \geq 2$ 时, 有

$$\lambda g_i \leq \sum_{k=0}^{i-1} q_i^{(k)} F_k^{(0)} \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{f_j}{q_{j,j+1} F_j^{(0)}} - q_{i,i+1} F_i^{(0)} \sum_{k=i+1}^{\infty} \frac{f_k}{q_{k,k+1} F_k^{(0)}}. \tag{8.5}$$

为此, 只需要

$$\begin{aligned} \lambda g_i &\leq \sum_{k=0}^{i-1} q_i^{(k)} F_k^{(0)} \sum_{j=i}^{\infty} \frac{f_j}{q_{j,j+1} F_j^{(0)}} - q_{i,i+1} F_i^{(0)} \sum_{k=i+1}^{\infty} \frac{f_k}{q_{k,k+1} F_k^{(0)}} \\ &= q_{i,i+1} F_i^{(0)} \sum_{k=i}^{\infty} \frac{f_k}{q_{k,k+1} F_k^{(0)}} - q_{i,i+1} F_i^{(0)} \sum_{k=i+1}^{\infty} \frac{f_k}{q_{k,k+1} F_k^{(0)}} \\ &= f_i. \end{aligned}$$

换而言之, 为满足方程(8.4), 我们只需 $\lambda \le f_i/g_i = I\!I_i(f)^{-1}\,(i\ge 2)$ 且 $\lambda \le (c-1)c^{-1}I\!I_1(f)^{-1}$. 因此, 我们可以取满足下面条件的任意 λ:

$$0<\lambda<\Big(\frac{c-1}{c}\,I\!I_1(f)^{-1}\Big)\bigwedge\Big(\inf_{i\ge 2}I\!I_i(f)^{-1}\Big)\bigwedge q. \tag{8.6}$$

前提是要证明(8.6)右边是正的, 等价地, $\sup_{i\ge 2}I\!I_i(f)<\infty$. 为证明这个性质, 定义另一个算子

$$I_i(f)=\frac{F_i^{(0)}}{f_{i+1}-f_i}\sum_{k=i+1}^{\infty}\frac{f_k}{q_{k,k+1}F_k^{(0)}},\qquad i\ge 1,$$

这个算子才是在文献[6]多次用到的. 由合分比性质, 我们得到

$$\sup_{i\ge 1}I\!I_i(f)\le \sup_{i\ge 1}I_i(f).$$

由[6, 引理3.6]和条件 $M<\infty$, 对所有的 $i\ge 1$, 推出

$$I_i(f)=\frac{F_i^{(0)}}{\sqrt{\varphi_{i+1}}-\sqrt{\varphi_i}}\sum_{k=i+1}^{\infty}\frac{\sqrt{\varphi_k}}{q_{k,k+1}F_k^{(0)}}\le\frac{2MF_i^{(0)}}{q_{01}(\sqrt{\varphi_{i+1}}-\sqrt{\varphi_i})\sqrt{\varphi_{i+1}}}\le 4M.$$

因此, $\sup_{i\ge 1}I\!I_i(f)\le 4M<\infty$. 我们由此构造了方程(8.4)的一个有限解 (g_i) 满足 $1\le g_i<\infty\,(i\ge 0)$. 这蕴含单生过程的指数遍历性. □

例8.1. 令单生 Q 矩阵为: $q_{i,i+1}=1\,(i\ge 0)$, $q_{10}=1$ 且 $q_{i,i-2}=1\,(i\ge 2)$, 其它的 $q_{ij}=0\,(i\ne j)$. 则此单生过程指数遍历, 但非强遍历.

此例即例6.2. 显然过程正则常返. $\{F_n^{(0)}\}$ 是Fibonacci数列:

$$F_n^{(0)}=\frac{1}{\sqrt5}[A^{n+1}-(-B)^{n+1}]=:F_n,\qquad n\ge 0,$$

其中 $A=(\sqrt5+1)/2, B=(\sqrt5-1)/2$. 注意注意到Fibonacci数列有如下性质: $\sum_{k=0}^n F_k=F_{n+2}-F_1\,(n\ge 0)$. 所以, $d_n=F_{n+1}-F_1\,(n\ge 0)$. 因此, 由 $AB=1$, $A-B=1$ 和 $A+B=\sqrt5$, 不难证明

$$A>\frac{\sum_{k=0}^n d_k}{\sum_{k=0}^n F_k^{(0)}}=\frac{F_{n+3}-(n+3)F_1}{F_{n+2}-F_1}\to A,\qquad n\to\infty.$$

