概率论习题解答

李勇　张余辉

June 11, 2018

1　第五章　大数定律和中心极限定理

§5.1.3 练习题

练习5.1.1 试证明例 5.1.1 解答中定义的随机变量 $\xi_n \xrightarrow{L_r} 0$.

证明: 显然

$$\mathbb{E}(|\xi_m - 0|^r) = \mathbb{E}(\xi_m) = \frac{1}{2^{n-1}}, \qquad 2^{n-1} \leqslant m < 2^n,$$

所以 $\lim\limits_{m\to\infty} \mathbb{E}(|\xi_m - 0|^r) = 0$, 即 $\xi_m \xrightarrow{L_r} 0$. □

练习5.1.2 若 $\{G_n\}$ 为实函数序列, 试证明 $G_n \xrightarrow{w} G$ 的充要条件是 对于 $\{G_n\}$ 的任何子列 $\{G_{n_k}\}$, 都存在 $\{G_{n_k}\}$ 的弱收敛于 G 的子列.

证明: 必要性显然, 只证明充分性.

用 C_G 表示 G 的所有连续点全体, 仅需证明

$$\lim_{n\to\infty} G_n(x) = G(x), \qquad x \in C_G.$$

事实上, 对任何 $x \in C_G$, $\{G_n(x)\}$ 为数列. 而对于该数列的任何子列 $\{G_{n_k}(x)\}$, 都存在其收敛于 $G(x)$ 的子列, 因此 $\{G_n(x)\}$ 收敛于 $G(x)$. □

练习5.1.3 若 $\xi_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \xi$, 且 $\xi_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \eta$, 试证明 $\xi = \eta$ a.e..

证明: 由概率的单调性和次可加性得

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(|\xi - \eta| \geqslant \frac{1}{n}\right) &\leqslant \mathbb{P}\left(\left\{|\xi_n - \xi| \geqslant \frac{1}{2n}\right\} \bigcup \left\{|\xi_n - \eta| \geqslant \frac{1}{2n}\right\}\right) \\ &\leqslant \mathbb{P}\left(|\xi_n - \xi| \geqslant \frac{1}{2n}\right) + \mathbb{P}\left(|\xi_n - \eta| \geqslant \frac{1}{2n}\right).\end{aligned}$$

由概率的下连续性和依概率收敛的定义, 知

$$\mathbb{P}(\xi \neq \eta) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|\xi - \eta| \geqslant \frac{1}{n}\right) = 0.$$

□

练习5.1.4 设 $\xi_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \xi$, $\eta_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \eta$, 试证明 $\xi_n + \eta_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \xi + \eta$, $\xi_n\eta_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \xi\eta$.

证明: 对于任意 $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|(\xi_n+\eta_n)-(\xi+\eta)|\geqslant\varepsilon) &\leqslant \mathbb{P}\left(\left\{|\xi_n-\xi|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right\}\bigcup\left\{|\eta_n-\eta|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right)\\ &\leqslant \mathbb{P}\left(|\xi_n-\xi|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right)+\mathbb{P}\left(|\eta_n-\eta|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right)\xrightarrow{n\to\infty}0.\end{aligned}$$

即 $\xi_n+\eta_n\xrightarrow{\mathbb{P}}\xi+\eta$.

进一步,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|\xi_n\eta_n-\xi\eta|\geqslant\varepsilon) &= \mathbb{P}(|\xi_n\eta_n-\xi_n\eta+\xi_n\eta-\xi\eta|\geqslant\varepsilon)\\ &\leqslant +\mathbb{P}\left(|\xi_n|\cdot|\eta_n-\eta|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right)+\mathbb{P}\left(|\eta|\cdot|\xi_n-\xi|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right),\end{aligned}$$

所以仅需证明

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(|\xi_n|\cdot|\eta_n-\eta|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right)=0, \tag{1.1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(|\eta|\cdot|\xi_n-\xi|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right)=0, \tag{1.2}$$

事实上, 对于任何实数 $m>0$, 有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(|\eta|\cdot|\xi_n-\xi|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right) &= \mathbb{P}\left(|\eta|\cdot|\xi_n-\xi|\geqslant\frac{\varepsilon}{2},|\eta|\leqslant m\right)+\mathbb{P}\left(|\eta|\cdot|\xi_n-\xi|\geqslant\frac{\varepsilon}{2},|\eta|>m\right)\\ &\leqslant \mathbb{P}\left(|\xi_n-\xi|\geqslant\frac{\varepsilon}{2m}\right)+\mathbb{P}(|\eta|>m),\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$ 后, 再令 $m\to\infty$, 有(1.2)式成立.

下仅需证明(1.1). 由概率的有限可加性及单调性得

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(|\xi_n|\cdot|\eta_n-\eta|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right) &= \mathbb{P}\left(|\xi_n|\cdot|\eta_n-\eta|\geqslant\frac{\varepsilon}{2},|\xi_n-\xi|\geqslant1\right)+\mathbb{P}\left(|\xi_n|\cdot|\eta_n-\eta|\geqslant\frac{\varepsilon}{2},|\xi_n-\xi|<1\right)\\ &\leqslant \mathbb{P}(|\xi_n-\xi|\geqslant1)+\mathbb{P}\left((|\xi|+1)|\eta_n-\eta|\geqslant\frac{\varepsilon}{2},|\xi_n-\xi|<1\right)\\ &\leqslant \mathbb{P}(|\xi_n-\xi|\geqslant1)+\mathbb{P}\left((|\xi|+1)|\eta_n-\eta|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right)\\ &= \mathbb{P}(|\xi_n-\xi|\geqslant1)+\mathbb{P}\left((|\xi|+1)|\eta_n-\eta|\geqslant\frac{\varepsilon}{2},|\xi|\leqslant m\right)\\ &\quad+\mathbb{P}\left((|\xi|+1)|\eta_n-\eta|\geqslant\frac{\varepsilon}{2},|\xi|>m\right)\\ &\leqslant \mathbb{P}(|\xi_n-\xi|\geqslant1)+\mathbb{P}\left(|\eta_n-\eta|\geqslant\frac{\varepsilon}{2(m+1)}\right)+\mathbb{P}(|\xi|>m).\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$后, 再令 $m\to\infty$, 有(1.1)成立. □

练习5.1.5 设 $\{\xi_n\}$ 为非负随机变量的单调下降序列, 且 $\xi_n\xrightarrow{\mathbb{P}}0$, 试证明 $\xi_n\xrightarrow{\text{a.e.}}0$.

