概率论习题解答

李勇　张余辉

May 2, 2018

1　第三章　随机变量与随机向量

§3.1.5 练习题

练习3.1.1 设 Ω 为样本空间，$\xi:\Omega\to\mathbb{R}$, $A\subset B\subset\mathbb{R}$, 试证明 $\xi^{-1}(A)\subset\xi^{-1}(B)$.

证明: 若 $\omega\in\xi^{-1}(A)$, 则 $\xi(\omega)\in A\subset B$, 即 $\omega\in\xi^{-1}(B)$, 所以 $\xi^{-1}(A)\subset\xi^{-1}(B)$. □

练习3.1.2 若对每个 $n\geqslant 1$, ξ_n 为随机变量, 证明:

$$\sup_n\xi_n,\qquad \inf_n\xi_n,\qquad \overline{\lim_n}\,\xi_n,\qquad \underline{\lim_n}\,\xi_n$$

均为随机变量.

证明: 显然

$$\left\{\sup_n\xi_n\leqslant x\right\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{\xi_n\leqslant x\},$$

$$\left\{\inf_n\xi_n\leqslant x\right\}=\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{\xi_n\leqslant x+\frac{1}{m}\right\},$$

所以 $\sup_n\xi_n$ 和 $\inf_n\xi_n$ 为随机变量.

进一步,

$$\left\{\overline{\lim_n}\,\xi_n\leqslant x\right\}=\left\{\inf_n\sup_{k\geqslant n}\xi_k\leqslant x\right\}=\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{\sup_{k\geqslant n}\xi_k\leqslant x+\frac{1}{m}\right\}=\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}\left\{\xi_k\leqslant x+\frac{1}{m}\right\},$$

$$\left\{\underline{\lim_n}\,\xi_n\leqslant x\right\}=\left\{\sup_n\inf_{k\geqslant n}\xi_k\leqslant x\right\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{\inf_{k\geqslant n}\xi_k\leqslant x\right\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}\left\{\xi_k\leqslant x+\frac{1}{m}\right\},$$

所以 $\overline{\lim_n}\,\xi_n$ 和 $\underline{\lim_n}\,\xi_n$ 为随机变量. □

练习3.1.3 设 ξ 和 η 均为随机变量, 试证明 $\xi+\eta$ 为随机变量.

证明: 用 $\mathbb{Q}$ 表示有理数全体, 对于任何实数 x,

$$\{\xi+\eta>x\}=\bigcup_{r\in\mathbb{Q}}\{\xi>r,\eta>x-r\}=\bigcup_{r\in\mathbb{Q}}(\{\xi>r\}\cap\{\eta>x-r\})=\bigcup_{r\in\mathbb{Q}}\left(\overline{\{\xi\leqslant r\}}\cap\overline{\{\eta\leqslant x-r\}}\right).$$

注意到 $\mathbb{Q}$ 为可数集, 知 $\{\xi+\eta>x\}$ 为事件, 从而 $\overline{\{\xi+\eta>x\}}=\{\xi+\eta\leqslant x\}$ 为事件, 亦即 $\xi+\eta$ 为随机变量.

附: 若 $\xi+\eta>x$, 则存在 $r_1\in\mathbb{Q}$ 满足 $\xi+\eta>r_1>x$, 再由 $\xi>r_1-\eta$, 存在 $r\in\mathbb{Q}$ 满足 $\xi>r>r_1-\eta$, 此时, $\eta+r>r_1>x$, 进而 $\eta>x-r$. □

练习3.1.4 试证明互不相容事件的示性函数的线性组合为随机变量.

证明: 考虑互斥事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$, 其线性组合

$$\xi(\omega) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}(\omega),$$

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为实数, 往证 ξ 为随机变量.

对于任意实数 x, 有

$$\{\xi \leqslant x\} = \bigcup_{k: a_k \leqslant x} A_k$$

为事件, 即 ξ 为随机变量. □

练习3.1.5 若 F 为 ξ 的分布函数, 试证明如下等式

$$\mathbb{P}(\xi = x) = F(x) - F(x-), \qquad \mathbb{P}(\xi > x) = 1 - F(x), \qquad \mathbb{P}(a < \xi \leqslant b) = F(b) - F(a).$$

证明: 由概率的上连续性得

$$F(x) - F(x-) = \mathbb{P}(\xi \leqslant x) - \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\xi \leqslant x - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(x - \frac{1}{n} < \xi \leqslant x\right) = \mathbb{P}(\xi = x).$$

由补事件的概率计算公式得

$$\mathbb{P}(\xi > x) = 1 - \mathbb{P}(\xi \leqslant x) = 1 - F(x).$$

由概率的可减性得

$$\mathbb{P}(a < \xi \leqslant b) = \mathbb{P}(\xi \leqslant b) - \mathbb{P}(\xi \leqslant a) = F(b) - F(a).$$

□

练习3.1.6 设随机变量 ξ 的分布函数为 $F(x)$, 证明 $\eta = \mathrm{e}^{\xi}$ 也是随机变量, 并求 η 的分布函数.

