概率论习题解答

李勇　张余辉

May 30, 2018

1　第四章　数字特征与特征函数

§4.1.4 练习题

练习4.1.1 设 ξ 和 η 均为简单随机变量, 试证明 $\mathbb{E}(\xi+\eta)=\mathbb{E}(\xi)+\mathbb{E}(\eta)$.

证明: 不妨假设

$$\xi=\sum_{i=1}^{n}x_i\mathbb{1}_{A_i},\qquad \eta=\sum_{j=1}^{m}y_j\mathbb{1}_{B_j},$$

其中 $\{A_i\}$ 和 $\{B_j\}$ 均为样本空间的分割. 记 $C_{ij}=A_iB_j$, 则 $\{C_{ij}:1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant m\}$ 构成样本空间的一个新分割, 且

$$\xi+\eta=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i+y_j)\mathbb{1}_{A_iB_j}.$$

所以由数学期望的定义和概率的有限可加性得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi+\eta)&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i+y_j)\mathbb{P}(A_iB_j)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i\mathbb{P}(A_iB_j)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}y_j\mathbb{P}(A_iB_j)\\&=\sum_{i=1}^{n}x_i\mathbb{P}(A_i)+\sum_{j=1}^{m}y_j\mathbb{P}(B_j)=\mathbb{E}(\xi)+\mathbb{E}(\eta).\end{aligned}$$

□

练习4.1.2 假设简单随机变量 ξ 和 η 相互独立, 试证明

$$\mathbb{E}(\xi\eta)=\mathbb{E}(\xi)\mathbb{E}(\eta).$$

证明: 不妨设 $\xi(\Omega)=\{x_1,\cdots,x_n\}$, $\eta(\Omega)=\{y_1,\cdots,y_m\}$, 则

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi)\mathbb{E}(\eta)&=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\mathbb{P}(\xi=x_i)\right)\left(\sum_{j=1}^{m}y_m\mathbb{P}(\eta=y_j)\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_iy_j\mathbb{P}(\xi=x_i,\eta=y_j)\\&=\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_iy_j\mathbb{1}_{\{\xi=x_i,\eta=y_j\}}\right)=\mathbb{E}(\xi\eta).\end{aligned}$$

□

练习4.1.3 若 η 的数学期望为实数, 且 $\eta\leqslant\xi_n\uparrow\xi$, 试证明

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(\xi_n)=\mathbb{E}(\xi).$$

证明: 令 $\zeta_n=\xi_n-\eta$, 则 $0\leqslant\zeta_n\uparrow\xi-\eta$, 由单调收敛定理和数学期望的线性性质得

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(\zeta_n)=\mathbb{E}(\xi-\eta)=\mathbb{E}(\xi)-\mathbb{E}(\eta).$$

注意到 $\mathbb{E}(\zeta_n)=\mathbb{E}(\xi_n)-\mathbb{E}(\eta)$, 由此得证结论. □

练习4.1.4 若 ξ_n 和 η 的数学期望都存在, 且 $\xi_n\geqslant\eta$, 试证明

$$\mathbb{E}\left(\inf_{k\geqslant n}\xi_k\right)\leqslant\inf_{k\geqslant n}\mathbb{E}(\xi_k).$$

证明: 由数学期望的单调性得

$$\mathbb{E}\left(\inf_{k\geqslant n}\xi_k\right)\leqslant\mathbb{E}(\xi_{n+m}),\qquad m\geqslant 0,$$

从而

$$\mathbb{E}\left(\inf_{k\geqslant n}\xi_k\right)\leqslant\inf_{m\geqslant 0}\mathbb{E}(\xi_{n+m})=\inf_{k\geqslant n}\mathbb{E}(\xi_k).$$

□

练习4.1.5 设 ξ 为离散型随机变量, 其密度矩阵为

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n & \cdots \end{pmatrix},$$

Borel 函数 $f\geqslant 0$, 试证明 $\eta_n=\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_i)\mathbb{1}_{\{\xi=x_i\}}$ 为简单随机变量, 且

$$\mathbb{E}(f(\xi))=\sum_{i=1}^{\infty}f(x_i)p_i.$$

证明: 显然 η_n 为有限个事件的示性函数的线性组合, 所以它为简单随机变量. 注意到 $f\geqslant 0$, 得 $0\leqslant\eta_n\uparrow f(\xi)$, 由单调收敛定理和数学期望的线性性质得

$$\mathbb{E}(f(\xi))=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(\eta_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\mathbb{P}(\xi=x_i)=\sum_{i=1}^{\infty}f(x_i)p_i.$$

□

练习4.1.6 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 独立同分布, $\xi_1\sim U(0,1)$, 试求

$$\mathbb{E}(\min\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n t\}),\qquad\mathbb{E}(\max\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}).$$

解: 记 $\xi=\min\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}$, $\eta=\max\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}$, 则 (ξ,η) 的联合密度函数

$$p_{(\xi,\eta)}(x,y)=n(n-1)(y-x)^{n-2},\qquad 0<x<y<1,$$

所以 ξ 和 η 的边缘密度函数分别为

$$p_\xi(x)=\int_{-\infty}^{\infty}p_{(\xi,\eta)}(x,y)\mathrm{d}y=n(1-x)^{n-1},\qquad 0<x<1,$$
$$p_\eta(y)=\int_{-\infty}^{\infty}p_{(\xi,\eta)}(x,y)\mathrm{d}x=ny^{n-1},\qquad 0<y<1,$$

从而

$$\mathbb{E}(\min\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\})=\int_0^1 xn(1-x)^{n-1}\mathrm{d}x=\int_0^1(1-x)^n\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1},$$
$$\mathbb{E}(\max\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\})=\int_0^1 ny^n\mathrm{d}y=\frac{n}{n+1}.$$

□

练习4.1.7 设 $\xi \sim B(n,p)$, 试求 $\mathbb{E}(\xi(\xi-1))$.

解: 显然

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi(\xi-1)) &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\\ &= n(n-1)p^2\sum_{k=2}^{n}\frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!}p^{k-2}(1-p)^{n-k}\\ &= n(n-1)p^2\sum_{m=0}^{n-2}\frac{(n-2)!}{m!(n-2-m)!}p^{m}(1-p)^{n-2-m}\\ &= n(n-1)p^2.\end{aligned}$$

□

练习4.1.8 设 $\xi \sim t(n)$, 求 $\mathbb{E}(\xi)$.

解: 注意到被积函数为奇函数得

$$\mathbb{E}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}\left(\frac{x^2}{n}+1\right)^{-\frac{n+1}{2}}\mathrm{d}x = 0.$$

□

练习4.1.9 设随机变量 ξ 有 Laplace 分布, 其密度函数为

$$p(x) = \frac{1}{2\lambda}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\lambda}|x-\mu|},$$

其中 $\lambda > 0$, 求 $\mathbb{E}(\xi)$.

解:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{2\lambda}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\lambda}|x-\mu|}\mathrm{d}x\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x-\mu}{2\lambda}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\lambda}|x-\mu|}\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mu}{2\lambda}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\lambda}|x-\mu|}\mathrm{d}x\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{2\lambda}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\lambda}|y|}\mathrm{d}y + \mu = \mu.\end{aligned}$$

□

练习4.1.10 设 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 独立同分布, 有密度

$$p_k = \mathbb{P}(\xi_1 = k), \qquad k = 0, 1, \cdots.$$

记 $\mu_k = p_0 + p_1 + \cdots + p_{k-1}, \nu_k = 1 - \mu_k$, 试证明

$$\mathbb{E}(\min\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\}) = \sum_{k=1}^{\infty}\nu_k^n, \qquad \mathbb{E}(\max(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)) = \sum_{k=1}^{\infty}(1-\mu_k^n).$$

证明: 若 η 为取非负整值随机变量, 则

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\eta) &= \sum_{i=1}^{\infty} i\mathbb{P}(\eta=i) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{i}\mathbb{P}(\eta=i)\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=k}^{\infty}\mathbb{P}(\eta=i) = \sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(\eta\geqslant k).\end{aligned}$$

注意到

$$\mathbb{P}(\min\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}\geqslant k) = \mathbb{P}(\xi_1\geqslant k,\xi_2\geqslant k,\cdots,\xi_n\geqslant k) = \left(\sum_{m\geqslant k} p_m\right)^n = \nu_k^n,$$

得

$$\mathbb{E}(\min\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}) = \sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(\min\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}\geqslant k) = \sum_{k=1}^{\infty}\nu_k^n.$$

类似地, 由

$$\mathbb{P}(\max\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}\geqslant k) = 1-\mathbb{P}(\max\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}<k) = 1-\mu_k^n,$$

得

$$\mathbb{E}(\max\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}) = \sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(\max\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}\geqslant k) = \sum_{k=1}^{\infty}(1-\mu_k^n).$$

□

练习4.1.11 设随机变量 ξ,η 独立同分布, $\xi\sim N(a,\sigma^2)$, 试证明

$$\mathbb{E}(\xi\vee\eta) = a+\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}.$$

证明: 显然

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi\vee\eta) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\vee y}{2\pi\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{(x-a)^2+(y-a)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{x} x\mathrm{e}^{-\frac{(x-a)^2+(y-a)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}y + \int_{x}^{\infty} y\mathrm{e}^{-\frac{(x-a)^2+(y-a)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

注意到

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\int_{x}^{\infty} y\mathrm{e}^{-\frac{(x-a)^2+(y-a)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{y} y\mathrm{e}^{-\frac{(x-a)^2+(y-a)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x.$$

有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi\vee\eta) &= \frac{2}{2\pi\sigma^2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{x} x\mathrm{e}^{-\frac{(x-a)^2+(y-a)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}y\\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} x\mathrm{e}^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

作积分变换 $z=\frac{x-a}{\sigma}$ 得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi\vee\eta) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(a+\sigma z)\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}\Phi(z)\mathrm{d}z\\ &= a+\frac{\sigma}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-z^2}\mathrm{d}z = a+\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}},\end{aligned}$$

即 $\mathbb{E}(\xi\vee\eta) = a+\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$. □

练习4.1.12 设袋中有 2^n 球, 其中编号为 k 的球有 $\binom{n}{k}$ 个($k=0,1,\cdots,n$). 现不放回地从袋中任取 m 个($m<2^n$), 求这些球上编号之和的数学期望.

解: 用 ξ_i 表示第 i 次取球的编号, 则所取出球上的编号之和为 $\xi=\sum\limits_{i=1}^{m}\xi_i$, 且

$$\mathbb{P}(\xi_i=k)=\frac{1}{2^n}\binom{n}{k},\qquad 0\leqslant k\leqslant n,$$

所以

$$\mathbb{E}(\xi)=\sum_{i=1}^{m}\mathbb{E}(\xi_i)=m\mathbb{E}(\xi_1)=m\sum_{k=0}^{n}k\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}=\frac{mn}{2^n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}=\frac{mn}{2^n}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}=\frac{mn}{2}.$$

□

练习4.1.13 设商店每销售一吨大米获利 a 元, 每库存一吨大米损失 b 元, 假设大米的销量 Y(单位: t)服从参数为 λ 的指数分布, 其密度函数为

$$p(y)=\lambda\mathrm{e}^{(-\lambda y)},\qquad y>0.$$

问库存多少吨大米才能获得最大的平均利润.

解: 用 ξ 表示利润, x 表示库存大米吨数, 则

$$\xi=a\min\{Y,x\}-bx.$$

从而平均利润

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi)=a\mathbb{E}(\min\{Y,x\})-bx&=a\int_0^{\infty}\min\{y,x\}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda y}\mathrm{d}y-bx\\&=a\bigg(\int_0^{x}y\lambda\mathrm{e}^{-\lambda y}\mathrm{d}y+\int_x^{\infty}x\lambda\mathrm{e}^{-\lambda y}\mathrm{d}y\bigg)-bx\\&=a\bigg(-x\mathrm{e}^{-\lambda x}+\int_0^{x}\mathrm{e}^{-\lambda y}\mathrm{d}y+x\mathrm{e}^{-\lambda x}\bigg)-bx\\&=\frac{a}{\lambda}-\frac{a}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda x}-bx.\end{aligned}$$

要使平均利润最大, 只需

$$g(x)=\frac{a}{\lambda}-\frac{a}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda x}-bx$$

最大. 注意到

$$g'(x)=a\mathrm{e}^{-\lambda x}-b,$$

所以 g' 的唯一零点为

$$x=\frac{\ln a-\ln b}{\lambda}$$

达到 g 最大值, 即所以应存储 $\frac{\ln a-\ln b}{\lambda}$ 吨大米. □

练习4.1.14 假设有 n 个分别标有编号 1 至 n 的球, 有 n 个分别标有编号 1 至 n 的盒, 且每个盒仅能放一个球. 将球一次任意放入盒中, 用 ξ 表示其中球与盒同编号的盒的个数, 求 $\mathbb{E}(\xi)$.

解: 记

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 号盒中为第 } i \text{ 号球;} \\ 0, & \text{否则.} \end{cases}$$

则 $\xi = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$, 从而

$$\mathbb{E}(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\xi_i) = n\mathbb{E}(\xi_1).$$

注意到 $\mathbb{P}(\xi_i = 1) = \frac{1}{n}$, 可得 $\mathbb{E}(\xi_i) = \frac{1}{n}$, 进而 $\mathbb{E}(\xi) = n\mathbb{E}(\xi_1) = 1$. □

练习4.1.15 设 ξ 为非负整数值随机变量, 试证明其母函数

$$G_\xi(s) = \mathbb{E}(s^\xi), \qquad s \in (-1, 1).$$

证明: 给定 $s \in (-1, 1)$, 显然 $|s^\xi| \leqslant 1$. 因此

$$\mathbb{E}(s^\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k \mathbb{P}(\xi = k) = G_\xi(s),$$

即结论成立. □

§4.2.5 练习题

练习4.2.1 若随机变量 $\xi \geqslant 0$, 且 $\mathbb{E}(\xi) = 0$, 试证明 $\xi = 0$ a.e..

证明: 对于任何正整数 n,

$$\mathbb{P}\Big(\xi > \frac{1}{n}\Big) = \mathbb{E}\big(\mathbb{1}_{(\frac{1}{n},\infty)}(\xi)\big) \leqslant \mathbb{E}\big(n\xi\mathbb{1}_{(\frac{1}{n},\infty)}(\xi)\big) \leqslant n\mathbb{E}(\xi) = 0.$$

由概率的下连续性得

$$\mathbb{P}(\xi \neq 0) = \mathbb{P}(\xi > 0) = \mathbb{P}\Big(\lim_{n\to\infty} \Big\{\xi > \frac{1}{n}\Big\}\Big) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\xi > \frac{1}{n}\Big) = 0.$$

所以, $\xi = 0$ a.e.. □

练习4.2.2 若随机变量 $\xi = \eta$ a.e., 试证明 $\mathbb{E}(\xi - \eta) = 0$.

证明: 显然, $\xi - \eta = (\xi - \eta)\mathbb{1}_{\{\xi\neq\eta\}}$. 注意到 $\mathbb{P}(\xi \neq \eta) = 0$, 由例 4.1.5 知

$$\mathbb{E}(\xi - \eta) = \mathbb{E}\big((\xi - \eta)\mathbb{1}_{\{\xi\neq\eta\}}\big) = 0.$$

结论成立. □

练习4.2.3 袋中有编号 1 至 n 的 n 张卡片, 现从中任意抽取 m 张. 试对以下两种情形求 m 张卡片上编号之和的方差: (1) 有放回抽取; (2) 不放回抽取($m \leqslant n$).