证明: 由 $\xi_n\xrightarrow{\mathbb{P}}0$, $\{\xi_n\}$ 的非负性和递减性得, 对于任意 $\varepsilon>0$,

$$0=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(|\xi_n|\geqslant\varepsilon)=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(\xi_n\geqslant\varepsilon)=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\bigcup_{m=n}^{\infty}\{\xi_m\geqslant\varepsilon\}\right),$$

即结论成立. □

练习5.1.6 设 $G_n \xrightarrow{w} G$, 且 G 为单增函数. 定义

$$F(x) \triangleq \lim_{y\downarrow x} G(y),$$

试证明 $F(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的右连续增函数, 且 $G_n \xrightarrow{w} F$.

证明: 若 $x < u$, 则

$$G(u) \geqslant G(y), \qquad y \in (x,u).$$

从而

$$G(u) \geqslant \lim_{y\downarrow x} G(y) = F(x). \tag{1.3}$$

特别当 $x_1 < x_2$ 时, 由(1.3)知

$$F(x_2) = \lim_{u\downarrow x_2} G(u) \geqslant F(x_1),$$

即 F 为单增函数. 进一步, 若 $u \geqslant x_n \downarrow x$, 由 F 的单调性和(1.3)知

$$F(x) \leqslant \lim_{n\to\infty} F(x_n) \leqslant G(u).$$

注意到

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x+), \qquad \lim_{u\downarrow x} G(u) = F(x),$$

由此知 F 为右连续函数.

由 F 的定义可以证明: F 与 G 有相同的连续点, 并且二者在这些点处的值相等, 因此 $G_n \xrightarrow{w} F$.

注意到, 此时对任意 $u \in C_G$, 由 F 的定义有 $G(u) = G(u+) = F(u)$. 一方面, 对任意 $x \in C_G$, 要证明 $x \in C_F$, 由于 F 为右连续函数, 只要证明 $F(x-) = F(x)$. 因此

$$F(x-) = \lim_{u\uparrow x} F(u) = \lim_{u\uparrow x, u\in C_G} F(u) = \lim_{u\uparrow x, u\in C_G} G(u) = G(x-) = G(x) = F(x).$$

进而, $x \in C_F$, 即 $C_G \subset C_F$. 另一方面, 对任意 $x \in C_F$,

$$G(x-) = \lim_{u\uparrow x} G(u) = \lim_{u\uparrow x, u\in C_G} G(u) = \lim_{u\uparrow x, u\in C_G} F(u) = F(x-) = F(x) = G(x+),$$

而由 G 为单增函数知, $G(x-) \leqslant G(x) \leqslant G(x+)$. 因此, $G(x) = G(x-) = G(x+) = F(x)$, 即 $x \in C_G$, 从而 $C_F \subset C_G$.

故 $C_G = C_F$, 且对任意 $u \in C_G$ 有 $G(u) = F(u)$. □

练习5.1.7 设 $\{\xi_n\}$ 为独立同分布随机变量序列, $\xi_1 \sim U(a, a+1)$. 记 $\eta_n = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \xi_i$, 试证明 $\eta_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a$.

证明: 显然 $\eta_n \geqslant a$ a.e., 所以对任意 $\varepsilon \in (0,1)$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|\eta_n - a| \geqslant \varepsilon) &= \mathbb{P}(\eta_n \geqslant a+\varepsilon) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n \{\xi_k \geqslant a+\varepsilon\}\right)\\ &= \left(\int_{a+\varepsilon}^{a+1} \mathrm{d}x\right)^n = (1-\varepsilon)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0.\end{aligned}$$

即 $\eta_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a$. □

练习5.1.8 设 $\xi_n \xrightarrow{w} \xi$, a 和 b 均为F_ξ的连续点, $h(x)$ 为有界连续函数, 试证明

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(h(\xi_n)\mathbb{1}_{(a,b]}(\xi_n)) = \mathbb{E}(h(\xi)\mathbb{1}_{(a,b]}(\xi)).$$

证明: 用 C_ξ 表示 F_ξ 的连续点全体, 则 $\overline{C_\xi} \cap [a,b]$ 至多有可数个实数. 对于任意 $\varepsilon > 0$, 由于 h 为区间 $[a,b]$ 上的一致连续函数. 所以存在 $x_k \in C_\xi \cap [a,b]\,(k=0,1,\cdots,m)$, 使得 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$, 并且

$$|\hat{h}(x) - h(x)| < \varepsilon, \qquad x \in (a,b],$$

其中

$$\hat{h}(x) = \sum_{k=1}^{m} h(x_{k-1})\mathbb{1}_{(x_{k-1},x_k]}(x).$$

因此

$$\begin{aligned}
&|\mathbb{E}(h(\xi_n)\mathbb{1}_{(a,b]}(\xi_n)) - \mathbb{E}(h(\xi)\mathbb{1}_{(a,b]}(\xi))| \\
&\quad \leqslant |\mathbb{E}(h(\xi_n)\mathbb{1}_{(a,b]}(\xi_n)) - \mathbb{E}(\hat{h}(\xi_n)\mathbb{1}_{(a,b]}(\xi_n))| + |\mathbb{E}(\hat{h}(\xi_n)\mathbb{1}_{(a,b]}(\xi_n)) - \mathbb{E}(\hat{h}(\xi)\mathbb{1}_{(a,b]}(\xi))| \\
&\qquad\qquad + |\mathbb{E}(\hat{h}(\xi)\mathbb{1}_{(a,b]}(\xi)) - \mathbb{E}(h(\xi)\mathbb{1}_{(a,b]}(\xi))| \\
&\quad \leqslant 2\varepsilon + |\mathbb{E}(\hat{h}(\xi_n)\mathbb{1}_{(a,b]}(\xi_n)) - \mathbb{E}(\hat{h}(\xi)\mathbb{1}_{(a,b]}(\xi))|.
\end{aligned}$$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性, 仅需证明

$$|\mathbb{E}(\hat{h}(\xi_n)\mathbb{1}_{(a,b]}(\xi_n)) - \mathbb{E}(\hat{h}(\xi)\mathbb{1}_{(a,b]}(\xi))| \xrightarrow{n\to\infty} 0. \tag{1.4}$$