证明: 对于任何实数 x,

$$\{\eta \leqslant x\} = \{\mathrm{e}^{\xi} \leqslant x\} = \begin{cases} \varnothing, & x \leqslant 0; \\ \{\xi \leqslant \ln x\}, & x > 0. \end{cases}$$

由 ξ 为随机变量知, η 为随机变量. 进一步, η 的分布函数为

$$F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ F(\ln x), & x > 0. \end{cases}$$

□

练习3.1.7 若 ξ 为连续型随机变量, 试证明

$$\mathbb{P}(\xi = x) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^1.$$

证明: 设 ξ 的密度函数为 $p(x)$, 由概率的上连续性得

$$\mathbb{P}(\xi = x) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(x - \frac{1}{n} < \xi \leqslant x\right) = \lim_{n\to\infty} \int_{x-\frac{1}{n}}^{x} p(t)\mathrm{d}t = 0.$$

□

练习3.1.8 假设分布函数分段可微连续函数, 试证明该分布函数为连续型的.

证明: 用 D 表示分布函数 F 的全体可微点, 由 F 分段可微知 $\overline{D}$ 至多为可列点集, 不妨假设 $\overline{D}=\{a_1,a_2,\cdots\}$, 定义

$$p(x)=\begin{cases}\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}, & x\in D;\\ 0, & x\notin D.\end{cases}$$

由 F 为连续函数和定积分的几何性质知

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(t)\mathrm{d}t,$$

即 F 为连续型分布函数. □

练习3.1.9 试证明连续型分布函数为连续增函数.

证明: 设 $p(x)$ 为分布函数 $F(x)$ 的密度函数, 则

$$F(x)-F(x+\Delta)=\int_{x+\Delta}^{x}p(x)\mathrm{d}x\xrightarrow{\Delta\to 0}0,$$

即 F 为连续函数. 再由分布函数的性质知, F 为增函数. □

练习3.1.10 在半径为 R 的车轮边缘上有一裂纹, 求随机停车后裂纹距地面高度 ξ 的分布函数.

解: 用 θ 表示裂纹与车轴连线与垂直于地面的车轴与地面连线的夹角, $\Omega=[0,\pi)$. 则对于任何 $A\in\mathscr{B}\cap\Omega$, 有

$$\mathbb{P}(\theta\in A)=\frac{m(A)}{\pi},$$

其中 $m(A)$ 表示 A 的长度. 因此当 $y\in(0,2R)$ 时, 有

$$F_\xi(y)=\mathbb{P}(R-R\cos\theta\leqslant y)=\mathbb{P}(\arccos(1-y/R)\geqslant\theta)=\frac{\arccos(1-y/R)}{\pi}.$$

显然, 当 $y\leqslant 0$ 时, $F_\xi(y)=0$; 当 $y\geqslant 2R$ 时, $F_\xi(y)=1$. 所以

$$F_\xi(y)=\begin{cases}0, & y\leqslant 0;\\ \frac{\arccos(1-y/R)}{\pi}, & 0<y<2R;\\ 1, & y\geqslant 2R.\end{cases}$$

□

练习3.1.11 设 ξ 的密度函数

$$p(x)=\mathrm{e}^{-\mathrm{e}(x-a)},\qquad x\geqslant 0,$$

求 b, 使 $\mathbb{P}(\xi>b)=b$.

解: 由密度函数的性质知

$$1=\int_{-\infty}^{\infty}p(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{e}(x-a)}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{\mathrm{e}a-1},$$

从而得 $a=\mathrm{e}^{-1}$. 要使 $\mathbb{P}(\xi>b)=b$, 只需

$$0<b=\int_{b}^{\infty}p(x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-\mathrm{e}(b-\mathrm{e}^{-1})-1}=\mathrm{e}^{-be},$$

即 $b=\mathrm{e}^{-1}$. □

练习3.1.12 设

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0;\\ \dfrac{1+2x}{3}, & 0<x\leqslant 1;\\ 1, & 1<x.\end{cases}$$

试证明 $F(x)$ 为离散型分布函数和连续型分布函数的线性组合.

证明: 记

$$F_1(x)=\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x),\qquad \widetilde{F}(x)=F(x)-\frac{1}{3}F_1(x).$$

令 $F_2(x)=\frac{3}{2}\widetilde{F}(x)$, 则 F_1 和 F_2 分别是离散型和连续型分布函数, 且

$$F(x)=\frac{1}{3}F_1(x)+\frac{2}{3}F_2(x),$$

即 F 可以写成离散型和连续型分布函数的线性组合. □

§3.2.4 练习题

练习3.2.1 向目标进行 20 次独立的射击, 假定每次命中率均为 0.2. 试求至少命中 19 次的概率.

解: 用 ξ 表示命中的次数, 则 $\xi\sim B(20,0.2)$, 则至少命中 19 次的概率为

$$\mathbb{P}(\xi\geqslant 19)=\binom{20}{19}\times 0.2^{19}\times 0.8+\binom{20}{20}\times 0.2^{20}\approx 8.4935\times 10^{-13}.$$

□

练习3.2.2 同时掷两枚骰子, 直到某个骰子出现 6 点为止. 用 ξ 表示投掷的次数, 求 ξ 的密度.

解: 用 ξ 表示第一次某骰子出现 6 点所投掷的次数, 则 $\xi\sim G(p)$, 其成功概率

$$p=\mathbb{P}(\xi=1)=1-\frac{25}{36}=\frac{11}{36},$$

其密度为

$$p_n=\mathbb{P}(\xi=n)=g\left(n;\frac{11}{36}\right)=\left(\frac{25}{36}\right)^{n-1}\frac{11}{36},\qquad n\geqslant 1.$$

□

练习3.2.3 某公司经理拟将一提案交董事代表会批准, 规定如提案获多数代表赞成则通过. 经理估计各代表对此提案投赞成票的概率为 0.6, 且各代表投票情况相互独立. 为以较大概率通过提案, 试问经理请 3 名董事代表好还是请 5 名好?