所以 $d=A$. 此外, 我们可以证明 $d_n/F_n^{(0)}\uparrow A$, 这蕴含 $\hat d:=\sup_{n\ge 0}(d_n/F_n^{(0)})=A=d$. 因此,

$$\begin{aligned}\sup_{k\ge 0}\sum_{n=0}^{k}(F_n^{(0)}d-d_n)&=\sup_{k\ge 0}\sum_{n=0}^{k}(F_nA-F_{n+1}+F_1)\\&=\sup_{k\ge 0}\left((k+1)+\frac{(1+B^2)(1-(-B)^{k+1})}{\sqrt5(1+B)}\right)=\infty,\end{aligned}$$

这说明过程不是强遍历的. 注意到 $F_n\ge (A^{n+1}-1)/\sqrt5\ge A^n/\sqrt5\,(n\ge 1)$. 因此,

$$M\le\sup_{i>0}\frac{A(A^2-(-B/A)^iB^2-\sqrt5/A^i)}{A-1}\le A^2(A^2+B^4+\sqrt5B)=:C<\infty.$$

所以, 由定理8.1知, 过程是指数遍历的.

现在我们回到 0 的首中时的指数阶矩: $\mathbb{E}_i e^{\lambda\tau_0}$, 其中 λ是一正常数. 对所有的 $0\le j<i$, 定义 $q_i^{(j)}(\lambda):=q_i^{(j)}-\lambda$,

$$F_n^{(n)}(\lambda)=1,\qquad F_n^{(i)}(\lambda)=\frac{1}{q_{n,n+1}}\sum_{k=i}^{n-1}q_n^{(k)}(\lambda)F_k^{(i)}(\lambda),\quad 0\le i<n,$$

$$d_0(\lambda)=0, \qquad d_n(\lambda)=\frac{1}{q_{n,n+1}}\left(1+\sum_{k=0}^{n-1} q_n^{(k)}(\lambda)d_k(\lambda)\right), \quad n\ge 1.$$

令

$$d(\lambda)=\sup_{i\ge 1}\frac{\sum_{j=0}^{i-1} d_j(\lambda)}{\sum_{j=0}^{i-1} F_j^{(0)}(\lambda)}=\sup_{i\ge 0}\frac{\sum_{j=0}^{i} d_j(\lambda)}{\sum_{j=0}^{i} F_j^{(0)}(\lambda)}. \tag{8.7}$$

类似于(2.4), (4.3)和(6.3), 可归纳验证下式总成立:

$$F_i^{(j)}(\lambda)=\sum_{k=j+1}^{i}\frac{F_i^{(k)}(\lambda)q_k^{(j)}(\lambda)}{q_{k,k+1}}, \quad i>j\ge 0; \qquad d_i(\lambda)=\sum_{k=1}^{i}\frac{F_i^{(k)}(\lambda)}{q_{k,k+1}}, \quad i\ge 1. \tag{8.8}$$

定理8.2. 假定存在充分小的 $\lambda>0$ 使得 $\sum_{j=0}^{i-1}F_j^{(0)}(\lambda)>0$ 对一切 $i\ge 1$ 成立. 则下列关于 0 的首中时的指数阶矩的表达式成立:

$$\mathbb{E}_1 e^{\lambda\tau_0}=1+\lambda d(\lambda), \qquad \mathbb{E}_i e^{\lambda\tau_0}=1+\lambda\sum_{j=0}^{i-1}(F_j^{(0)}(\lambda)d(\lambda)-d_j(\lambda)), \quad i\ge 1. \tag{8.9}$$

$$\mathbb{E}_0 e^{\lambda\sigma_0}=\frac{q_{01}}{q_{01}-\lambda}\mathbb{E}_1 e^{\lambda\sigma_0}=\frac{q_{01}}{q_{01}-\lambda}\mathbb{E}_1 e^{\lambda\tau_0}=\frac{q_{01}}{q_{01}-\lambda}(1+\lambda d(\lambda)). \tag{8.10}$$