事实上, 由 $\mathbb{1}_{(a,b]}(u) = \sum_{k=1}^{m} \mathbb{1}_{(x_{k-1},x_k]}(u)$ 可得

$$\hat{h}(\xi)\mathbb{1}_{(a,b]}(\xi) = \sum_{k=1}^{m} \hat{h}(\xi)\mathbb{1}_{(x_{k-1},x_k]}(\xi) = \sum_{k=1}^{m} h(x_{k-1})\mathbb{1}_{(x_{k-1},x_k]}(\xi),$$

$$\hat{h}(\xi_n)\mathbb{1}_{(a,b]}(\xi_n) = \sum_{k=1}^{m} \hat{h}(\xi_n)\mathbb{1}_{(x_{k-1},x_k]}(\xi_n) = \sum_{k=1}^{m} h(x_{k-1})\mathbb{1}_{(x_{k-1},x_k]}(\xi_n),$$

代入(1.4), 利用数学期望的线性性质得

$$\begin{aligned}
|\mathbb{E}(\hat{h}(\xi_n)\mathbb{1}_{(a,b]}(\xi_n)) - \mathbb{E}(\hat{h}(\xi)\mathbb{1}_{(a,b]}(\xi))| &\leqslant \sum_{k=1}^{m} |h(x_{k-1})\big(\mathbb{E}(\mathbb{1}_{(x_{k-1},x_k]}(\xi_n) - \mathbb{1}_{(x_{k-1},x_k]}(\xi))\big)| \\
&= \sum_{k=1}^{m} |h(x_{k-1})| \cdot |F_{\xi_n}(x_k) - F_\xi(x_k) + F_\xi(x_{k-1}) - F_{\xi_n}(x_{k-1})| \xrightarrow{n\to\infty} 0,
\end{aligned}$$

注意到 $x_0, x_1, \cdots, x_m \in C_\xi$, 以及 $\xi_n \xrightarrow{w} \xi$ 得(1.4). □

练习5.1.9 设正态分布随机变量序列 $\{\xi_n\}$ 弱收敛于ξ, 试证明 ξ 也服从正态分布.

证明: 设 ξ_n 的均值和方差分别为 a_n 和 σ_n^2. 则由 $\xi_n \xrightarrow{w} \xi$ 知

$$f_{\xi_n}(t) \triangleq \exp\left(ia_n t - \frac{t^2}{2}\sigma_n^2\right) \xrightarrow{n\to\infty} f_\xi(t).$$

所以

$$\ln|f_\xi(1)| = \lim_{n\to\infty} |f_{\xi_n}(1)| = -\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \sigma_n^2.$$

记 $\sigma^2 = -2\ln|f_\xi(1)|$, 得

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n^2 = \sigma^2.$$

进一步,

$$\ln\left(\frac{f_\xi(1)}{|f_\xi(1)|}\right) = \lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{f_{\xi_n}(1)}{|f_{\xi_n}(1)|}\right) = \lim_{n\to\infty} ia_n,$$

记 $a = -i\ln\left(\frac{f_\xi(1)}{|f_\xi(1)|}\right)$, 得

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

所以

$$f_\xi(t) = \lim_{n\to\infty} f_{\xi_n}(t) = \exp\left(iat - \frac{t^2}{2}\sigma^2\right)$$

为正态分布的特征函数, 即 $\xi \sim N(a,\sigma^2)$. □

练习5.1.10 设 $\xi_n \xrightarrow{w} \xi$, $\eta_n \xrightarrow{w} a$, a 为常数, 试证明 $\{\xi_n+\eta_n\}$ 弱收敛于 $\xi + a$.

证明: 今 $\eta_n \xrightarrow{w} a$, 由定理 5.1.5 知 $\eta_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a$. 所以对于任意 $\varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\Big(|\eta_n - a| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\Big) = 0.$$

用 C_ξ 表示 F_ξ 的连续点全体. 对于任意 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta \in \left(x-a-\varepsilon, x-a-\frac{\varepsilon}{2}\right)\cap C_\xi$, 有

$$\begin{aligned}
F_{\xi+a}(x-\varepsilon) &= \mathbb{P}(\xi \leqslant x-a-\varepsilon) \leqslant \mathbb{P}(\xi\leqslant\delta) = \lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(\xi_n\leqslant\delta)\\
&\leqslant \varliminf_{n\to\infty}\mathbb{P}\Big(\xi_n \leqslant x-a-\frac{\varepsilon}{2}\Big) = \varliminf_{n\to\infty}\mathbb{P}\Big(\xi_n + a + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant x, |\eta_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}\Big)\\
&\leqslant \varliminf_{n\to\infty}\mathbb{P}\Big(\xi_n+\eta_n \leqslant x, |\eta_n-a| < \frac{\varepsilon}{2}\Big) = \varliminf_{n\to\infty} F_{\xi_n+\eta_n}(x).
\end{aligned}$$

类似地, 取 $\gamma \in \left(x-a+\frac{\varepsilon}{2}, x-a+\varepsilon\right)\cap C_\xi$, 有

$$\begin{aligned}
\varlimsup_{n\to\infty} F_{\xi_n+\eta_n}(x) &= \varlimsup_{n\to\infty}\mathbb{P}\Big(\xi_n+\eta_n\leqslant x, |\eta_n-a| < \frac{\varepsilon}{2}\Big)\\
&\leqslant \varlimsup_{n\to\infty}\mathbb{P}\Big(\xi_n + a - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant x, |\eta_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}\Big)\\
&\leqslant \lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(\xi_n\leqslant\gamma) = F_\xi(\gamma) \leqslant F_{\xi+a}(x+\varepsilon).
\end{aligned}$$

从而对于任意 $\varepsilon > 0$, 有

$$F_{\xi+a}(x-\varepsilon) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} F_{\xi_n+\eta_n}(x) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} F_{\xi_n+\eta_n}(x) \leqslant F_{\xi+a}(x+\varepsilon).$$

因此结论成立, 即 $\{\xi_n+\eta_n\}$ 弱收敛于 $\xi+a$. □

练习5.1.11 设 $\{\xi_n\}$ 依分布收敛到 ξ, $\{\eta_n\}$ 依分布收敛到 0. 求证 $\{\xi_n\eta_n\}$ 依分布收敛到 0.