解: 用 ξ_k 表示取出的第 k 张卡片的编号, 则编号之和 $\xi = \sum\limits_{k=1}^{m} \xi_k$, 且

$$\mathbb{E}(\xi_1) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{1}{n} = \frac{n+1}{2}, \qquad \mathbb{E}(\xi_1^2) = \sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6},$$

进而

$$D(\xi_1)=\mathbb{E}(\xi_1^2)-(\mathbb{E}(\xi_1))^2=\frac{n^2-1}{12}.$$

(1) 此时 $\xi_1,\cdots,\xi_m$ 独立同分布, 所以

$$D(\xi)=\sum_{k=1}^m D(\xi_k)=mD(\xi_1)=\frac{m(n^2-1)}{12}.$$

(2) 此时 $\xi_1,\cdots,\xi_m$ 同分布, 但不相互独立. 注意到

$$\mathbb{E}(\xi^2)=\sum_{i=1}^m \mathbb{E}(\xi_i^2)+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant m}\mathbb{E}(\xi_i\xi_j),\qquad \mathbb{E}(\xi_i^2)=\frac{(n+1)(2n+1)}{6},$$

当 $1\leqslant i<j\leqslant m$ 时,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi_i\xi_j)&=\sum_{1\leqslant s,t\leqslant n}st\mathbb{P}(\xi_i=s,\xi_j=t)=\sum_{1\leqslant s\neq t\leqslant n}st\mathbb{P}(\xi_i=s,\xi_j=t)\\&=\sum_{1\leqslant s\neq t\leqslant n}st\mathbb{P}(\xi_i=s)\mathbb{P}(\xi_j=t|\xi_i=s)=\sum_{1\leqslant s\neq t\leqslant n}st\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\\&=\frac{1}{n(n-1)}\left(\left(\sum_{s=1}^n s\right)^2-\sum_{s=1}^n s^2\right)=\frac{(n+1)(3n+2)}{12},\end{aligned}$$

得

$$\mathbb{E}(\xi^2)=\frac{m(n+1)(2n+1)}{6}+2\binom{m}{2}\frac{(n+1)(3n+2)}{12}=\frac{m(n+1)(n+3nm+2m)}{12},$$

所以

$$D(\xi)=\mathbb{E}(\xi^2)-(\mathbb{E}(\xi))^2=\frac{m(n+1)(n+3nm+2m)}{12}-\left(\frac{m(n+1)}{2}\right)^2=\frac{m(n+1)(n-m)}{12}.$$

□

练习4.2.4 设 ξ_1 和 ξ_2 是相互独立的随机变量, $D(\xi_i)=\sigma_i^2>0$. 求常数 a_1 和 a_2, 使得 $a_1\xi_1+a_2\xi_2$ 的方差最小, 其中 $a_1+a_2=1$.

解: 由独立性和 $a_1+a_2=1$ 得

$$\begin{aligned}D(a_1\xi_1+a_2\xi_2)&=a_1^2D(\xi_1)+a_2^2D(\xi_2)=a_1^2\sigma_1^2+(1-a_1)^2\sigma_2^2=a_1^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)-2a_1\sigma_2^2+\sigma_2^2\\&=\left(a_1\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}-\frac{\sigma_2^2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\right)^2-\frac{\sigma_2^4}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}+\sigma_2^2,\end{aligned}$$

所以当 $a_1=\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2},a_2=\frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$ 时, $a_1\xi_1+a_2\xi_2$ 的方差最小. □

练习4.2.5 设随机变量为 (ξ,η) 服从二维正态分布, $\mathbb{E}(\xi)=\mathbb{E}(\eta)=0$, $D(\xi)=D(\eta)=1$, $r(\xi,\eta)=R$. 试证明

$$\mathbb{E}(\max(\xi,\eta))=\sqrt{\frac{1-R}{\pi}}.$$

证明: (ξ,η) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-R^2}}\exp\Big(-\frac{x^2-2Rxy+y^2}{2(1-R^2)}\Big),$$

所以

$$\mathbb{E}(\max\{\xi,\eta\})=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{\infty}\max\{x,y\}p(x,y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{x}xp(x,y)\mathrm{d}y+\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\int_{x}^{\infty}yp(x,y)\mathrm{d}y.$$

注意到

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\int_{x}^{\infty}yp(x,y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{y}yp(x,y)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{x}xp(y,x)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{x}xp(x,y)\mathrm{d}y,$$

得

$$\mathbb{E}(\max\{\xi,\eta\})=2\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{x}xp(x,y)\mathrm{d}y=2\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\int_{x}^{\infty}yp(x,y)\mathrm{d}y.$$

注意到

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{\infty}xp(x,y)\mathrm{d}y=0,$$

得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{x}xp(x,y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\left(\int_{-\infty}^{\infty}xp(x,y)\mathrm{d}y-\int_{x}^{\infty}xp(x,y)\mathrm{d}y\right)=-\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\int_{x}^{\infty}xp(x,y)\mathrm{d}y.$$

所以

$$\begin{aligned}(1+R)\mathbb{E}(\max\{\xi,\eta\})&=2\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\int_{x}^{\infty}(y-Rx)p(x,y)\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\int_{x}^{\infty}\frac{y-Rx}{\sqrt{1-R^2}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}-\frac{(y-Rx)^2}{2(1-R^2)}\right)\mathrm{d}y\\&=\frac{\sqrt{1-R^2}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{x^2}{2}-\frac{(1-R)x^2}{2(1+R)}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{\sqrt{1-R^2}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{x^2}{1+R}\right)\mathrm{d}x\\&=(1+R)\sqrt{\frac{1-R}{\pi}},\end{aligned}$$

即 $\mathbb{E}(\max\{\xi,\eta\}=\sqrt{\frac{1-R}{\pi}}$. □

练习4.2.6 设 ξ_1 和 ξ_2 相互独立, $\xi_1\sim N(1,3)$, $\xi_2\sim N(2,4)$. 记

$$\eta_1=3\xi_1+2\xi_2+2,\qquad \eta_2=2\xi_1-5\xi_2+6,$$

求 (η_1,η_2) 的方差矩阵.

解: 由于

$$D(\eta_1)=9D(\xi_1)+4D(\xi_2)=9\times3+4\times4=43,\qquad D(\eta_2)=4D(\xi_1)+25D(\xi_2)=4\times3+25\times4=112$$

和

$$\operatorname{cov}(\eta_1,\eta_2)=\operatorname{cov}(3\xi_1+2\xi_2,2\xi_1-5\xi_2)=6D(\xi_1)-10D(\xi_2)=6\times3-10\times4=-22,$$

所以 (η_1,η_2) 的方差矩阵为 $\begin{pmatrix}43&-22\\-22&112\end{pmatrix}$. □

练习4.2.7 设随机变量 ξ 与 η 独立, 且方差存在, 则有

$$D(\xi\eta)=D(\xi)D(\eta)+(\mathbb{E}(\xi))^2D(\eta)+D(\xi)(\mathbb{E}(\eta))^2$$

(由此并可得 $D(\xi\eta) \geqslant D(\xi)D(\eta)$).

证明: 由独立性得 $\mathbb{E}(\xi^2\eta^2) = \mathbb{E}(\xi^2)\mathbb{E}(\eta^2)$, $\mathbb{E}(\xi\eta) = \mathbb{E}(\xi)\mathbb{E}(\eta t)$, 所以

$$D(\xi\eta) = \mathbb{E}(\xi^2)\mathbb{E}(\eta^2) - (\mathbb{E}(\xi)\mathbb{E}(\eta))^2 = \mathbb{E}(\xi^2)\mathbb{E}(\eta^2) - (\mathbb{E}(\xi))^2\mathbb{E}(\eta^2) + (\mathbb{E}(\xi))^2\mathbb{E}(\eta^2) - (\mathbb{E}(\xi))^2(\mathbb{E}(\eta))^2$$
$$= D(\xi)\mathbb{E}(\eta^2) + (\mathbb{E}(\xi))^2 D(\eta) = D(\xi)\mathbb{E}(\eta^2) - D(\xi)(\mathbb{E}(\eta))^2 + D(\xi)(\mathbb{E}(\eta))^2 + (\mathbb{E}(\xi))^2 D(\eta)$$
$$= D(\xi)D(\eta) + (\mathbb{E}(\xi))^2 D(\eta) + D(\xi)(\mathbb{E}(\eta))^2.$$

□

练习4.2.8 设随机变量 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{m+n} (m < n)$ 是独立同分布的, 它们有有限的方差. 求 $\alpha = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$ 和 $\beta = \xi_{m+1} + \xi_{m+2} + \cdots + \xi_{m+n}$ 的相关系数.