证明: 将 $\mathbb{E}_i e^{\lambda\tau_0}$ 记为 v_i. 则 (v_i) 是下列方程的不小于 1 的最小解:

$$x_0=1, \qquad \sum_{k\ne i} q_{ik}(x_k-x_i)\le -\lambda x_i, \quad i\ge 1. \tag{8.11}$$

事实上, (v_i) 满足等式(8.11), 变形之, 得到

$$x_0=1, \qquad q_{i,i+1}(x_{i+1}-x_i)=\sum_{k=0}^{i-1} q_{ik}(x_i-x_k)-\lambda x_i, \quad i\ge 1.$$

进而,

$$\begin{aligned}
x_{i+1}-x_i &= \frac{1}{q_{i,i+1}}\left(\sum_{j=0}^{i-1} q_i^{(j)}(x_{j+1}-x_j)-\lambda x_i\right)\\
&= \frac{1}{q_{i,i+1}}\left(\sum_{j=0}^{i-1} (q_i^{(j)}-\lambda)(x_{j+1}-x_j)-\lambda\right)\\
&= \frac{1}{q_{i,i+1}}\left(\sum_{j=0}^{i-1} q_i^{(j)}(\lambda)(x_{j+1}-x_j)-\lambda\right),
\end{aligned} \tag{8.12}$$

一方面, 由(8.8)和(8.8), 可证

$$\begin{aligned}
x_{i+1}-x_i &= \sum_{k=1}^{i}\frac{F_i^{(k)}(\lambda)q_k^{(0)}(\lambda)}{q_{k,k+1}}\cdot(x_1-x_0)-\lambda\sum_{k=1}^{i}\frac{F_i^{(k)}(\lambda)}{q_{k,k+1}}\\
&= F_i^{(0)}(\lambda)(x_1-1)-\lambda d_i(\lambda), \qquad i\ge 1.
\end{aligned} \tag{8.13}$$

注意到(8.13)对所有 $i\ge 0$ 都成立. 因此,

$$x_i-1=\sum_{j=0}^{i-1}F_j^{(0)}(\lambda)(x_1-1)-\lambda\sum_{j=0}^{i-1}d_j(\lambda) \qquad i\ge 1. \tag{8.14}$$

因为 (v_i) 是(8.11)的解, 则由定理的假设和(8.14)知 $1+\lambda d(\lambda)\le v_1$.

另一方面, 令 $u_0=1$, $u_1=1+\lambda d(\lambda)$ 且 $u_i=1+\lambda\sum_{j=0}^{i-1}(F_j^{(0)}(\lambda)d(\lambda)-d_j(\lambda))\,(i\ge 2)$. 则可验证 (u_i) 是方程(8.11)的不小于 1 的解. 由 (v_i) 的最小性, 推出 $v_1\le 1+\lambda d(\lambda)$.

综合以上, 得出 $v_1 = 1 + \lambda d(\lambda)$. 进而, 所构造的解 (u_i) 正是 (v_i), 即 $\mathbb{E}_i \mathrm{e}^{\lambda\tau_0}$ 的表达式是(8.9). 容易验证(8.10). □

推论8.1. 在定理8.2的假定之下, 则单生过程指数遍历当且仅当 $d(\lambda) < \infty$, 其中 $0 < \lambda < q_i \, (i \geq 0)$.

证明: 结合定理6.1和定理8.2, 结论立刻得证. □

例8.2. 令单生 Q 矩阵为: $q_{i,i+1} =: \beta_i > 0 \, (i \geq 0)$, $q_{i0} = \alpha_i > 0 \, (i \geq 1)$, 而且 $q_{ij} = 0 \, (i \neq j)$. 显然, 该 Q 矩阵不可约. 假定 Q 矩阵正则. 经计算, 此时对于一切 $\lambda > 0$ 和 $i \geq 1$, $\sum_{j=0}^{i-1} F_j^{(0)}(\lambda) > 0$. 由推论8.1知, 该单生过程指数遍历当且仅当对于任取的 $\lambda \in (0, \inf_i q_i)$,

$$d(\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_i} \prod_{j=1}^{i} \frac{\beta_j}{q_k - \lambda} < \infty$$