证明: 取正数 r 和 s 为 F_ξ 的连续点. 对于任何实数 $x<0$, 有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\xi_n\eta_n<x)&=\mathbb{P}(\xi_n\eta_n<x,\xi_n<0)+\mathbb{P}(\xi_n\eta_n<x,\xi_n>0)\\&=\mathbb{P}\Big(\eta_n>\frac{x}{\xi_n},\xi_n<0\Big)+\mathbb{P}\Big(\eta_n<\frac{x}{\xi_n},\xi_n>0\Big)\\&\leqslant\mathbb{P}\Big(\eta_n>\frac{x}{\xi_n},-r<\xi_n<0\Big)+\mathbb{P}(\xi_n\leqslant -r)+\mathbb{P}\Big(\eta_n<\frac{x}{\xi_n},0<\xi_n\leqslant s\Big)+\mathbb{P}(\xi_n>s)\\&\leqslant\mathbb{P}\Big(\eta_n>\frac{x}{-r}\Big)+\mathbb{P}(\xi_n\leqslant -r)+\mathbb{P}\Big(\eta_n\leqslant\frac{x}{s}\Big)+\mathbb{P}(\xi_n>s).\end{aligned}\tag{1.5}$$

由 $\eta_n\xrightarrow{w}0$ 知, 当 $n\to\infty$ 时,

$$\mathbb{P}\Big(\eta_n>\frac{x}{-r}\Big)=1-\mathbb{P}\Big(\eta_n\leqslant\frac{x}{-r}\Big)\to 0,\qquad \mathbb{P}\Big(\eta_n\leqslant\frac{x}{s}\Big)\to 0,$$

再由(1.5), r 和 s 为 F_ξ 的连续点, 知

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\mathbb{P}(\xi_n\eta_n<x)\leqslant\lim_{n\to\infty}(\mathbb{P}(\xi_n\leqslant -r)+\mathbb{P}(\xi_n>s))=F_\xi(-r)+1-F_\xi(s).$$

令 $r\to\infty, s\to\infty$, 得

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(\xi_n\eta_n<x)=0,\qquad x<0.$$

类似地, 对任何 $x>0$, 有

$$\mathbb{P}(\xi_n\eta_n>x)\leqslant\mathbb{P}\Big(\eta_n<\frac{x}{-r}\Big)+\mathbb{P}(\xi_n\leqslant -r)+\mathbb{P}\Big(\eta_n\geqslant\frac{x}{s}\Big)+\mathbb{P}(\xi_n>s),$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(\xi_n\eta_n>x)=0,\qquad x>0.$$

因此, $\xi_n\eta_n\xrightarrow[n\to\infty]{w}0$. □

练习5.1.12 设 $\{\xi_n\}$ 依分布收敛到 ξ, 数列 $a_n\to a$, $b_n\to b$. 求证 $\{a_n\xi_n+b_n\}$ 依分布收敛到 $a\xi+b$.

证明: 由 $\xi_n\xrightarrow{w}\xi$ 知, $\lim_{n\to\infty}f_{\xi_n}(t)=f_\xi(t)$. 所以

$$\lim_{n\to\infty}f_{a\xi_n+b}(t)=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{ibt}f_{\xi_n}(at)=\mathrm{e}^{ibt}f_\xi(at)=f_{a\xi+b}(t).$$

即 $a\xi_n+b\xrightarrow{w}a\xi+b$. 另一方面, 由练习 5.1.10 和练习 5.1.11 结论知

$$(a_n-a)\xi_n+b_n-b\xrightarrow{w}0.$$

再次利用练习 5.1.10 结论得

$$a_n\xi_n+b_n=(a_n-a)\xi_n+b_n-b+a\xi_n+b\xrightarrow{w}a\xi+b.$$

□

练习5.1.13 设 $\{\xi_n\}$ 依概率收敛到 ξ, 求证对于任意连续函数 g, 序列 $\{g(\xi_n)\}$ 依概率收敛到 $g(\xi)$. 再将上述“依概率”均改为“依分布”命题仍真.

证明: 由 $\xi_n\xrightarrow{\mathbb{P}}\xi$ 证 $g(\xi_n)\xrightarrow{\mathbb{P}}g(\xi)$.

对任意 $\varepsilon>0$，由概率的次可加性得

$$\mathbb{P}(|g(\xi_n)-g(\xi)|\geqslant\varepsilon)\leqslant\mathbb{P}(|\xi|>N)+\mathbb{P}(|\xi_n|>N)+\mathbb{P}(|g(\xi_n)-g(\xi)|\geqslant\varepsilon,|\xi_n|\leqslant N,|\xi|\leqslant N).$$

注意到 g 为 $[-N,N]$ 上的一致连续函数, 知: 存在 $\delta>0$, 使得当 $x_1,x_2\in[-N,N]$ 时, 有

$$|g(x_1)-g(x_2)|<\varepsilon,\qquad |x_1-x_2|<\delta.$$

所以

$$\{|g(\xi_n)-g(\xi)|\geqslant\varepsilon,|\xi_n|\leqslant N,|\xi|\leqslant N\}\subset\{|\xi_n-\xi|\geqslant\delta\},$$

因此

$$\mathbb{P}(|g(\xi_n)-g(\xi)|\geqslant\varepsilon,|\xi_n|\leqslant N,|\xi|\leqslant N)\leqslant\mathbb{P}(|\xi_n-\xi|\geqslant\delta)\xrightarrow{n\to\infty}0.$$

另一方面, 由 $\xi_n\xrightarrow{\mathbb{P}}\xi$ 知, $\xi_n\xrightarrow{w}\xi$. 取 N 使得 $\pm N$ 为分布函数 F_ξ 的连续点, 就有

$$\lim_{N\to\infty}\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(|\xi_n|>N)+\mathbb{P}(|\xi|>N)=0.$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(|g(\xi_n)-g(\xi)|\geqslant\varepsilon)=0.$$

设 $\xi_n\xrightarrow{w}\xi$, 往证 $g(\xi_n)\xrightarrow{w}g(\xi)$.

由 Helly 第二定理知

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{ig(\xi_n)t})\xrightarrow{n\to\infty}\mathbb{E}(\mathrm{e}^{ig(\xi)t}),\qquad t\in\mathbb{R}^1.$$

由连续性定理得 $g(\xi_n)\xrightarrow{w}g(\xi)$. □

练习5.1.14 设分布函数列 $\{F_n(x)\}$ 弱收敛到连续的分布函数 $F(x)$, 求证这种收敛对于 $x\in\mathbb{R}^1$ 是一致的.