解: 用 ξ 表示投赞成票的人数, 则 $\xi\sim B(n,0.6)$, 其中 n 为所请代表人数. 当请 3 名代表时, 通过提案的概率为

$$\mathbb{P}(\xi>1)=b(2;3,0.6)+b(3;3,0.6)\approx 0.648,$$

当请 5 名代表时, 通过提案的概率为

$$\mathbb{P}(\xi>2)=b(3;5,0.6)+b(4;5,0.6)+b(5;5,0.6)\approx 0.68256,$$

所以请 5 名代表通过决议的概率较大. □

练习3.2.4 假定一硬币抛出正面的概率为 $p(0<p<1)$, 反复抛这枚硬币直至正面与反面都出现过为止, 求抛掷次数恰为 k 的概率.

解: $\{$抛掷次数恰为$k\}=\{$前$k-1$次为正面, 第k次为反面$\}\cup\{$前$k-1$次为反面, 第k次为正面$\}$. 因此有

$$P(\{\text{抛掷次数恰为}\,k\})=p^{k-1}(1-p)+(1-p)^{k-1}p,\qquad k\geqslant 2.$$

□

练习3.2.5 甲、乙两队比赛篮球. 假定每一场甲乙队获胜的概率分别为 0.6 与 0.4, 且各场胜负独立. 如果规定先胜 4 场者为冠军, 求甲队经 i 场$(i=4,5,6,7)$比赛而成为冠军的概率 p_i. 再问与"三场两胜"制相比较, 采用哪种赛制甲队最终夺得冠军的概率较小?

解: 对于 $i=4,5,6,7$ 有

$$p_i=f(i;4,0.6)=\binom{i-1}{3}\times 0.6^4\times 0.4^{i-4},$$

即

$$p_4\approx 0.1296,\qquad p_5\approx 0.2074,\qquad p_6\approx 0.2074,\qquad p_7\approx 0.1659.$$

在"先胜 4 场者为冠军"的规则下, 甲队夺冠概率为

$$p_4+p_5+p_6+p_7\approx 0.7103.$$

另一方面，在"三场两胜"制的规则下, 甲队夺冠概率为

$$f(2;2,0.6)+f(3;2,0.6)\approx 0.648.$$

所以采用"三场两胜"制甲队最终夺得冠军的概率较小. □

练习3.2.6 (Banach 火柴问题)某人口袋中有甲、乙两盒火柴, 开始时每盒火柴各装 n 根火柴. 每次他从口袋中任取一盒使用其中一根火柴. 求此人发现一盒已空, 而另一盒尚剩 r 根的概率.

解: 用 A 表示"发现甲盒已空, 乙盒剩 r 根"的事件, B 表示"发现乙盒已空, 而甲盒剩 r 根"的事件. 用 ξ_{n+1} 表示第 $n+1$ 次取到甲盒的时刻,则 $\xi_{n+1}\sim f(k;n+1,\frac{1}{2})$. 所以

$$\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(\xi_{n+1}=2n-r+1)=f\left(2n-r+1;n+1,\frac{1}{2}\right)=\binom{2n-r}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-r+1}.$$

类似地,

$$\mathbb{P}(B)=\binom{2n-r}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-r+1}.$$

注意到 $AB=\varnothing$, 知所求概率为

$$\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)=\binom{2n-r}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-r}.$$

□

练习3.2.7 在可列重 Bernoulli 实验中，以 ξ_i 表第 i 次成功的等待时间, 求证 $\xi_2-\xi_1$ 与 ξ_1 有相同的概率分布.

证明: 对于任何自然数 n, 由全概率公式

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\xi_2-\xi_1=n)&=\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(\xi_1=i)\mathbb{P}(\xi_2-\xi_1=n|\xi_1=i)\\&=\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(\xi_1=i)\mathbb{P}(\xi_2=n+i|\xi_1=i)\\&=\sum_{i=1}^{\infty}q^{i-1}pq^{n-1}p=q^{n-1}p,\end{aligned}$$

即 $\xi_2-\xi_1$ 与ξ_1 有相同的概率分布. □

练习3.2.8 广义 Bernoulli 实验中假定一实验有 r 个可能结果 $A_1,A_2,\cdots,A_r$, 并且 $\mathbb{P}(A_i)=p_i>0$, $p_1+p_2+\cdots+p_r=1$. 现将此实验独立地重复 n 次. 求 A_1 恰出现入 k_1 次, $\cdots$, A_r 恰出现 k_r 次($k_i\geqslant 0,k_1+k_2+\cdots+k_r=n$)的概率.

解: 用 ξ_i 表示在 n 次试验中事件 A_i 出现的次数($i=1,2,\cdots,r$), 则由概率的有限可加性和试验的独立性得

$$\mathbb{P}(\xi_1=k_1,\cdots,\xi_r=k_r)=\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!}p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_r^{k_r},\qquad k_i\geqslant 0,1\leqslant i\leqslant r,\sum_{i=1}^{r}k_i=n.$$

□

§3.3.3 练习题

练习3.3.1 假定一本 500 页的书总共有 500 个错字, 每个错字等可能地出现在每一页上. 试用 Poisson 分布近似计算指定一页上有至少 3 个错字的概率.