解: 显然 $D(\alpha) = nD(\xi_1) = D(\beta)$, 且

$$\operatorname{cov}(\alpha, \beta) = \operatorname{cov}\left(\sum_{i=1}^{m}\xi_i + \sum_{i=m+1}^{n}\xi_i, \sum_{i=m+1}^{n}\xi_i + \sum_{i=n+1}^{n+m}\xi_i\right) = \operatorname{cov}\left(\sum_{i=m+1}^{n}\xi_i, \sum_{i=m+1}^{n}\xi_i\right)$$
$$= \sum_{i=m+1}^{n} D(\xi_i) = (n-m)D(\xi_1).$$

所以 $r(\alpha, \beta) = \frac{n-m}{n}$. □

练习4.2.9 设 (ξ, η) 服从单位圆域 $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ 上的均匀分布, 试证明 $r(\xi, \eta) = 0$.

解: (ξ, η) 的联合密度函数为

$$p(x, y) = \frac{1}{\pi}, \qquad x^2 + y^2 \leqslant 1,$$

由此可得

$$\mathbb{E}(\xi) = \iint_{\mathbb{R}^2} xp(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0, \qquad \mathbb{E}(\eta) = \iint_{\mathbb{R}^2} xp(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,$$
$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \iint_{\mathbb{R}^2} xyp(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} xy\frac{1}{\pi}\mathrm{d}y = 0,$$

所以 $r(\xi, \eta) = 0$. □

练习4.2.10 设 X 与 Y 为具有二阶矩的随机变量, 且 $\mathbb{E}(X^2) > 0$. 定义

$$Q(a, b) = \mathbb{E}(Y - (a + bX))^2,$$

求 a, b 使 $Q(a, b)$ 达到最小值 $Q_{\min}$, 并证明

$$Q_{\min} = D(Y)\big(1 - (r(X, Y))^2\big).$$

解: 显然

$$\frac{\partial Q(a, b)}{\partial a} = -2\mathbb{E}(Y - (a + bX)) = 2(a + b\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y)),$$
$$\frac{\partial Q(a, b)}{\partial b} = -2\mathbb{E}((Y - (a + bX))X) = 2\big(a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(XY)\big),$$

因此 $Q(a, b)$ 的驻点满足方程

$$\begin{cases} a + b\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y), \\ a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(XY). \end{cases}$$

注意到 $\mathbb{E}(X^2 > 0$, 解方程得

$$b = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{D(X)}, \qquad a = \mathbb{E}(Y) - \frac{\operatorname{cov}(X,Y)\mathbb{E}(X)}{D(X)},$$

而

$$Q(a,b) = \mathbb{E}(Y^2) - 2a\mathbb{E}(Y) - 2b\mathbb{E}(XY) + a^2 + 2ab\mathbb{E}(X) + b^2\mathbb{E}(X^2),$$

从而 Q 的最小值为

$$\begin{aligned}
&Q\left(\mathbb{E}(Y) - \frac{\operatorname{cov}(X,Y)\mathbb{E}(X)}{D(X)}, \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{D(X)}\right) \\
&\quad = \mathbb{E}(Y^2) - 2(\mathbb{E}(Y))^2 + 2\frac{\operatorname{cov}(X,Y)\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)}{D(X)} - 2\frac{\operatorname{cov}(X,Y)\mathbb{E}(XY)}{D(X)} + (\mathbb{E}(Y))^2 \\
&\qquad - 2\frac{\operatorname{cov}(X,Y)\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)}{D(X)} + \frac{(\operatorname{cov}(X,Y))^2(\mathbb{E}(X))2}{(D(X))^2} + 2\frac{\operatorname{cov}(X,Y)\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)}{D(X)} \\
&\qquad - 2\frac{(\operatorname{cov}(X,Y))^2(\mathbb{E}(X))^2}{(D(X))^2} + \frac{(\operatorname{cov}(X,Y))^2\mathbb{E}(X^2)}{(D(X))^2} \\
&\quad = D(Y) - \frac{(\operatorname{cov}(X,Y))^2}{D(X)} \\
&\quad = D(Y)(1 - (r(X,Y))^2).
\end{aligned}$$

□

练习4.2.11 设非负整值随机变量 ξ 的母函数为 $G(s)$, 且 $\mathbb{E}(\xi)$ 与 $\mathbb{E}(\xi^2)$ 有限, 试证明

$$G'(1) = \mathbb{E}(\xi), \qquad G''(1) = \mathbb{E}(\xi^2) - \mathbb{E}(\xi).$$

证明: 将母函数逐项求导得

$$G'(s) = \sum_{n=0}^{\infty} n\mathbb{P}(\xi = n)s^{n-1}, \qquad G''(s) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\mathbb{P}(\xi = n)s^{n-2}, \qquad s \in (-1,1).$$

注意到 $\mathbb{E}(\xi)$ 与 $\mathbb{E}(\xi^2)$ 有限, 令$s \uparrow 1$, 利用幂级数的性质(幂级数的和函数在收敛域上连续)得 $G'(1) = \mathbb{E}(\xi)$, $G''(1) = \mathbb{E}(\xi^2) - \mathbb{E}(\xi)$. □

§4.3.3 练习题

练习4.3.1 设 (ξ,η)为连续型随机向量, 试证明 $\mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi|\eta)) = \mathbb{E}(\xi)$.

证明: 设联合密度函数为 $p(x,y)$, 则

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi|\eta)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}(\xi|\eta = y)p_2(y)\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x|\eta = y)\mathrm{d}x\right)p_2(y)\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mathbb{E}(\xi).
\end{aligned}$$

□

练习4.3.2 试利用条件数学期望的平滑性证明全概率公式.

证明: 设 A 为事件, $\{B_n\}$ 为样本空间的一个分割, 取 $\xi=\mathbb{1}_A$, $\eta=\sum_n n\mathbb{1}_{B_n}$. 由条件数学期望的平滑性得

$$\mathbb{P}(A)=\mathbb{E}(\xi)=\mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi|\eta))=\sum_n \mathbb{E}(\xi|\eta=n)\mathbb{P}(\eta=n).$$

注意到 $\{\eta=n\}=B_n$, 得 $\mathbb{E}(\xi|\eta=n)=\mathbb{P}(A|B_n)$, 即

$$\mathbb{P}(A)=\sum_n \mathbb{P}(B_n)\mathbb{P}(A|B_n).$$

□

练习4.3.3 设某矿山在一个月中发生事故数 ξ 服从 Poisson 分布, 其参数 λ 为离散型随机变量, 密度矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$$

求 $\mathbb{E}(\xi|\lambda)$.

解: 显然

$$\mathbb{E}(\xi|\lambda=1)=\sum_{n=0}^{\infty} n\times\frac{1}{n!}\mathrm{e}^{-1}=1,\qquad \mathbb{E}(\xi|\lambda=3)=\sum_{n=0}^{\infty} n\times\frac{3^n}{n!}\mathrm{e}^{-3}=3,$$

进而

$$\mathbb{E}(\xi|\lambda)(\omega)=\begin{cases}1, & \omega\in\{\lambda=1\},\\ 3, & \omega\in\{\lambda=3\}.\end{cases}$$

□

练习4.3.4 袋中有 N 个球, 其中白球数 τ 为随机变量, $\mathbb{E}(\tau)=n$. 现从袋中有放回地任取 m 个球, 用 ξ 表示其中白球个数, 求 ξ 的数学期望.