证明: 对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 F 的连续点 $x_1<x_2<\cdots<x_s$, 使得

$$F(x_k)-F(x_{k-1})<\frac{\varepsilon}{4},\qquad 1\leqslant k\leqslant s+1,$$

其中 $x_0=-\infty,x_{s+1}=\infty$. 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}F_n(x_k)=F(x_k)$, 所以存在自然数 N, 使得

$$|F_n(x_k)-F(x_k)|<\frac{\varepsilon}{4},\qquad 1\leqslant k\leqslant s,n\geqslant N.$$

另一方面, 对于任何 $x\in\mathbb{R}^1$, 存在正整数 m, 使得 $x\in[x_{m-1},x_m)$, 进而有

$$\begin{aligned}|F_n(x)-F(x)|&\leqslant|F_n(x_{m-1})-F(x_m)|+|F_n(x_m)-F(x_{m-1})|\\&\leqslant|F_n(x_{m-1})-F(x_{m-1})|+|F(x_{m-1})-F(x_m)|+|F_n(x_m)-F(x_m)|\\&\qquad+|F(x_m)-F(x_{m-1})|\\&<\varepsilon,\qquad n\geqslant N,\end{aligned}$$

即 $\{F_n(x)\}$ 一致收敛于 $F(x)$. □

§5.2.5 练习题

练习5.2.1 设 $\{\xi_n\}$ 独立同分布, $\mathbb{E}(\xi_1)=a\in\mathbb{R}$, 试证明

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\bigg(n(a-\varepsilon)<\sum_{k=1}^{n}\xi_k<n(a+\varepsilon)\bigg)=1,\qquad \varepsilon>0.$$

证明: 由大数定律得

$$\mathbb{P}\bigg(n(a-\varepsilon)<\sum_{k=1}^{n}\xi_k<n(a+\varepsilon)\bigg)=\mathbb{P}\bigg(\bigg|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-a)\bigg|<\varepsilon\bigg)=1-\mathbb{P}\bigg(\bigg|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-a)\bigg|\geqslant\varepsilon\bigg)\xrightarrow{n\to\infty}1.$$

□

练习5.2.2 设 $\{\xi_n\}$ 独立同分布, $\mathbb{E}(\xi_1)=\mu\in(-\infty,\infty)$,

$$\eta_n=\alpha\xi_n+\beta\xi_{n+1}+\gamma,$$

其中 α, β 和 γ 均为实数, 求 $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\eta_k$ 的 a.e. 收敛极限.

解: 由强大数定律得

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\eta_k=\alpha\bigg(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\bigg)+\beta\bigg(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_{k+1}\bigg)+\gamma\xrightarrow{\text{a.e.}}(\alpha+\beta)\mu+\gamma.$$

□

练习5.2.3 参加集会的 n 个人将他们自己的帽子混放在一起, 会后每个人任选一顶戴上. 以 S_n 表示带对自己帽子的人的个数, 试证明

$$\frac{S_n-\mathbb{E}(S_n)}{n}\xrightarrow{\mathbb{P}}0.$$

证明: 定义

$$\xi_k=\begin{cases}1, & \text{第 } k \text{ 人戴对自己帽子;}\\ 0, & \text{否则.}\end{cases}$$

则 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k$, 因此

$$\mathbb{E}(S_n)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(\xi_k)=n\mathbb{E}(\xi_1)=1$$

和

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_n^2)&=\sum_{j,k=1}^{n}\mathbb{E}(\xi_j\xi_k)=\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}(\xi_j^2)+2\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}\mathbb{E}(\xi_j\xi_k)\\&=1+2\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}\mathbb{E}(\xi_1\xi_2)=1+2\binom{n}{2}\frac{1}{n(n-1)}=2.\end{aligned}$$

所以

$$\frac{1}{n^2}D(S_n)=\frac{1}{n^2}\xrightarrow{n\to\infty}0,$$

即 Markov条件成立. 因此 $\{\xi_n\}$ 满足大数定律, 从而结论成立. □

练习5.2.4 设 g 为有界 Borel 函数, $\{\xi_n\}$ 为独立随机变量序列, 试证明 $\{g(\xi_n)\}$ 满足强大数定律.

证明: 取正数 M 使得 $\sup_{x\in\mathbb{R}}|g(x)|\leqslant M$. 因此

$$D(g(\xi_n))\leqslant 4M^2,$$

且

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{D(g(\xi_k))}{k^2}\leqslant 4M^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}<\infty.$$

所以独立随机变量序列 $\{g(\xi_n)\}$ 满足强大数定律. □

练习5.2.5 设 $\{\xi_n\}$ 为同分布随机变量序列, 每个 ξ_n 有有限的方差, 且当 $|k-\ell|\geqslant 2$ 时 ξ_k 与 ξ_ℓ 相互独立. 试证明 $\{\xi_n\}$ 满足大数定律.

证明: 记 $D(\xi_1)=\sigma^2$，则

$$\frac{1}{n^2}D\bigg(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\bigg)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}r_{ij}\sqrt{D(\xi_i)D(\xi_j)}\leqslant\frac{\sigma^2}{n^2}\bigg(\sum_{i=1}^{n}|r_{ii}|+2\sum_{i=1}^{n-1}|r_{i,i+1}|\bigg)\leqslant\frac{3\sigma^2}{n}\xrightarrow{n\to\infty}0,$$

即 Markov条件 成立. 因此 $\{\xi_n\}$ 满足大数定律. □

练习5.2.6 设 $\{\xi_n\}$ 为独立随机变量序列, 每个 ξ_n 有有限的方差 σ_n^2, 且 $\sigma_n^2/n\to 0$, 试证明 $\{\xi_n\}$ 满足大数定律.