解: 用 ξ 表示该页上错字的数目, 则 $\xi\sim B(500,0.002)$, 从而

$$\mathbb{P}(\xi\geqslant 3)=1-\sum_{i=0}^{2}b(i;500,0.002)\approx 1-\sum_{i=0}^{2}p(i;1)\approx 0.8.$$

□

练习3.3.2 假设一块放射性物质在单位时间内放射出的 α 粒子数 $\xi\sim P(\lambda)$, 而每个放射出的 α 粒子被仪器记录下来的概率均为 p. 如果各粒子是否被记录相互独立, 试求被记录下例子数 η 的分布.

解: 记

$$\eta_i=\begin{cases}1, & \text{第}\,i\,\text{个粒子被仪器记录下来;}\\0, & \text{否则.}\end{cases}$$

则 $\{\eta_i\}$ 为独立同分布随机变量序列, $\eta_i\sim B(1,p)$. 进一步，记录下的 α 粒子数 $\eta=\sum\limits_{i=1}^{\xi}\eta_i$, 且 $\{\eta_i\}$ 与 ξ 相互独立. 由 Poisson 分布的随机选择不变性知, $\eta\sim P(\lambda p)$. □

练习3.3.3 在 Poisson 粒子流中, 用 ξ_t 表示 $(0,t]$ 时间段内到达的粒子数, 用 η 表示第一个粒子到达的时间, 试证明

$$\mathbb{P}(\eta \leqslant s|\xi_t = 1) = \frac{s}{t}, \qquad s \in (0,t].$$

解: 不妨设粒子流的强度为 $\lambda > 0$. 注意到 $\{\eta \leqslant s\} = \{\xi_s \geqslant 1\}$, 有

$$\mathbb{P}(\eta \leqslant s|\xi_t = 1) = \mathbb{P}(\xi_s \geqslant 1|\xi_t = 1) = \frac{\mathbb{P}(\xi_s \geqslant 1, \xi_t = 1)}{\mathbb{P}(\xi_t = 1)}.$$

再注意到 $s \leqslant t$, 由独立增量性和平移不变性得

$$\mathbb{P}(\xi_s \geqslant 1, \xi_t = 1) = \mathbb{P}(\xi_s = 1, \xi_t = 1) = \mathbb{P}(\xi_s = 1, \xi_t - \xi_s = 0) = \mathbb{P}(\xi_s = 1)\mathbb{P}(\xi_{t-s} = 0).$$

由于 $\xi_t \sim P(\lambda t)$, 所以

$$\mathbb{P}(\eta \leqslant s|\xi_t = 1) = \frac{\lambda s \mathrm{e}^{-\lambda s}\mathrm{e}^{-\lambda(t-s)}}{\lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t}} = \frac{s}{t}, \qquad s \in (0,t].$$

□

练习3.3.4 据以往的记录, 某商店每月出售的电视机台数 ξ 服从参数 $\lambda = 7$ 的 Poisson 分布. 问月初应库存多少台电视机, 才能以 0.999 的概率保证满足顾客对电视机的需求?

解: 设月初应库存 n 台电视机, 则

$$\mathbb{P}(\xi \leqslant n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{7^k}{k!}\mathrm{e}^{-7}.$$

注意到

$$\sum_{k=0}^{15} \frac{7^k}{k!}\mathrm{e}^{-7} < 0.999 < \sum_{k=0}^{16} \frac{7^k}{k!} texte^{-7}.$$

得结论: 当 $n \geqslant 16$ 时能够满足要求. □

练习3.3.5 假定每小时进入某商店的顾客数 ξ 服从 $\lambda = 200$ 的 Poisson 分布, 而进来的顾客将购买商品的概率均为 0.05, 且各顾客是否购物相互独立. 求在 1 小时中至少有 6 位顾客在此商店中购物的概率.

解: 用 η 表示在商店中购物的人数, 则由 Poisson 分布的随机选择不变性知, $\eta \sim P(0.05 \times 200)$, 所以至少有 6 位顾客在此商店中购物的概率为

$$\mathbb{P}(\eta \geqslant 6) = 1 - \sum_{i=0}^{5} p(i;10) \approx 0.9329.$$

□

练习3.3.6 通过一交叉路口的汽车流可看作一个 Poisson 过程. 如果 1 分钟内没有汽车通过的概率为 0.02. 求 2 分钟内有多于 1 辆汽车通过的概率.

解: 用 ξ_t 表示 $(0,t]$ 时间段内通过交叉路口的汽车辆数, 则 $\xi_t \sim P(\lambda t)$. 注意到 $\mathrm{e}^{-\lambda} = \mathbb{P}(\xi_1 = 0) = 0.02$, 得 2 分钟内有多于 1 辆汽车通过的概率

$$\mathbb{P}(\xi_2 > 1) = 1 - \mathbb{P}(\xi_2 \leqslant 1) = 1 - \mathrm{e}^{-2\lambda} - 2\lambda\mathrm{e}^{-2\lambda} \approx 0.9965.$$

□

练习3.3.7 设单调(或连续)函数 f 满足条件

$$f(x+y)=f(x)f(y)$$

且不恒等于 0, 证明存在数 a, 使得 $y=a^x$.