现在回到例4.1. 记 $c := \inf_{k \geq 1} q_{k0} > 0$, 取 $\lambda \in (0, c)$. 则对一切 $0 \leq j < i$ 有 $q_i^{(j)}(\lambda) > 0$; 继而, 对所有 $i \geq 0$ 有 $F_i^{(0)}(\lambda) > 0$. 因此, 定理8.2的假定成立且 $0 < \lambda < q_i \, (i \geq 0)$. 由合分比性质及(8.7)和(8.8), 得到

$$d(\lambda) \leq \sup_{i \geq 1} \frac{d_i(\lambda)}{F_i^{(0)}(\lambda)} \leq \sup_{k \geq 1} \frac{1}{q_k^{(0)}(\lambda)} = \frac{1}{c - \lambda} < \infty.$$

由推论8.1知, 此单生过程是指数遍历的. 事实上, 此单生过程是强遍历的. 因为我们有下面的结论.

命题8.1. 给定正则不可约的 Q 矩阵$Q = (q_{ij})$. 若存在 $k \geq 0$ 满足 $c := \inf_{i \neq k} q_{ik} > 0$, 则相应的 Q 过程是强遍历的, 而且 $\mathbb{E}_i \tau_k \leq 1/c \, (i \neq k)$, $\mathbb{E}_k \sigma_k \leq 1/q_k + 1/c$.

证明 令 $y_k = 0$ 和 $y_i = 1/c \, (i \neq k)$. 可验证 (y_i) 是下列方程的一个非负有界解:

$$\sum_j q_{ij} y_j \leq -1, \qquad i \neq k.$$

因此, 由引理5.1知, 该过程是强遍历的. 由 $(\mathbb{E}_i \tau_k)$ 是以上方程的最小非负解知, 第二个结论成立. 再由此不难得到最后一个结论. □

9 一类单生过程

定理9.1. 给定正则不可约单生 Q 矩阵 (q_{ij}) 满足

$$q_{i+1,j} = p_i q_{ij}, \qquad 0 \leq j \leq i - 1, \tag{9.1}$$

其中 $0 \leq p_i \leq 1 \, (i \geq 1)$. 约定 $p_0 = 0$.假定相应的单生过程常返. 则下列结论成立.

(1) 过程是 ℓ 遍历的当且仅当级数 $\sum_{k=1}^{\infty} (m_k^{(\ell-1)} - p_{k-1} m_{k-1}^{(\ell-1)}) / (q_{k,k+1} F_k^{(0)})$ 收敛. 特别地, 过程遍历的充分必要条件是 $d = \sum_{i=1}^{\infty} (1 - p_{i-1}) / (q_{i,i+1} F_i^{(0)}) < \infty$.

(2) 若过程指数遍历, 则 $q := \inf_{i\geq 0} q_i > 0$ 且

$$\delta' := \sup_{i\geq 1} \sum_{j=0}^{i-1} F_j^{(0)} \sum_{j=i}^{\infty} \frac{1-p_{j-1}}{q_{j,j+1}F_j^{(0)}} < \infty. \tag{9.2}$$

其中 $F_0^{(0)} = 1$ 和 $F_i^{(0)} = \prod_{j=1}^{i}(q_{j,j-1} + p_{j-1}q_{j-1})/q_{j,j+1}\ (i \geq 1)$.

(3) 再假定 $\sup_{i\geq 1} p_i < 1$. 若 $q > 0$ 且 $\delta' < \infty$, 则过程指数遍历.

(4) 过程是强遍历的当且仅当

$$\sum_{i=0}^{\infty} F_i^{(0)} \sum_{j=i+1}^{\infty} \frac{1-p_{j-1}}{q_{j,j+1}F_j^{(0)}} < \infty.$$

证明: (1) 易知, 对所有的 $0 \leq j \leq i-2$, 有 $q_i^{(j)} = p_{i-1}q_{i-1}^{(j)}$. 由定义得到

$$F_0^{(0)} = 1, \qquad F_i^{(0)} = \frac{q_{i,i-1} + p_{i-1}q_{i-1}}{q_{i,i+1}} F_{i-1}^{(0)}, \qquad i \geq 1;$$

$$d_0^{(n)} = 0, \qquad d_i^{(n)} = \frac{m_i^{(n-1)} - p_{i-1}m_{i-1}^{(n-1)}}{q_{i,i+1}} + \frac{q_{i,i-1} + p_{i-1}q_{i-1}}{q_{i,i+1}} d_{i-1}^{(n)}, \qquad i \geq 1.$$