证明: 由独立性, 知

$$\frac{1}{n^2}D\bigg(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\bigg)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}D(\xi_k)\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sigma_k^2}{k}\xrightarrow{n\to\infty}0,$$

即 Markov条件成立, 所以 $\{\xi_n\}$ 满足大数定律. □

练习5.2.7 设 $\{\xi_n\}$ 为独立随机变量序列, 试证明

$$\xi_n\xrightarrow{\text{a.e.}}0\Longleftrightarrow\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}\big(|\xi_k|\geqslant\varepsilon\big)<\infty\quad\text{对所有的}\quad\varepsilon>0.$$

证明: 由 Borel-Cantelli 引理, 对于任意 $\varepsilon>0$, 有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(|\xi_k|\geqslant\varepsilon)<\infty\Longleftrightarrow\mathbb{P}\Big(\varlimsup_{n\to\infty}\{|\xi_n|\geqslant\varepsilon\}\Big)=0\Longleftrightarrow\mathbb{P}\bigg(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}\{|\xi_n|\geqslant\varepsilon\}\bigg)=0$$

$$\Longleftrightarrow\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\bigg(\bigcup_{m=n}^{\infty}\{|\xi_n|\geqslant\varepsilon\}\bigg)=0\Longleftrightarrow\xi_n\xrightarrow{a.s.}0.$$

□

练习5.2.8 设 $\{\xi_n\}$ 为独立同分布随机变量序列, 且有有限的方差 $D(\xi_n)=\sigma^2$, 试证明样本方差

$$S_n^2=\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-\bar{\xi})^2\xrightarrow{\text{a.e.}}\sigma^2,$$

其中 $\bar{\xi}=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k$.

证明: 因为 $S_n^2=\frac{n}{n-1}\Big(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k^2-(\bar{\xi})^2\Big)$, 且独立同分布随机变量列 $\{\xi_n^2\}$ 和 $\{\xi_n\}$ 都满足强大数定律, 所以

$$\lim_{n\to\infty}S_n^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)^2=\mathbb{E}(\xi_1^2)-(\mathbb{E}(\xi_1))^2=\sigma^2\text{ a.e.}.$$

□

练习5.2.9 若非负连续函数 f 和 g 满足条件

$$0<f(x)\leqslant cg(x),\qquad x\in[0,1],$$

其中 $c>0$ 为常数. 试用大数定律证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\cdots\int_0^1\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{g(x_1)+\cdots+g(x_n)}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=\frac{\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x}.$$

证明: 取独立同分布随机变量序列 $\{\xi_n\}$, 使得 $\xi_1\sim U(0,1)$. 注意到

$$\mathbb{E}(f(\xi_n))=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x,\qquad \mathbb{E}(g(\xi_n))=\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x,$$

利用强大数定律得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(\xi_1)+\cdots+f(\xi_n)}{g(\xi_1)+\cdots+g(\xi_n)}=\frac{\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x}\qquad \text{a.e..}$$

注意到 $\left|\frac{f(\xi_1)+\cdots+f(\xi_n)}{g(\xi_1)+\cdots+g(\xi_n)}\right|\leqslant c$, 利用控制收敛定理得

$$\int_0^1\cdots\int_0^1\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{g(x_1)+\cdots+g(x_n)}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=\mathbb{E}\left(\frac{f(\xi_1)+\cdots+f(\xi_n)}{g(\xi_1)+\cdots+g(\xi_n)}\right)\xrightarrow{n\to\infty}\frac{\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x}.$$

□

§5.3.5 练习题

练习5.3.1 某人寿保险公司售出人寿保险 10000 份, 每份收保金 12 元, 并给定在保期内死亡者可得到 1000 元的赔付金. 如果每个持保单者在保险期内死亡的概率 $p = 0.006$, 求保险公司

(1) 亏本;

(2) 盈利达 40000 元以上;

(3) 盈利达 60000 元以上;

(4) 盈利达 80000 元以上的概率.

解: 用 ξ 表示持保单者在保期内死亡的人数, 则 $\xi \sim B(10000, 0.006)$. 保险公司的赔付金额为 1000ξ.

(1) 由中心极限定理, 亏本的概率为

$$\mathbb{P}(1000\xi > 120000) = 1 - \mathbb{P}(\xi \leqslant 120) \approx 1 - \Phi\left(\frac{120 - 10000 \times 0.006}{\sqrt{10000 \times 0.006 \times (1 - 0.006)}}\right) \approx 0.$$

(2) 类似地, 盈利达 40000 元以上的概率为

$$\mathbb{P}(120000 - 1000\xi \geqslant 40000) = \mathbb{P}(\xi \leqslant 80) \approx \Phi\left(\frac{80 - 60}{100\sqrt{0.006 \times 0.994}}\right) \approx 0.9952.$$

(3) 盈利达 60000 元以上的概率为

$$\mathbb{P}(120000 - 1000\xi \geqslant 60000) = \mathbb{P}(\xi \leqslant 60) \approx \Phi(0) = 0.5.$$

(4) 盈利达 80000 元以上的概率为

$$\mathbb{P}(120000 - 1000\xi \geqslant 80000) = \mathbb{P}(\xi \leqslant 40) \approx \Phi\left(\frac{40 - 60}{100\sqrt{0.006 \times 0.994}}\right) \approx 0.0048016.$$

□

练习5.3.2 某同学平均每天学习 8 小时, 标准差为 2 小时, 求 365 天内他学习时间超过 3200 小时的概率.

解: 用 ξ_n 表示该同学第 n 天学习小时数, 则 365 天总学习时间 $\xi = \sum\limits_{n=1}^{365} \xi_n$, 且 $\mathbb{E}t(\xi_1) = 8$, $D(\xi_1) = 4$. 由中心极限定理, 总学习时间超过 3200 小时的概率

$$\mathbb{P}(\xi > 3200) = \mathbb{P}\left(\frac{\xi - 8 \times 365}{\sqrt{365 \times 4}} > \frac{3200 - 8 \times 365}{\sqrt{365 \times 4}}\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{3200 - 8 \times 365}{\sqrt{365 \times 4}}\right) \approx 0.$$

□

练习5.3.3 设 $\{\xi_n\}$ 独立同分布, $D(\xi_1) = \sigma^2 \in (0, \infty)$, 试证明

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k \leqslant n\mathbb{E}(\xi_1) + 1\right) = \frac{1}{2}.$$

证明: 显然

$$\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k \leqslant n\mathbb{E}(\xi_1) + 1\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - \mathbb{E}(\xi_1))}{\sqrt{n}\sigma} - \frac{1}{\sqrt{n}\sigma} \leqslant 0\right).$$

根据中心极限定理, 并注意到 $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n}\sigma} = 0$, 可得