证明: 对于任何正整数 m 和 n, 有

$$f(n)=(f(1))^n, \qquad f(n)=\left(f\left(\frac{n}{m}\right)\right)^m, \qquad f\left(\frac{n}{m}\right)=(f(1))^{n/m}.$$

所以对于任何有理数 $r>0$ 有: $f(r)=(f(1))^r$. 记 $a=f(1)\geqslant 0$. 由函数的单调(或连续)性得

$$f(x)=a^x, \qquad x>0.$$

若能证明 $f(0)=1$, 则 $f(x)f(-x)=1$, 即 $f(-x)=(f(x))^{-1}=a^{-x}$, 亦即

$$f(x)=a^x, \qquad x\in\mathbb{R}.$$

所以只需证明 $f(0)=1$.

显然, $a=f(1)=f(0)f(1)$. 再注意到 f 不恒等于 0, 得 $a\neq 0$, 进而得 $f(0)=1$. □

练习3.3.8 试证, 如果非负整值离散型分布的密度 $\{p_k, k=0,1,\cdots\}$ 满足条件

$$\frac{p_k}{p_{k-1}}=\frac{\lambda}{k}, \qquad k\geqslant 1,$$

其中常数 $\lambda>0$, 则此分布是以 λ 为参数的 Poisson 分布.

证明: 显然, 当 $k\geqslant 1$ 时有: $p_k=\frac{\lambda}{k}p_{k-1}$. 递推得

$$p_k=\frac{\lambda^k}{k!}p_0.$$

注意到 $1=\sum\limits_{k=0}^{\infty}p_k$, 得 $p_0=\mathrm{e}^{-\lambda}$, 所以

$$p_k=p(k;\lambda), \qquad k\geqslant 0,$$

即此分布是以 λ 为参数的 Poisson 分布. □

§3.4.4 练习题

练习3.4.1 在 $\triangle ABC$ 内任取一点 M, 连结 AM 并延长, 与边 BC 相交于 N, 试证明点 N 的坐标在线段 BC 构成的区间上均匀分布.

证明: 用 ξ 表示线段 BN 的长度, b 表示 BC 的长度, 则 $\xi\in(0,b)$. 记 h 为$\triangle ABC$ 的以 BC 为底边的高, 根据几何概型的定义有

$$\mathbb{P}(\xi\leqslant x)=\frac{hx/2}{hb/2}=\frac{x}{b}, \qquad x\in(0,b),$$

即 $\xi\sim U(0,b)$. □

练习3.4.2 假设 $\xi\sim N(a,\sigma^2)$, $\eta=c\xi+d$, 其中 c 和 d 为实数, 且 $c>0$. 试证明 $\eta\sim N(ca+d,(c\sigma)^2)$.

证明: 显然, 有

$$F_\eta(x)=\mathbb{P}(\eta\leqslant x)=\mathbb{P}\left(\xi\leqslant\frac{x-d}{c}\right)=\Phi\left(\frac{\frac{x-d}{c}-a}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{x-(ca+d)}{c\sigma}\right)=\Phi_{(ca+d),(c\sigma)}(x).$$

所以 $\eta\sim N(ca+d,(c\sigma)^2)$. □

练习3.4.3 假设 $a<b$, 试证明 $\Phi_{a,\sigma}(x)>\Phi_{b,\sigma}(x)$.

证明: 设 $\xi\sim N(a,\sigma^2)$, 则 $\xi+(b-a)\sim N(b,\sigma^2)$, 因此

$$\Phi_{a,\sigma}(x)=\mathbb{P}(\xi\leqslant x)>\mathbb{P}(\xi\leqslant x-(b-a))=\mathbb{P}(\xi+(b-a)\leqslant x)=\Phi_{b,\sigma}(x).$$

□

练习3.4.4 试证明 $\Phi_{a,\sigma}(a+x)=1-\Phi_{a,\sigma}(a-x)$.

证明: 事实上,

$$\Phi_{a,\sigma}(a+x)=\Phi\left(\frac{(a+x)-a}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right)=1-\Phi\left(-\frac{x}{\sigma}\right).$$

注意到

$$\Phi\left(-\frac{x}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{(a-x)-a}{\sigma}\right)=\Phi_{a,\sigma}(a-x).$$

得证结论. □

练习3.4.5 假设学生的成绩 $\xi\sim N(a,\sigma^2)$. 若规定分数在 $a+\sigma$ 以上为"优秀", a 至 $a+\sigma$ 之间为"良好", $a-\sigma$ 至 a 之间为"一般", $a-\sigma$ 以下为"较差". 试求这四个等级的学生各占多大比例($\Phi(1)=0.8413$).

解: 令 $\eta=\frac{\xi-a}{\sigma}$, 则 $\eta\sim N(0,1)$. 因此

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\xi>a+\sigma)=\mathbb{P}(\eta>1)=1-\Phi(1)=0.1587,\\
&\mathbb{P}(a<\xi\leqslant a+\sigma)=\mathbb{P}(0<\eta\leqslant 1)=\Phi(1)-\frac{1}{2}=0.3413,\\
&\mathbb{P}(a-\sigma<\xi\leqslant a)=\mathbb{P}(-1<\eta\leqslant 0)=\Phi(1)-\frac{1}{2}=0.3413,\\
&\mathbb{P}(\xi\leqslant a-\sigma)=\mathbb{P}(\eta\leqslant -1)=1-\Phi(1)=0.1587.
\end{aligned}$$

因此这四个等级的学生各占比例分别为 0.1587, 0.3413, 0.3413 和 0.1587. □

练习3.4.6 设 ξ 服从参数为 λ 的指数分布, 求 $\eta=[\xi]+1$ 的分布.