则由上式计算得到

$$F_i^{(0)} = \prod_{k=1}^{i} \frac{q_{k,k-1} + p_{k-1}q_{k-1}}{q_{k,k+1}}, \qquad i \geq 1. \tag{9.3}$$

用数学归纳法可以得到

$$d_i^{(n)} = F_i^{(0)} \sum_{k=1}^{i} \frac{m_k^{(n-1)} - p_{k-1}m_{k-1}^{(n-1)}}{q_{k,k+1}F_k^{(0)}}, \qquad i \geq 0. \tag{9.4}$$

所以, 我们推出

$$\sum_{j=0}^{i} d_j^{(n)} = \sum_{k=1}^{i} \frac{m_k^{(n-1)} - p_{k-1}m_{k-1}^{(n-1)}}{q_{k,k+1}F_k^{(0)}} \sum_{j=k}^{i} F_j^{(0)}, \qquad i \geq 0.$$

进而

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{j=0}^{i} d_j^{(n)}}{\sum_{j=0}^{i} F_j^{(0)}} &= \sum_{k=1}^{i} \frac{m_k^{(n-1)} - p_{k-1}m_{k-1}^{(n-1)}}{q_{k,k+1}F_k^{(0)}} \left(1 - \frac{\sum_{j=0}^{k-1} F_j^{(0)}}{\sum_{j=0}^{i} F_j^{(0)}}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m_k^{(n-1)} - p_{k-1}m_{k-1}^{(n-1)}}{q_{k,k+1}F_k^{(0)}} \left(1 - \frac{\sum_{j=0}^{k-1} F_j^{(0)}}{\sum_{j=0}^{i} F_j^{(0)}}\right) \mathbf{1}_{\{k\leq i\}}, \qquad i \geq 0.
\end{aligned}$$

在后面将归纳证明对于每个 $n \geq 1$, $m_i^{(n-1)}$ 关于 i 是单调增的, 因此

$$\frac{m_i^{(n-1)} - p_{i-1}m_{i-1}^{(n-1)}}{q_{i,i+1}F_i^{(0)}} \geq \frac{(1-p_{i-1})m_i^{(n-1)}}{q_{i,i+1}F_i^{(0)}} \geq 0, \qquad i \geq 1. \tag{9.5}$$

当 $i \to \infty$时, 由单调收敛定理, 我们推出

$$\frac{\sum_{j=0}^{i} d_j^{(n)}}{\sum_{j=0}^{i} F_j^{(0)}} \uparrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m_k^{(n-1)} - p_{k-1}m_{k-1}^{(n-1)}}{q_{k,k+1}F_k^{(0)}} = d^{(n)}. \tag{9.6}$$

注意到 1 遍历即遍历的事实, 则由定理7.1及以上知, 过程 ℓ 遍历当且仅当 $d^{(\ell)} < \infty$, 即(9.6)中右边的级数收敛. 结论(1)得证.

下面补证 $m_i^{(n-1)}$ 关于 i 的单调增性质. 显然结论对 $m_i^{(0)}$ 成立. 由[23], (9.4) 和(9.6)知,

$$m_i^{(1)} = \sum_{j=0}^{i-1} F_j^{(0)} \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{1-p_{k-1}}{q_{k,k+1}F_k^{(0)}}, \qquad i \geq 1.$$

因此 $m_i^{(1)}$是单调增的, 再一次用[23], (9.4)和(9.6)推出

$$m_i^{(2)} = 2\sum_{j=0}^{i-1} F_j^{(0)} \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{m_k^{(1)} - p_{k-1}m_{k-1}^{(1)}}{q_{k,k+1}F_k^{(0)}}, \qquad i \geq 1.$$

进而得到 $m_i^{(2)}$的单调增性质. 因此, 由归纳法不难得出,对于每个 $n \geq 1$, $m_i^{(n-1)}$ 是单调增的且

$$m_i^{(n)} = n\sum_{j=0}^{i-1} F_j^{(0)} \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{m_k^{(n-1)} - p_{k-1}m_{k-1}^{(n-1)}}{q_{k,k+1}F_k^{(0)}}, \qquad i \geq 1,\, n \geq 1. \tag{9.7}$$