解: 对于 $1\leqslant i\leqslant m$, 记

$$\xi_i=\begin{cases}1, & \text{第 } i \text{ 次取出为白球;}\\ 0, & \text{否则.}\end{cases}$$

则 $\xi=\sum\limits_{i=1}^{m}\xi_i$, 且 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m$ 独立同分布. 所以

$$\mathbb{E}(\xi)=\sum_{i=1}^{m}\mathbb{E}(\xi_i)=m\mathbb{E}(\xi_1)=m\mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi_1|\tau))=m\mathbb{E}\Big(\frac{\tau}{N}\Big)=\frac{mn}{N}.$$

□

练习4.3.5 某射手击中目标的概率为 $p\,(0<p<1)$, 他向一目标连续进行射击, 直到第二次击中目标为止. 令 ξ 表示第一次击中目标时的次数, η 表示第二次击中目标时的次数, 试求 (ξ,η) 的联合分布列 p_{ij}, 条件分布列 $p_{i|j},p_{j|i}$, 及条件数学期望 $\mathbb{E}(\xi|\eta=j)$.

解: 由各次射击之间的独立性, 得联合分布列(密度)

$$p_{ij}=\mathbb{P}(\xi=i,\eta=j)=(1-p)^{j-2}p^2,\qquad 1\leqslant i<j.$$

从而边缘密度为

$$p_{i\bullet}=\sum_{j=i+1}^{\infty}(1-p)^{j-2}p^2=(1-p)^{i-1}p,\qquad i\geqslant 1,$$
$$p_{\bullet j}=\sum_{i=1}^{j-1}(1-p)^{j-2}p^2=(j-1)(1-p)^{j-2}p^2,\qquad j\geqslant 2.$$

所以条件密度为

$$p_{i|j}=\frac{(1-p)^{j-2}p^2}{(j-1)(1-p)^{j-2}p^2}=\frac{1}{j-1},\qquad 1\leqslant i<j,$$
$$p_{j|i}=\frac{(1-p)^{j-2}p^2}{(1-p)^{i-1}p}=(1-p)^{j-i-1}p,\qquad j>i.$$

条件期望为

$$\mathbb{E}(\xi|\eta=j)=\sum_{i=1}^{j-1}\frac{i}{(j-1)}=\frac{j}{2},\qquad j\geqslant 2.$$

□

练习4.3.6 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots$ 为数学期望是有限数的独立随机变量序列, 随机变量 η 只取正整数值, 且与 $\{\xi_n,n\geqslant 1\}$ 独立,试证明

$$\mathbb{E}\bigg(\sum_{k=1}^{\eta}\xi_k\bigg)=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(\eta\geqslant k)\mathbb{E}(\xi_k).$$

证明: 由条件期望的平滑性得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\bigg(\sum_{k=1}^{\eta}\xi_k\bigg)&=\mathbb{E}\bigg(\mathbb{E}\bigg(\sum_{k=1}^{\eta}\xi_k\bigg|\eta\bigg)\bigg)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(\eta=n)\mathbb{E}\bigg(\sum_{k=1}^{\eta}\xi_k\bigg|\eta=n\bigg)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(\eta=n)\mathbb{E}\bigg(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\bigg)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(\eta=n)\mathbb{E}(\xi_k)\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}\mathbb{P}(\eta=n)\mathbb{E}(\xi_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(\eta\geqslant k)\mathbb{E}(\xi_k).\end{aligned}$$

□

练习4.3.7 设随机变量 ξ_1 在区间 $(0,1)$ 上均匀分布. 对 $k\geqslant 1$, 若已知 $\xi_k=x_k$, 则 ξ_{k+1} 在区间 (x_k,x_{k+1}) 上均匀分布, 求 $\mathbb{E}(\xi_n)$.

解: 由条件期望的平滑性得

$$\mathbb{E}(\xi_n)=\mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi_n|\xi_{n-1}))=\mathbb{E}\bigg(\frac{\xi_{n-1}+\xi_{n-1}+1}{2}\bigg)=\mathbb{E}(\xi_{n-1})+\frac{1}{2}=\cdots=\mathbb{E}(\xi_1)+\frac{n-1}{2}=\frac{n}{2}.$$

□

练习4.3.8 若 ξ 与 η 相互独立, 试证明

$$F(z)\triangleq\mathbb{E}(F_\xi(z-\eta))$$

为 $\xi+\eta$ 的分布函数.

证明: 显然

$$F_{\xi+\eta}(z)=\mathbb{E}(\mathbb{1}_{(-\infty,z]}(\xi+\eta)),$$

因此只需证明

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{(-\infty,z]}(\xi+\eta))=\mathbb{E}(F_\xi(z-\eta)).$$

当 η 为简单随机变量时, 不妨假设其值域为 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, 则

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathbb{1}_{(-\infty,z]}(\xi+\eta))&=\mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbb{1}_{(-\infty,z]}(\xi+\eta)|\eta))=\sum_{k=1}^n\mathbb{E}(\mathbb{1}_{(-\infty,z]}(\xi+x_k)|\eta=x_k)\mathbb{P}(\eta=x_k)\\&=\sum_{k=1}^n\mathbb{E}(\mathbb{1}_{(-\infty,z-x_k]}(\xi))\mathbb{P}(\eta=x_k)=\sum_{k=1}^n F_\xi(z-x_k)\mathbb{P}(\eta=x_k)\\&=\mathbb{E}(F_\xi(z-\eta)).\end{aligned}$$

此时结论成立.

当 η 为有界随机变量时, 取 $F_{\xi+\eta}$ 的连续点 z，以及单增简单随机变量列 $\{\eta_k\}$, 使得 $\eta_k\leqslant\eta\leqslant\eta_k+2^{-k}$, 则

$$F_\xi(z-\eta_k)\downarrow F_\xi(z-\eta),$$

由控制收敛定理知

$$\mathbb{E}(F_\xi(z-\eta))=\lim_{k\to\infty}\mathbb{E}(F_\xi(z-\eta_k))=\lim_{k\to\infty}\mathbb{E}(\mathbb{1}_{(-\infty,z]}(\xi+\eta_k)).\tag{1.1}$$

注意到

$$\mathbb{1}_{(-\infty,z]}(\xi+\eta-2^{-k})\geqslant\mathbb{1}_{(-\infty,z]}(\xi+\eta_k)\geqslant\mathbb{1}_{(-\infty,z]}(\xi+\eta),$$

有

$$F_{\xi+\eta}(z+2^{-k})=\mathbb{E}(\mathbb{1}_{(-\infty,z]}(\xi+\eta-2^{-k}))\geqslant\mathbb{E}(\mathbb{1}_{(-\infty,z]}(\xi+\eta_k))\geqslant\mathbb{E}(\mathbb{1}_{(-\infty,z]}(\xi+\eta))=F_{\xi+\eta}(z).$$

注意到 z 为 $F_{\xi+\eta}$ 的连续点, 知

$$F_{\xi+\eta}(z)=\lim_{k\to\infty}F_{\xi+\eta}(z+2^{-k})\geqslant\lim_{k\to\infty}\mathbb{E}(\mathbb{1}_{(-\infty,z]}(\xi+\eta_k))\geqslant F_{\xi+\eta}(z),$$

带入(1.1)得

$$\mathbb{E}(F_\xi(z-\eta))=F_{\xi+\eta}(z).$$

对于任何实数 x, 取 $F_{\xi+\eta}$ 的连续点 $z_n\downarrow x$, 由分布函数的右连续性和控制收敛定理得

$$F_{\xi+\eta}(x)=\lim_{n\to\infty}F_{\xi+\eta}(z_n)=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(F_\xi(z_n-\eta))=\mathbb{E}(F_\xi(x-\eta)).$$