解: 显然, η 为取正整数值的随机变量, 其密度

$$p_k=\mathbb{P}(\eta=k)=\mathbb{P}(k-1\leqslant\xi<k)=\int_{k-1}^{k}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-\lambda(k-1)}(1-\mathrm{e}^{-\lambda}),\qquad k\geqslant 1,$$

即 $\eta\sim G(1-\mathrm{e}^{-\lambda})$. □

§3.5.5 练习题

练习3.5.1 试证明定理3.1.9.

证明: 对于任何 $B \in \mathscr{B}$, $g^{-1}(B) \in \mathscr{B}^n$. 注意到 $(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ 为随机向量知,

$$\eta^{-1}(B) = \{(\xi_1, \cdots, \xi_n) \in g^{-1}(B)\} \in \mathscr{F},$$

所以 η 为随机变量. □

练习3.5.2 将两个不同的球任意放入编号为 $1, 2, 3$ 的三个盒, 每球入各盒均等可能. 以 ξ 表示空盒个数, η 表示有球盒的最小编号. 试求 (ξ, η) 的联合分布密度及 $\mathbb{P}(\xi = \eta)$.

解: ξ 和 η 的取值分别为 $1, 2$ 和 $1, 2, 3$. 于是

$$p_{11} = \mathbb{P}(\xi = 1, \eta = 1) = \mathbb{P}(1\text{号盒仅有一球}) = 4/9,$$

$$p_{12} = \mathbb{P}(\xi = 1, \eta = 2) = \mathbb{P}(2, 3\text{号盒各一球}) = 2/9,$$

$$p_{13} = \mathbb{P}(\xi = 1, \eta = 3) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0,$$

$$p_{2j} = \mathbb{P}(\xi = 2, \eta = j) = \mathbb{P}(\text{两球均在} j \text{号盒中}) = 1/9, \quad j = 1, 2, 3.$$

所以联合密度矩阵为:

$$\begin{pmatrix} (1,1) & (1,2) & (2,1) & (2,2) & (2,3) \\ 4/9 & 2/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 \end{pmatrix}.$$

进而 $\mathbb{P}(\xi = \eta) = \sum\limits_{i=j} p_{ij} = p_{11} + p_{22} = 5/9$. □

练习3.5.3 甲、乙两人轮流投篮. 假定每次甲的命中率为 0.4, 乙的命中率为 0.6, 且各次投篮相互独立. 现甲先投, 乙再投, 直至有人命中为止. 试求甲与乙投篮次数 ξ 与 η 的联合分布密度与边缘分布密度.

解: 记 $p_{nm} = \mathbb{P}(\xi = n, \eta = m)$. 当 $n = m + 1$ 时,

$$p_{nm} = 0.6^m \times 0.4 \times 0.4^m = 0.4 \times 0.24^m;$$

当 $n = m$ 时,

$$p_{nm} = 0.6^m \times 0.4^{m-1} \times 0.6 = 0.36 \times 0.24^{m-1};$$

在其他情况下, $p_{nm} = 0$. 所以 ξ 与 η 的联合分布密度为:

$$p_{nm} = \begin{cases} 0.4 \times 0.24^m, & 1 \leqslant n = m + 1; \\ 0.36 \times 0.24^{m-1}, & 1 \leqslant n = m. \end{cases}$$

ξ 的边缘分布密度

$$p_{n\bullet} = 0.76 \times 0.24^{n-1}, \qquad n \geqslant 1;$$

η 的边缘分布密度

$$p_{\bullet m} = \begin{cases} 0.4, & m = 0; \\ 0.456 \times 0.24^{m-1}, & m \geqslant 1. \end{cases}$$

□

练习3.5.4 $f(x)$ 是某非负值随机变量的密度函数, 试证

$$p(x, y) = \frac{f(x + y)}{x + y}, \qquad x, y > 0$$

是二维密度函数.

证明: 显然 $p(x,y)\geqslant 0$, 且

$$\iint_{\mathbb{R}^2} p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x+y)}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

令 $s=x, t=x+y$, 有

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix}=1.$$

从而

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x+y)}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{0<s<t<\infty}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}s\mathrm{d}t=\int_0^\infty \mathrm{d}t\int_0^t\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}s=\int_0^\infty f(t)\mathrm{d}t=1,$$

即 $p(x,y)$ 是二维密度函数. □

练习3.5.5 设 (ξ,η) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=a(6-x-y),\qquad 0<x<2<y<4,$$

求常数 a, 以及 ξ 和 η 的边缘密度函数.