(2) 由(9.5), (9.7)和 $m_i^{(n-1)}$ 单调增性质, 我们有

$$m_i^{(n)} \geq n\sum_{j=0}^{i-1} F_j^{(0)} \sum_{k=i}^{\infty} \frac{(1-p_{k-1})m_k^{(n-1)}}{q_{k,k+1}F_k^{(0)}} \geq n\left(\sum_{j=0}^{i-1} F_j^{(0)} \sum_{k=i}^{\infty} \frac{1-p_{k-1}}{q_{k,k+1}F_k^{(0)}}\right)m_i^{(n-1)}, \qquad n \geq 2.$$

同时, 注意到

$$m_i^{(1)} \geq \sum_{j=0}^{i-1} F_j^{(0)} \sum_{k=i}^{\infty} \frac{1-p_{k-1}}{q_{k,k+1}F_k^{(0)}}.$$

因此, 归纳得到

$$m_i^{(n)} \geq n!\left(\sum_{j=0}^{i-1} F_j^{(0)} \sum_{k=i}^{\infty} \frac{1-p_{k-1}}{q_{k,k+1}F_k^{(0)}}\right)^n, \qquad n \geq 1.$$

以下的证明参见[16]. 由过程指数遍历知存在 λ 满足 $0 < \lambda < q_i$ (对于一切 $i \geq 0$), 使得 $\mathbb{E}_i e^{\lambda\tau_0} < \infty\,(i \geq 1)$. 再由其 Taylor 展开式及上式推出

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda\sum_{j=0}^{i-1} F_j^{(0)} \sum_{k=i}^{\infty} \frac{1-p_{k-1}}{q_{k,k+1}F_k^{(0)}}\right)^n < \infty,$$

因此, 我们有

$$\sum_{j=0}^{i-1} F_j^{(0)} \sum_{k=i}^{\infty} \frac{1-p_{k-1}}{q_{k,k+1}F_k^{(0)}} < \lambda^{-1}, \qquad i \geq 1.$$

再关于 i 取上确界得 $\delta' \leq \lambda^{-1} < \infty$. 结论(2)得证.

(3) 结论(3)的证明同定理8.1. 只是修改两个算子

$$I\!I_i(f) = \frac{1}{f_i}\sum_{j=0}^{i-1} F_j^{(0)} \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{(1-p_{k-1})f_k}{q_{k,k+1}F_k^{(0)}}, \qquad i \geq 1,$$

和

$$I_i(f) = \frac{F_i^{(0)}}{f_{i+1}-f_i}\sum_{k=i+1}^{\infty} \frac{(1-p_{k-1})f_k}{q_{k,k+1}F_k^{(0)}}, \qquad i \geq 1.$$

注意要求

$$0 < \lambda < \left(\frac{c-1}{c}\,I\!I_1(f)^{-1}\right)\bigwedge\left(\inf_{i\geq 2}(1-p_{i-1})I\!I_i(f)^{-1}\right)\bigwedge q.$$

因此, 是需要 $\sup_{i\geq 2}(1-p_{i-1})^{-1}I\!I_i(f) < \infty$.

(4) 由[22]知, 过程强遍历当且仅当 $\sup_{i\geq 0}\sum_{j=0}^{i}(dF_j^{(0)} - d_j) < \infty$. 再由(9.4)和(9.6)即得证结论(4).

注9.1. (1) 实际上, 由定理9.1的证明可以知道, 条件(9.2)即为

$$\delta' = \sup_{i\geq 0}\sum_{j=0}^{i} F_j^{(0)}\left(d - \frac{d_i}{F_i^{(0)}}\right) < \infty. \tag{9.8}$$

这正是[16, 注2.3]所猜想的单生过程指数遍历的判别条件. 故在 $0 \le p_i \le c < 1\,(i \ge 1)$ 的情形, 我们证明了该猜想. 特别地, 对于 $p_i = 0\,(i \ge 1)$ 的情形, 即是生灭过程, 此时, (9.2)即为

$$M := \sup_{i \ge 0} \sum_{j=0}^{i} F_j^{(0)} \sum_{j=i}^{\infty} \frac{1}{q_{j,j+1} F_j^{(0)}} < \infty. \tag{9.9}$$

故比较(9.2)与(9.9), 可以看出 $\delta' \le M$. 因此, 我们有理由相信通常(9.8)中的 $\delta' \le M$, 且(9.8)是单生过程指数遍历的判别条件.