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - \mathbb{E}(\xi_1))}{\sqrt{n}\sigma} - \frac{1}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow{w} \xi \sim N(0, 1).$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\bigg(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\leqslant n\mathbb{E}(\xi_1)+1\bigg)=\mathbb{P}(\xi\leqslant 0)=\frac{1}{2}.$$

□

练习5.3.4 试用中心极限定理证明:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}\mathrm{e}^{-n}=\frac{1}{2}.$$

证明: 取独立同分布随机变量列 $\{\xi_n\}$, 使得 $\xi_1\sim P(1)$. 令

$$\eta_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k,$$

由 Poisson 分布关于参数的再生性知 $\eta_n\sim P(n)$, 从而

$$\mathrm{e}^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}=\mathbb{P}(\eta_n\leqslant n)=\mathbb{P}\bigg(\frac{\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-\mathbb{E}(\xi_k))}{\sqrt{D(\sum_{k=1}^{n}\xi_k)}}\leqslant 0\bigg).$$

注意到 $\{\xi_n\}$ 满足中心极限定理, 可得

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}=\Phi(0)=\frac{1}{2}.$$

□

练习5.3.5 设

$$\eta=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k}{10^k}\sim U(0,1),$$

其中 $\xi_k\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. 试证明

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\bigg(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\leqslant\frac{9n}{2}\bigg)=\frac{1}{2}.$$

证明: 对于任何正整数 n, 任何 0 到 9 之间的整数 k_j, $1\leqslant j\leqslant n$, 记 $A_n(k_1,k_2,\cdots,k_n)\triangleq\{\xi_1=k_1,\xi_2=k_2,\cdots,\xi_n=k_n\}$, 则 $\{A_n(k_1,k_2,\cdots,k_n)\}$ 互不相容, 且

$$\mathbb{P}(A_n(k_1,k_2,\cdots,k_n))=\mathbb{P}(0.k_1k_2\cdots k_n<\eta\leqslant 0.k_1k_2\cdots k_n+10^{-n})=\frac{1}{10^n}.$$

从而对于任何自然数 n, 有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\xi_n=k_n)&=\mathbb{P}\bigg(\bigcup_{0\leqslant k_1,k_2,\cdots,k_{n-1}\leqslant 9}A_n(k_1,k_2,\cdots,k_n)\bigg)\\&=\sum_{0\leqslant k_1,k_2,\cdots,k_{n-1}\leqslant 9}\mathbb{P}(A_n(k_1,k_2,\cdots,k_n))\\&=\sum_{0\leqslant k_1,k_2,\cdots,k_{n-1}\leqslant 9}\frac{1}{10^n}\\&=\frac{1}{10}.\end{aligned}$$

即 ξ_n 的密度矩阵为

$$\begin{pmatrix}0&1&2&3&4&5&6&7&8&9\\0.1&0.1&0.1&0.1&0.1&0.1&0.1&0.1&0.1&0.1\end{pmatrix},$$

亦即 $\{\xi_n\}$ 为同分布随机变量序列, 并且

$$\mathbb{E}(\xi_1)=\frac{9}{2},\qquad D(\xi_1)\in(0,\infty). \tag{1.6}$$

进一步, 对于任何 $0\leqslant k_1,k_2,\cdots,k_n\leqslant 9$, 有

$$\mathbb{P}(\xi_1=k_1,\xi_2=k_2,\cdots,\xi_n=k_n)=\frac{1}{10^n}=\prod_{i=1}^n\mathbb{P}(\xi_i=k_i),$$

即 $\{\xi_n\}$ 为独立同分布随机变量序列, 由(1.6) 和定理 5.3.1 知 $\{\xi_n\}$ 满足中心极限定理并且

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^n\xi_k\leqslant\frac{9n}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\frac{\sum_{k=1}^n(\xi_k-\mathbb{E}(\xi_k))}{\sqrt{D(\sum_{k=1}^n\xi_k)}}\leqslant 0\right)=\Phi(0)=\frac{1}{2}.$$

□

练习5.3.6 设随机变量列 $\{\xi_n\}$ 独立同分布, $\mathbb{E}(\xi_n)=0$, $D(\xi_n)=1$. 试证明

$$\frac{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2}}\xrightarrow{w}\eta\sim N(0,1).$$

证明: 由 $\{\xi_n\}$ 独立同分布和 $1=D(\xi_1)=\mathbb{E}(\xi_1^2)$ 知 $\{\xi_n^2\}$ 服从强大数定律, 并且 $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^n\xi_k^2\xrightarrow{a.s.}1$. 注意到 $\{\xi_n\}$ 服从中心极限定理和练习 5.1.11 结论可得

$$\begin{aligned}\frac{\sum_{k=1}^n(\xi_k-\mathbb{E}(\xi_k))}{\sqrt{\sum_{k=1}^n\xi_k^2}}-\frac{\sum_{k=1}^n(\xi_k-\mathbb{E}(\xi_k))}{\sqrt{D(\sum_{k=1}^n\xi_k)}}&=\frac{\sum_{k=1}^n(\xi_k-\mathbb{E}(\xi_k))}{\sqrt{D(\sum_{k=1}^n\xi_k)}}\left(\frac{\sqrt{nD(\xi_1)}}{\sqrt{\sum_{k=1}^n\xi_k^2}}-1\right)\\&=\frac{\sum_{k=1}^n(\xi_k-\mathbb{E}(\xi_k))}{\sqrt{D(\sum_{k=1}^n\xi_k)}}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\sum_{k=1}^n\xi_k^2}}-1\right)\\&\xrightarrow{w}0.\end{aligned}$$

再由 $\{\xi_n\}$ 服从中心极限定理和练习 5.1.10 结论知

$$\frac{\sum_{k=1}^n\xi_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^n\xi_k^2}}=\frac{\sum_{k=1}^n(\xi_k-\mathbb{E}(\xi_k))}{\sqrt{D(\sum_{k=1}^n\xi_k)}}+\left(\frac{\sum_{k=1}^n(\xi_k-\mathbb{E}(\xi_k))}{\sqrt{\sum_{k=1}^n\xi_k^2}}-\frac{\sum_{k=1}^n(\xi_k-\mathbb{E}(\xi_k))}{\sqrt{D(\sum_{k=1}^n\xi_k)}}\right)\xrightarrow{w}\xi\sim N(0,1).$$

□

练习5.3.7 设有 n 个口袋, 对 $k=1,2,\cdots,n$, 第 k 个口袋中有 1 个白球与 $k-1$ 个黑球. 每个袋中任取 1 球, 以 ξ_n 表示得到的白球数, 试证明 $\left\{\frac{\xi_n-\mathbb{E}(\xi_n)}{\sqrt{D(\xi_n)}}\right\}$ 渐近服从 $N(0,1)$.