解: 由

$$1=a\int_0^2\mathrm{d}x\int_2^4(6-x-y)\mathrm{d}y=a\int_0^2(6-2x)\mathrm{d}x=8a$$

知, $a=\frac{1}{8}$. 进一步,

$$p_\xi(x)=\int_2^4\frac{6-x-y}{8}\mathrm{d}y=\frac{3-x}{4},\qquad 0<x<2;$$
$$p_\eta(y)=\int_0^2\frac{6-x-y}{8}\mathrm{d}x=\frac{5-y}{4},\qquad 2<y<4.$$

□

练习3.5.6 在可列重 Bernoulli 实验中, 以 ξ_i 表第 i 次成功的等待时间, 试求 (ξ_1,ξ_2) 的 (1) 联合分布密度; (2) 边缘分布密度.

解: (1) 用 p 表示成功概率, $q=1-p$, 则 (ξ_1,ξ_2) 的联合分布密度为

$$\begin{aligned}p_{mn}&\triangleq\mathbb{P}(\xi_1=m,\xi_2=n)\\&=\mathbb{P}(\{\text{前}\,m-1\,\text{次失败}\})\mathbb{P}(\{\text{第}\,m\,\text{次成功}\})\mathbb{P}(\{\text{第}\,m+1\,\text{到}\,n-1\,\text{次失败}\})\mathbb{P}(\{\text{第}\,n\,\text{次成功}\})\\&=p^2q^{n-2},\qquad 1\leqslant m<n.\end{aligned}$$

(2) ξ_1 的边缘分布密度为

$$p_{m\bullet}=\sum_{n=m+1}^\infty p^2q^{n-2}=pq^{m-1},\qquad m\geqslant 1;$$

ξ_2 的边缘分布密度为

$$p_{\bullet n}=\sum_{m=1}^{n-1}p^2q^{n-2}=(n-1)p^2q^{n-2},\qquad n\geqslant 2.$$

□

练习3.5.7 雷达圆形屏幕的半径为 R, 设其上出现目标点 (ξ,η) 的联合密度为

$$p(x,y)=a,\qquad x^2+y^2<R^2,$$

求常数 a, 以及 ξ 和 η 的边缘密度函数.

解: 由

$$1=\iint_{x^2+y^2<R}a\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a\pi R^2$$

知, $a=\frac{1}{\pi R^2}$. 进一步,

$$p_\xi(x)=\frac{1}{\pi R^2}\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}y=\frac{2\sqrt{R^2-x^2}}{\pi R^2},\qquad -R<x<R;$$
$$p_\eta(y)=\frac{1}{\pi R^2}\int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}}\mathrm{d}x=\frac{2\sqrt{R^2-y^2}}{\pi R^2},\qquad -R<y<R.$$

□

练习3.5.8 设 $\xi\sim N(0,1)$, 试证明

$$\mathbb{P}(-a<\xi<a)\leqslant\sqrt{1-\mathrm{e}^{-a^2}},\qquad a>0.$$

证明: 取与 ξ 相互独立的随机变量 $\eta\sim N(0,1)$, 记 $I\triangleq\mathbb{P}(-a<\xi<a)$, 则

$$\begin{aligned}I^2&=\mathbb{P}(|\xi|<a,|\eta|<a)\leqslant\mathbb{P}(\xi^2+\eta^2<2a^2)\\&=\iint\limits_{x^2+y^2<2a^2}\frac{1}{2\pi}\exp\Big(-\frac{x^2+y^2}{2}\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}a}\frac{1}{2\pi}r\mathrm{e}^{-r^2/2}\mathrm{d}r=1-\mathrm{e}^{-a^2},\end{aligned}$$

从而知结论成立. □

练习3.5.9 设随机向量 (ξ,η,ζ) 有联合密度函数

$$p(x,y,z)=xz\mathrm{e}^{-(x+xy+z)},\qquad x,y,z>0,$$

试求 (1) ξ,η 的边缘密度; (2) (ξ,ζ) 的二维边缘密度.

解: (1) ξ 的边缘密度为

$$p_1(x)=\iint\limits_{\mathbb{R}^2}p(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^\infty\mathrm{d}y\int_0^\infty xz\mathrm{e}^{-(x+xy+z)}\mathrm{d}z=\mathrm{e}^{-x},\qquad x>0;$$

η的边缘密度为

$$p_2(y)=\iint\limits_{\mathbb{R}^2}p(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}z=\int_0^\infty\mathrm{d}x\int_0^\infty xz\mathrm{e}^{-(x+xy+z)}\mathrm{d}z=\frac{1}{(y+1)^2},\qquad y>0.$$

(2) (ξ,ζ) 的二维边缘密度为

$$p_{13}(x,z)=\int_{-\infty}^\infty p(x,y,z)\mathrm{d}y=\int_0^\infty xz\mathrm{e}^{-(x+xy+z)}\mathrm{d}y=z\mathrm{e}^{-(x+z)},\qquad x>0,z>0.$$

□

§3.6.4 练习题

练习3.6.1 设随机向量 (ξ,η) 的联合密度

$$p(x,y)=24y(1-x-y),\qquad x,y>0,x+y<1.$$

对于 $x\in(0,1)$, 求已知 $\xi=x$ 时 η 的条件密度函数.

解: 因为

$$p_1(x)=\int_0^{1-x}24y(1-x-y)\mathrm{d}y=4(1-x)^3,\qquad 0<x<1,$$

所以对于 $x\in(0,1)$, $\xi=x$ 时 η 的条件密度函数为

$$p(y|\xi=x)=\frac{p(x,y)}{p_1(x)}=\frac{6y(1-x-y)}{(1-x)^3},\qquad 0<y<1-x.$$

□

练习3.6.2 设 (ξ,η) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\frac{1}{2}\sin(x+y),\qquad 0<x,y<\frac{\pi}{2}.$$

对于 $y\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, 求已知 $\eta=y$ 时 ξ 的条件密度函数.