对于任意随机变量 η, 取$\eta_n = \eta\mathbb{1}_{[-n,n]}(\eta)$, 由控制收敛定理

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(F_\xi(z-\eta)) &= \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(F_\xi(z-\eta)\mathbb{1}_{[-n,n]}(\eta)) \\
&= \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(\mathbb{E}(F_\xi(z-\eta)\mathbb{1}_{[-n,n]}(\eta))|\mathbb{1}_{[-n,n]}(\eta)) \\
&= \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(F_\xi(z-\eta)|\mathbb{1}_{[-n,n]}(\eta)=1)\mathbb{P}(|\eta|\leqslant n) \\
&\quad\ + \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(F_\xi(z-\eta)|\mathbb{1}_{[-n,n]}(\eta)=0)\mathbb{P}(|\eta|> n) \\
&= \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(F_\xi(z-\eta)|\mathbb{1}_{[-n,n]}(\eta)=1)\mathbb{P}(|\eta|\leqslant n) \\
&= \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(\mathbb{1}_{(-\infty,z]}(\xi+\eta)|\mathbb{1}_{[-n,n]}(\eta)=1)\mathbb{P}(|\eta|\leqslant n) \\
&= \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(\mathbb{1}_{(-\infty,z]}(\xi+\eta_n)|\mathbb{1}_{[-n,n]}(\eta)=1)\mathbb{P}(|\eta|\leqslant n) \\
&= \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(\mathbb{1}_{(-\infty,z]}(\xi+\eta_n)|\mathbb{1}_{[-n,n]}(\eta)=1)\mathbb{P}(|\eta|\leqslant n) \\
&\quad\ + \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(\mathbb{1}_{(-\infty,z]}(\xi+\eta_n)|\mathbb{1}_{[-n,n]}(\eta)=0)\mathbb{P}(|\eta|> n) \\
&= \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbb{1}_{(-\infty,z]}(\xi+\eta_n)|\mathbb{1}_{[-n,n]}(\eta))) \\
&= \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(\mathbb{1}_{(-\infty,z]}(\xi+\eta_n)) = \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(\mathbb{1}_{(-\infty,z]}(\xi+\eta\mathbb{1}_{[-n,n]}(\eta))) \\
&= \mathbb{E}(\mathbb{1}_{(-\infty,z]}(\xi+\eta)) = F_{\xi+\eta}(z),
\end{aligned}$$

即结论成立. □

练习4.3.9 设 $\{\xi_k\}$ 为相互独立的非负整值随机变量序列, 它们有共同的母函数 $G(s)$. 如果 η 是另一正整值随机变量, 其母函数为 $F(s)$. 当 η 与 $\{\xi_k\}$ 独立时, 试证明 $\xi=\sum\limits_{k=1}^{\eta}\xi_k$ 的母函数为 $H(s)=F(G(s))$.

证明: 由条件期望的平滑性立得 ξ 的母函数

$$H(s)=\mathbb{E}(s^\xi)=\mathbb{E}(\mathbb{E}(s^\xi|\eta))=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(\eta=k)\mathbb{E}\left(s^{\sum\limits_{i=1}^{\eta}\xi_i}\middle|\eta=k\right).$$

注意到

$$\mathbb{E}\left(s^{\sum\limits_{i=1}^{\eta}\xi_i}\middle|\eta=k\right)=\mathbb{E}\left(s^{\sum\limits_{i=1}^{k}\xi_i}\middle|\eta=k\right)=\mathbb{E}\left(s^{\sum\limits_{i=1}^{k}\xi_i}\right)=(G(s))^k,$$

得

$$H(s)=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(\eta=k)(G(s))^k=F(G(s)).$$

□

§4.4.4 练习题

练习4.4.1 若 $f(t)$ 为 ξ 的特征函数, 试证明

$$\int_{-\tau}^{\tau}f(t)\mathrm{d}t=2\mathbb{E}\left(\frac{\sin(\xi\tau)}{\xi}\right).$$

证明: 记

$$t_k = -\tau + \frac{2\tau k}{n}, \qquad 0 \leqslant k \leqslant n,$$

由数学期望的线性性质和控制收敛定理有

$$\int_{-\tau}^{\tau} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to 0}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\big(\mathrm{e}^{it_k\xi}\big)\frac{2\tau}{n} = \lim_{n\to 0}\mathbb{E}\bigg(\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{it_k\xi}\frac{2\tau}{n}\bigg) = \mathbb{E}\bigg(\int_{-\tau}^{\tau}\mathrm{e}^{it\xi}\mathrm{d}t\bigg).$$

注意到

$$\int_{-\tau}^{\tau}\mathrm{e}^{it\xi}\mathrm{d}t = \int_{-\tau}^{\tau}(\cos(t\xi)+i\sin(t\xi))\mathrm{d}t = \int_{-\tau}^{\tau}\cos(t\xi)\mathrm{d}t = \frac{2\sin(\xi\tau)}{\xi},$$

所以

$$\int_{-\tau}^{\tau} f(t)\mathrm{d}t = \mathbb{E}\bigg(\frac{2\sin(\xi\tau)}{\xi}\bigg) = 2\mathbb{E}\bigg(\frac{\sin(\xi\tau)}{\xi}\bigg).$$

得结论. □

练习4.4.2 求下列特征函数对应的分布密度.

(1) $f(t) = \cos t$.

(2) $f(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\cos(kt)$, 其中 $a_k \geqslant 0$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k = 1$.

解: (1) 由于

$$\cos(t) = \frac{1}{2}(\exp(it)+\exp(-it)) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{i\xi t}),$$

其中 ξ 的密度矩阵为

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

由唯一性定理知这是 $\cos t$ 对应的分布密度.

(2) 取离散型随机变量 ξ, 其密度为

$$\mathbb{P}(\xi = k) = \begin{cases} \frac{a_{|k|}}{2}, & k = \pm 1, \cdots, \pm n, \cdots; \\ a_0, & k = 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

则其特征函数为

$$f(t) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos(kt)+i\sin(kt)) + a_0 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos(-kt)+i\sin(-kt)) = \sum_{k=0}^{\infty}a_k\cos(kt),$$

由唯一性定理知所求的概率密度由(1.2)给出. □

练习4.4.3 若随机变量 ξ 的特征函数是 $\dfrac{\mathrm{e}^{it}(1-\mathrm{e}^{int})}{n(1-\mathrm{e}^{it})}$, 试证明 ξ 以概率 $\dfrac{1}{n}$ 取值 $1, 2, \cdots, n$.

证明: 若 ξ 以概率 $\frac{1}{n}$ 取值 $1, 2, \cdots, n$, 由特征函数的定义

$$f_\xi(t) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{it\xi}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{itk} = \frac{\mathrm{e}^{it}-(\mathrm{e}^{it})^{n+1}}{n(1-\mathrm{e}^{it})} = \frac{\mathrm{e}^{it}(1-\mathrm{e}^{itn})}{n(1-\mathrm{e}^{it})}.$$

由唯一性定理得结论. □

练习4.4.4 设随机变量 ξ 的分布函数为 $F(x)$, $F(x)$ 连续且严格单调. 求 $F(\xi)+b$ 的特征函数, 其中 b 为实数.

解: 记 $\eta = F(\xi) + b$, 由 F 为严格单增连续函数得

$$F_\eta(x) = \mathbb{P}(F(\xi) + b \leqslant x) = \mathbb{P}(\xi \leqslant F^{-1}(x - b)) = \begin{cases} 0, & x < b; \\ x - b, & b \leqslant x < b + 1; \\ 1, & x \geqslant b + 1, \end{cases}$$

即 $\eta \sim U(b, b+1)$, 由例 4.4.3 结论知 $F(\xi) + b$ 的特征函数为

$$f(t) = \frac{\mathrm{e}^{ibt}(\mathrm{e}^{it} - 1)}{it}.$$

□

练习4.4.5 设 $F(x)$ 和 $f(t)$ 分别是随机变量 ξ 的分布函数和特征函数. 令

$$G(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} F(y)\mathrm{d}y,$$

其中 $h > 0$ 为常数. 试证明 $G(x)$ 为分布函数, 其对应的特征函数为 $\dfrac{\sin(ht)}{ht}f(t)$.