证明: 记

$$\zeta_k=\begin{cases}1, & \text{从第 } k \text{ 个袋中取出的是白球;}\\ 0, & \text{否则.}\end{cases}$$

显然 $\{\zeta_k\}$ 为独立随机变量列, $\xi_n=\sum\limits_{k=1}^n\zeta_k$, 且对于任何自然数 k, 有

$$\mathbb{P}(\zeta_k=1)=\frac{1}{k},\qquad\mathbb{E}(\zeta_k)=\frac{1}{k},\qquad D(\zeta_k)=\frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{k}\right).$$

因为 $\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\zeta_k|=1$,

$$B_n^2=D\left(\sum_{k=1}^n\zeta_k\right)=\sum_{k=1}^nD(\zeta_k)=\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{k}\right)$$

和

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{B_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{k}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}\to 0,$$

由定理 5.3.7 知, $\{\zeta_k\}$ 满足中心极限定理, 即 $\left\{\frac{\xi_n-\mathbb{E}(\xi_n)}{\sqrt{D(\xi_n)}}\right\}$ 渐近服从 $N(0,1)$. □

练习5.3.8 设有 n 个口袋，对 $k=1,2,\cdots,n$, 第 k 个口袋中有 1 个白球与 $k-1$ 个黑球. 从每个袋中有放回地任取两球, 若两球全为白球则认为是成功. 用 η_n 表示成功总数. 试证明 $\left\{\frac{\eta_n-\mathbb{E}(\eta_n)}{\sqrt{D(\eta_n)}}\right\}$ 不渐近服从 $N(0,1)$.

证明: 令

$$\zeta_k=\begin{cases}1, & \text{从第 } k \text{ 袋中取出两白球;}\\ 0, & \text{否则.}\end{cases}$$

则 $\{\zeta_k\}$ 为独立随机变量列, $\eta_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\zeta_k$, 且对于任何自然数 k, 有

$$\mathbb{P}(\zeta_k=1)=\frac{1}{k^2},\qquad \mathbb{E}(\zeta_k)=\frac{1}{k^2},\qquad D(\zeta_k)=\frac{1}{k^2}\left(1-\frac{1}{k^2}\right),$$
$$\mathbb{E}(\eta_n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2},\qquad D(\eta_n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\left(1-\frac{1}{k^2}\right),$$

从而当 $x<0$ 时有

$$\mathbb{P}\left(\frac{\eta_n-\mathbb{E}(\eta_n)}{\sqrt{D(\eta_n)}}\leqslant x\right)=\mathbb{P}\left(\eta_n\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}+x\sqrt{D(\eta_n)}\right)\leqslant\mathbb{P}(\eta_n\leqslant a+bx),$$

其中

$$a=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}>0,\qquad b=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\right)^{\frac{1}{2}}>0.$$

注意到 $\eta_n\geqslant 0$, 可得

$$\{\eta_n\leqslant a+bx\}=\varnothing,\qquad x<-\frac{a}{b}.$$

因此, 当 $x<-a/b$ 时, 有

$$\varlimsup_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\frac{\eta_n-\mathbb{E}(\eta_n)}{\sqrt{D(\eta_n)}}\leqslant x\right)\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\mathbb{P}(\eta_n\leqslant a+bx)=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(\varnothing)=0\neq\Phi(x).$$

即 $\left\{\frac{\eta_n-\mathbb{E}(\eta_n)}{\sqrt{D(\eta_n)}}\right\}$ 不渐近服从 $N(0,1)$. □

练习5.3.9 设 $\{\xi_n\}$ 为独立随机变量列,

$$\mathbb{P}(\xi_n=k)=\begin{cases}1-\frac{1}{n^2}, & k=0;\\ \frac{1}{2n^2}, & k=\pm n.\end{cases}$$

试证 $\{\xi_n\}$ 不满足中心极限定理.

证明: 显然 $\mathbb{E}(\xi_n)=0$, $D(\xi_n)1$ 和 $B_n^2=\sum\limits_{k=1}^{n}D(\xi_k)=n$. 而

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-\mathbb{E}(\xi_k))=0\right)=\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k=0\right)&\geqslant\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}\{\xi_k=0\}\right)\\&=\prod_{k=1}^{n}\mathbb{P}(\xi_k=0)=\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\\&\xrightarrow{n\to\infty}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)>0,\end{aligned}$$

所以 $\{\xi_n\}$ 不满足中心极限定理. $\square$

练习5.3.10 设 $\{\xi_n\}$ 为独立随机变量序列, $\xi_n \sim N(0, \sigma_n^2)$, 其中

$$\sigma_1^2 = 1, \qquad \sigma_{n+1}^2 = (n+1)\sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2.$$

试证 $\{\xi_n\}$ 满足中心极限定理, 但

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{\sigma_k^2}{B_n^2} = 0 \tag{1.7}$$

不成立, 从而 Lindeberg 条件不成立.

证明: 因为 $\{\xi_k\}$ 为独立随机变量序列, 所以

$$(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \sim N(\vec{0}, B),$$

其中

$$B = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n^2 \end{pmatrix}.$$

从而 $\eta = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$ 服从正态分布, 进而

$$\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - \mathbb{E}(\xi_k)) = \frac{\eta_n - \mathbb{E}(\eta_n)}{\sqrt{D(\eta_n)}} \sim N(0,1), \qquad n \geqslant 1.$$

即 $\{\xi_n\}$ 满足中心极限定理.

另一方面,

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{\sigma_k^2}{B_n^2} \geqslant \frac{\sigma_n^2}{B_n^2} = \frac{\sigma_n^2}{B_{n-1}^2 + \sigma_n^2} = \left(\frac{B_{n-1}^2}{\sigma_n^2} + 1\right)^{-1} = \left(\frac{1}{n} + 1\right)^{-1} \xrightarrow{n\to\infty} 1,$$

因此(1.7)不成立, 从而 Lindeberg 条件不成立. $\square$