(2) 注意, Q 矩阵不可约和(9.1)的假定蕴含 $q_{10} > 0$. 否则, 若 $q_{10} = 0$, 由(9.1)的假定推出 $q_{i0} = 0\,(i \ge 1)$, 这与不可约矛盾.

参考文献

[1] Anderson, W. J.(1991), Continuous-Time Markov Chains, Springer-Verlag, New York.

[2] Brockwell, P. J.(1985), The extinction time of a birth, death and catastrophe process and of a related diffusion model, Adv. Appl. Prob. **17**, 42-52.

[3] Brockwell, P. J.(1986), The extinction time of a general birth and death process with catastrophes, J. Appl. Prob. **23**, 851-858.

[4] Cairns, B. and Pollett, P. K.(2004), Extinction times for a general birth, death and catastrophe process, J. Appl. Prob., **41**(4), 1211-1218.

[5] Chen, M.-F.(1999), Single birth processes, Chin. Ann. Math., **20B**, 77-82.

[6] Chen, M.-F.(2000), Explicit bounds of the first eigenvalue, Sci. in China, Ser. A, **43**(10), 1051-1059.

[7] Chen, M.-F.(2001), Explicit criteria for several types of ergodicity, Chinese J. Appl. Prob. Stat., **17**(2), 1-8.

[8] Chen, M.-F.(2004), From Markov Chains to Non-Equilibrium Particle Systems, Second Edition, World Scientific, Singapore.

[9] Chen, M.-F.(2004), Eigenvalues, Inequalities, and Ergodic Theory, Springer, Berlin.

[10] 陈木法, 毛永华(2007), 随机过程导论, 高等教育出版社, 北京.

[11] Coolen-Schrijner, P. and van Doorn, E.A.(2002), The deviation matrix of the continuous-time Markov chains, Probab. Engrg. Inform. Sci., **16**, 351-366.

[12] Kemeny, J.G., Snell, J.L. and Knapp, A.W.(1976), Denumerable Markov chains, Springer-Verlag, New York.

[13] Ma, Y.-T.(2007), Lipschitz norm for Q-matrix of single birth processes, preprint.

[14] Mao, Y.-H.(2003), Algebraic convergent for discrete-time ergodic Markov chains, Sci. in China, Ser. A, **46**, 621-630.

[15] Mao, Y.-H.(2004), Ergodic degrees for continuous-time Markov chains, Sci. in China, Ser. A, **47**, 161–174.

[16] Mao, Y.-H. and Zhang, Y.-H.(2004), Exponential ergodicity for single birth processes, J. Appl. Prob., **41**(4), 1022-1032.

[17] Pakes, A. G.(1986), The Markov branching-catastrophe process, Stochastic Proc. Appl. **23**, 1-33.

[18] 吴群英, 张汉君(2003), 广义生灭过程, 系统科学与数学, **23**(4), 517-528.

[19] 吴群英(2004), 广义生灭过程, 科学出版社, 北京.

[20] Yan, S.-J. and Chen, M.-F.(1986), Multidimensional Q-processes, Chinese Ann. Math., **7(B)**(1), 90-110.

[21] Zhang, J.-K.(1984), On the generalized birth and death processes (I), Acta Math. Sci., **4**(6), 241-259.

[22] Zhang, Y.-H.(2001), Strong ergodicity for single-birth processes, J. Appl. Prob., **38**(1), 270-277.

[23] 张余辉(2003), 单生过程首中时的各阶矩, 北京师范大学学报(自然科学版), **39**(4), 430-434.

[24] 张余辉(2004), 单生过程击中时与平稳分布, 北京师范大学学报(自然科学版), **40**(2), 157-161.

[25] 张余辉, 赵倩倩(2006), 几类单生 Q 矩阵(I), 北京师范大学学报(自然科学版), 2006, **42**, 111-113.

[26] 张余辉, 赵倩倩(2007), 几类单生 Q 矩阵(II), 北京师范大学学报(自然科学版), 预印本.

[27] 张余辉, 赵倩倩(2007), 带移民的单生过程, 预印本.