证明: 取与 ξ 相互独立的随机变量 $\eta \sim U(-h, h)$, 则

$$f_\eta(t) = \frac{\sin(ht)}{ht}, \qquad f_{\xi+\eta}(t) = f(t) \times \frac{\sin(ht)}{ht}.$$

另一方面,

$$F_{\xi+\eta}(x) = \mathbb{E}(F(x - \eta)) = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} F(x - u)\mathrm{d}u = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} F(y)\mathrm{d}y = G(x),$$

即 $G(x)$ 为分布函数, 其特征函数为 $\dfrac{\sin(ht)}{ht}f(t)$. □

练习4.4.6 要使函数 $f(t)$ 及 $\frac{1}{f(t)}$ 都成为特征函数, $f(t)$ 必需且只需满足什么条件?

解: 若 $f(t)$ 和 $\frac{1}{f(t)}$ 均为特征函数, 则

$$|f(t)| \leqslant 1, \qquad \left|\frac{1}{f(t)}\right| \leqslant 1,$$

所以 $|f(t)| \equiv 1$; 反之, 若特征函数 $f(t)$ 的模恒等于 1, 则

$$\frac{1}{f(t)} = \frac{f(-t)}{f(t)f(-t)} = \frac{f(-t)}{|f(t)|^2} = f(-t)$$

为特征函数. 所以必需且只需 $f(t)$ 为模恒等于 1 的特征函数. □

练习4.4.7 假设特征函数 $f(t)$ 为实函数, 试证明

$$1 - f(2t) \leqslant 4(1 - f(t)), \qquad 1 + f(2t) \geqslant 2(f(t))^2.$$

证明: 设 ξ 的特征函数为 $f(t)$, 由它为实值函数知

$$f(t) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{i\xi t}) = \mathbb{E}(\cos(\xi t)),$$

进而

$$1 - f(2t) = \mathbb{E}(1 - \cos(2\xi t)) = \mathbb{E}(1 - \cos^2(t\xi) + \sin^2(t\xi)) = 2\mathbb{E}(1 - \cos^2(t\xi)).$$

注意到$1 - \cos^2(t\xi) \leqslant 2 - 2\cos(t\xi)$, 由数学期望的单调性得

$$1 - f(2t) \leqslant 2\mathbb{E}(2 - 2\cos(t\xi)) = 4(1 - f(t));$$

另一方面, 由 Cauchy-Schwarz 不等式得

$$1+f(2t)=2\mathbb{E}(\cos^2(t\xi))\geqslant 2(\mathbb{E}(\cos(t\xi)))^2=2(f(t))^2.$$

□

练习4.4.8 设二维随机变量 (ξ,η) 具有联合密度函数：

$$p(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}(1+xy(x^2-y^2)), & |x|<1, |y|<1;\\ 0 & \text{其他},\end{cases}$$

试证明 $\xi+\eta$ 的特征函数等于 ξ 的特征函数与 η 的特征函数之积, 但是 ξ 和 η 并不相互独立.

证明: 因为

$$\begin{aligned}f_{\xi+\eta}(t)&=\mathbb{E}(\mathrm{e}^{i(\xi+\eta)t})=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{i(x+y)t}(1+xy(x^2-y^2))\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\cos(xt)\mathrm{d}x\int_{-1}^{1}\cos(yt)\mathrm{d}y=\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2,\\f_{\xi}(t)&=\mathbb{E}(\mathrm{e}^{i\xi t})=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{ixt}(1+xy(x^2-y^2))\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\cos(xt)\mathrm{d}x\int_{-1}^{1}(1+xy(x^2-y^2))\mathrm{d}y=\frac{\sin t}{t},\\f_{\eta}(t)&=\mathbb{E}(\mathrm{e}^{i\eta t})=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{iyt}(1+xy(x^2-y^2))\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\cos(yt)\mathrm{d}y\int_{-1}^{1}(1+xy(x^2-y^2))\mathrm{d}x=\frac{\sin t}{t},\end{aligned}$$

所以 $f_{\xi+\eta}(t)=f_{\xi}(t)f_{\eta}(t)$. 另一方面,

$$\begin{aligned}p_{\xi}(x)&=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}(1+xy(x^2-y^2))\mathrm{d}y=\frac{1}{2}, \qquad |x|<1,\\p_{\eta}(y)&=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}(1+xy(x^2-y^2))\mathrm{d}x=\frac{1}{2}, \qquad |y|<1,\end{aligned}$$

所以 $p(x,y)\neq p_{\xi}(x)p_{\eta}(y)$, 即 ξ 和 η 并不相互独立. □

练习4.4.9 试证明定理 4.4.12 中结论(1), (2), (5)和(6).

证明: 设 $f(t_1,t_2,\cdots,t_n)$ 为随机向量 $\vec{\xi}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 的特征函数, 则

$$|f(t_1,t_2,\cdots,t_n)|=\left|\mathbb{E}\left(\exp\left(i\sum_{k=1}^{n}t_k\xi_k\right)\right)\right|\leqslant\mathbb{E}\left(\left|\exp\left(i\sum_{k=1}^{n}t_k\xi_k\right)\right|\right)=1=f(0,0,\cdots,0),$$

即定理 4.4.12 结论(1)成立.

注意到

$$f(-t_1,-t_2,\cdots,-t_n)=\mathbb{E}\left(\exp\left(i\sum_{k=1}^{n}(-t_k)\xi_k\right)\right)=\mathbb{E}\left(\exp\left(-i\sum_{k=1}^{n}t_k\xi_k\right)\right)=\overline{f(t_1,t_2,\cdots,t_n)},$$

即定理 4.4.12 结论(2)成立.

注意到

$$\begin{aligned}f_{(\xi_{s_1},\xi_{s_2},\cdots,\xi_{s_k})}(t_{s_1},t_{s_2},\cdots,t_{s_k})&=\mathbb{E}\left(\exp\left(i\sum_{j=1}^{k}t_{s_j}\xi_{s_j}\right)\right)\\&=f(0,\cdots,0,t_{s_1},0,\cdots,0,t_{s_2},0,\cdots,0,t_{s_k},0,\cdots,0),\end{aligned}$$

即定理 4.4.1 结论(5)成立.

由反演公式知联合特征函数与联合分布函数相互唯一确定, 由此知定理 4.4.12 结论(6)成立. □

练习4.4.10 设 $\xi \sim N(0,\sigma^2)$, 试通过特征函数计算 $\mathbb{E}(\xi^2)$.

解: 因为

$$f_\xi(t) = \exp\left(-\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right),$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}f_\xi(t)}{\mathrm{d}t} = -\sigma^2 t \exp\left(-\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right), \qquad \frac{\mathrm{d}^2 f_\xi(t)}{\mathrm{d}t^2} = -\sigma^2 \exp\left(-\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) + \sigma^4 t^2 \exp\left(-\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right),$$

即有

$$\mathbb{E}(\xi^2) = \frac{1}{i^2} \cdot \frac{\mathrm{d}^2 f_\xi(0)}{\mathrm{d}t^2} = \sigma^2.$$

□

§4.5.3 练习题

练习4.5.1 设 (ξ,η) 有密度

$$p(x,y) = \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{1}{2}(2x^2+2xy+y^2)\right),$$

求 $\operatorname{cov}(\xi,\eta)$.

解: 显然

$$2x^2+2xy+y^2 = (x,y)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

所以

$$(\xi,\eta) \sim N\left((0,0), \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\right).$$

从而

$$\operatorname{var}(\vec{\xi}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

所以, $\operatorname{cov}(\xi,\eta) = -1$. □

练习4.5.2 设 $\vec{\xi} = (\xi_1,\xi_2)$ 有密度

$$p(x,y) = \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{1}{2}(2x^2+y^2+2xy-22x-14y+65)\right),$$

求 $\vec{\xi}$ 的数学期望和方差矩阵.

解: 由待定系数法得

$$2x^2+y^2+2xy-22x-14y+65 = (x-4,y-3)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-4 \\ y-3 \end{pmatrix},$$

所以

$$\mathbb{E}(\vec{\xi}) = (4,3), \qquad \mathrm{var}\,(\vec{\xi}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

□

练习4.5.3 设 $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2) \sim N(\vec{a}, B)$, 其中

$$B = \begin{pmatrix} \sigma^2 & r\sigma^2 \\ r\sigma^2 & \sigma^2 \end{pmatrix}.$$

试证明 $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2$ 与 $\eta_2 = \xi_1 - \xi_2$ 相互独立.

证明: 记

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

则

$$(\eta_1, \eta_2) = \vec{\xi}A \sim N(\vec{a}A, A'BA).$$

由于

$$A'BA = \begin{pmatrix} 2(1+r)\sigma^2 & 0 \\ 0 & 2(1-r)\sigma^2 \end{pmatrix},$$

所以 η_1 和 η_2 相互独立, 即 $\xi_1 + \xi_2$ 和 $\xi_1 - \xi_2$ 相互独立. □

练习4.5.4 已知 $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \sim N(\vec{a}, B)$, 其中

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

试证明 ξ_1 与 ξ_2 相互不独立, 而 (ξ_1, ξ_2) 与 ξ_3 独立.

证明: 显然 $\mathrm{cov}\,(\xi_1, \xi_2) = 1$, 所以 ξ_1 和 ξ_2 不相互独立.

记 $\vec{\eta}_1 = (\xi_1, \xi_2)$, $\vec{\eta}_2 = \xi_3$, 则有 $\mathrm{cov}\,(\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2) = (0,0)'$, 即 (ξ_1, ξ_2) 和 ξ_3 相互独立. □

练习4.5.5 设 $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 为 n 元正态分布的随机变量. 求证对于任何常数 $b_0, b_1, \cdots, b_n$ 有

$$\mathbb{P}(b_1\xi_1 + b_2\xi_2 + \cdots + b_n\xi_n = b_0) = 0 \text{ 或 } 1.$$

证明: 记 $C = (b_1, b_2, \cdots, b_n)'$, 则 $\eta = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k\xi_k = \vec{\xi}C \sim N(\vec{a}C, C'BC)$.

当实数 $C'BC > 0$ 时, η 为连续型随机变量, 从而 $\mathbb{P}(\eta = b_0) = 0$.

当 $C'BC = 0$ 时, η 的密度矩阵为 $\begin{pmatrix} \vec{a}C \\ 1 \end{pmatrix}$, 即 $\mathbb{P}(\eta = b_0) = 0$ 或 1.

综上所述 $\mathbb{P}\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} b_k\xi_k = b_0\Big) = \mathbb{P}(\eta = b_0) = 0$ 或 1. □

练习4.5.6 假设 (ξ_1, ξ_2) 是服从二元正态分布的随机变量, 且对 $k, j = 1, 2$ 有 $\mathbb{E}(\xi_k) = 0$ 与 $\mathbb{E}(\xi_k\xi_j) = \sigma^2 > 0$. 求 $\eta = \sigma^{-2}\xi_1\xi_2$ 的分布.

解: 显然相关系数 $r(\xi_1, \xi_2) = 1$, 由定理 4.2.6 知

$$\frac{\xi_1}{\sigma} = \frac{\xi_2}{\sigma}, \qquad \text{a.e..}$$

这样 $\eta=\frac{\xi_1\xi_2}{\sigma^2}$ 与 $(\frac{\xi_1}{\sigma})^2$ 同分布, 即 $\eta\sim\chi^2(1)$. $\square$

练习4.5.7 设 $\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2,\cdots,\vec{\xi}_m$ 独立同分布, $\vec{\xi}_1\sim N(\vec{\mu},B)$,

$$\vec{z}_1=\sum_{i=1}^m a_i\vec{\xi}_i,\qquad \vec{z}_2=\sum_{i=1}^m b_i\vec{\xi}_i,$$

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_m,b_1,b_2,\cdots b_m$ 均为实数, 满足条件 $\sum\limits_{i=1}^m a_ib_i=0$, 试证明 $\vec{z}_1$ 和 $\vec{z}_2$ 相互独立, 都服从正态分布.

证明: 记 $\eta=(\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2,\cdots,\vec{\xi}_m)$,

$$\eta\sim N((\vec{\mu},\vec{\mu},\cdots,\vec{\mu}),\mathrm{diag}\,\{B,B,\cdots,B\}),$$

且 $(\vec{z}_1,\vec{z}_2)$ 是 η 的线性变换, 必然服从正态分布. 所以 $\vec{z}_1$ 和 $\vec{z}_2$ 都服从正态分布. 进一步,

$$\mathrm{cov}\,(\vec{z}_1,\vec{z}_2)=\sum_{i=1}^m a_i\mathrm{cov}\,(\vec{\xi}_i,\vec{z}_2)=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m a_ib_j\mathrm{cov}\,(\vec{\xi}_i,\vec{\xi}_j)=\sum_{i=1}^m a_ib_iB=0B=O,$$

即 $\vec{z}_1$ 和 $\vec{z}_2$ 相互独立.

注: 事实上,

$$\vec{z}_1=(\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2,\cdots,\vec{\xi}_m)\begin{pmatrix}a_1I_k\\a_2I_k\\\vdots\\a_mI_k\end{pmatrix},\qquad \vec{z}_2=(\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2,\cdots,\vec{\xi}_m)\begin{pmatrix}b_1I_k\\b_2I_k\\\vdots\\b_mI_k\end{pmatrix},$$

其中 I_k 为 k 阶单位矩阵. $\square$

练习4.5.8 已知随机向量 (ξ,η) 的联合密度函数

$$f(x,y)=C\mathrm{e}^{-(4(x-5)^2+2(x-5)(y-3)+5(y-3)^2)},$$

求常数 C, $\mathbb{E}(\xi)$, $\mathbb{E}(\eta)$ 及特征函数 $f_{(\xi,\eta)}(t_1,t_2)$.

解:

$$4(x-5)^2+2(x-5)(y-3)+5(y-3)^2=(x-5,y-3)\begin{pmatrix}4&1\\1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-5\\y-3\end{pmatrix},$$

所以

$$(\xi,\eta)\sim N\left(\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}',\left(2\begin{pmatrix}4&1\\1&5\end{pmatrix}\right)^{-1}\right)=N\left(\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}',\begin{pmatrix}8&2\\2&10\end{pmatrix}^{-1}\right).$$

进而

$$C=\frac{1}{2\pi}\begin{vmatrix}8&2\\2&10\end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{76}}{2\pi},\qquad \mathbb{E}(\xi)=5,\qquad \mathbb{E}(\eta)=3$$

和

$$f_{(\xi,\eta)}(t_1,t_2)=\exp\left(i(5t_1+3t_2)-\frac{\frac{5}{38}t_1^2-\frac{1}{19}t_1t_2+\frac{2}{19}t_2^2}{2}\right).$$

$\square$

练习4.5.9 假设 $\vec{\xi}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 的各个分量独立同分布, $\xi_1\sim N(0,1)$. 若

$$\vec{\eta}=\vec{\xi}A,\qquad A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix},$$

求 $\vec{\eta}=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$ 的特征函数, 以及在已知 $\eta_1=0$ 的情况下 $\vec{\zeta}=(\eta_2,\eta_3,\cdots,\eta_n)$ 的条件密度函数.

解: 显然

$$\vec{\xi}\sim N(\vec{0},I_n),$$

其中 I_n 为 n 阶单位矩阵. 所以

$$\vec{\eta}\sim N(\vec{0},A'A).$$

注意到

$$A'A=\begin{pmatrix} 0 & \\ & I_{n-1} \end{pmatrix},$$

得特征函数

$$f_{\vec{\eta}}(t_1,t_2,\cdots,t_n)=\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}t_k^2\right).$$

因此 $\vec{\eta}$ 的各个分量相互独立, 从而在已知 $\eta_1=0$ 的情况下 $\vec{\zeta}=(\eta_2,\eta_3,\cdots,\eta_n)$ 的条件分布函数等于 $\vec{\zeta}$ 的边缘分布函数, 且

$$f_{\vec{\zeta}}(t_2,t_3,\cdots,t_n)=\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}t_k^2\right),$$

相应的条件密度函数为

$$p(x_2,x_3,\cdots,x_n)=(2\pi)^{-(n-1)/2}\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}x_k^2\right).$$

$\square$