解: η 的边缘密度函数

$$p_2(y)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\sin(x+y)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(\sin y+\cos y),\qquad 0<y<\frac{\pi}{2},$$

所以对于 $y\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $\eta=y$ 时 ξ 的条件密度函数为

$$p(x|\eta=y)=\frac{p(x,y)}{p_2(y)}=\frac{\sin(x+y)}{\sin y+\cos y},\qquad 0<x<\frac{\pi}{2}.$$

□

练习3.6.3 设随机变量 ξ 有密度函数

$$p_1(x)=\lambda^2x\mathrm{e}^{-\lambda x},\qquad x>0,$$

而 η 服从区间 $(0,\xi)$ 上的均匀分布. 试求 η 的密度函数.

解: 因为 $\eta\sim U(0,\xi)$, 所以已知 $\xi=x$ 时 η 的条件密度函数为

$$p(y|\xi=x)=\frac{1}{x},\qquad 0<y<x,$$

从而 ξ 与 η 的联合密度函数为

$$p(x,y)=p(y|\xi=x)p_1(x)=\lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda x},\qquad 0<y<x.$$

因此 η 的密度函数为

$$p_2(y)=\int_y^{\infty}\lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x=\lambda\mathrm{e}^{-\lambda y},\qquad y>0.$$

□

练习3.6.4 甲从 $1,2,3,4$ 中任取一数 ξ, 乙再从 $1,2,\cdots,\xi$ 中任取一数 η. 试求 (ξ,η) 的联合分布密度与边缘分布密度.

解: 由概率乘法公式得联合分布密度

$$p_{nm}=\mathbb{P}(\xi=n,\eta=m)=\mathbb{P}(\xi=n)\mathbb{P}(\eta=m|\xi=n)=\frac{1}{4n},\qquad 1\leqslant m\leqslant n\leqslant 4.$$

进而 ξ 和 η 的边缘分布密度分别为

$$p_{n\bullet}=\sum_{m=1}^{n}p_{nm}=\frac{1}{4},\qquad 1\leqslant n\leqslant 4;\qquad p_{\bullet m}=\sum_{n=m}^{4}p_{nm}=\sum_{n=m}^{4}\frac{1}{4n},\qquad 1\leqslant m\leqslant 4.$$

□

练习3.6.5 设随机向量 (ξ,η) 的联合密度函数

$$p(x,y)=4xy,\qquad 0<x,y<1,$$

试证明 ξ 和 η 相互独立.

证明: 因为 ξ 和 η 的边缘分布密度函数分别为

$$p_1(x)=\int_0^1 4xy\mathrm{d}y=2x,\qquad 0<x<1;\qquad p_2(y)=\int_0^1 4xy\mathrm{d}x=2y,\qquad 0<y<1,$$

则 $p(x,y)=p_1(x)p_2(y)$, 所以 ξ 与 η 相互独立. □

练习3.6.6 设随机向量 (ξ,η) 的联合密度函数

$$p(x,y)=8xy,\qquad 0<x<y<1,$$

问 ξ 与 η 是否独立?请证明你的结论.

解: 由于ξ 和 η 的边缘分布密度函数分别为

$$p_1(x)=\int_x^1 8xy\mathrm{d}y=4x(1-x^2),\qquad 0<x<1;\qquad p_2(y)=\int_0^y 8xy\mathrm{d}x=4y^3,\qquad 0<y<1,$$

所以 $p(x,y)\neq p_1(x)p_2(y)$, 即 ξ 与 η 不相互独立. □

练习3.6.7 设随机向量 (ξ,η) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\frac{1+xy}{4},\qquad |x|<1,|y|<1,$$

试证明 ξ^2 和 η^2 相互独立.

证明: 显然, 当 $x>0,y>0$ 时

$$
\begin{aligned}
F_{(\xi^2,\eta^2)}(x,y)=\mathbb{P}(-\sqrt{x}\leqslant\xi\leqslant\sqrt{x},-\sqrt{y}\leqslant\eta\leqslant\sqrt{y})&=\int_{-(1\wedge\sqrt{x})}^{1\wedge\sqrt{x}}\mathrm{d}u\int_{-(1\wedge\sqrt{y})}^{1\wedge\sqrt{y}}\frac{1+uv}{4}\mathrm{d}v\\
&=\int_{-(1\wedge\sqrt{x})}^{1\wedge\sqrt{x}}\frac{1\wedge\sqrt{y}}{2}\mathrm{d}u=(1\wedge\sqrt{x})(1\wedge\sqrt{y}),\\
G_1(x)=\mathbb{P}(-\sqrt{x}\leqslant\xi\leqslant\sqrt{x})&=\int_{-(1\wedge\sqrt{x})}^{1\wedge\sqrt{x}}\mathrm{d}u\int_{-1}^{1}\frac{1+uv}{4}\mathrm{d}v\\
&=\int_{-(1\wedge\sqrt{x})}^{1\wedge\sqrt{x}}\frac{1}{2}\mathrm{d}u=1\wedge\sqrt{x},\\
G_2(y)=\mathbb{P}(-\sqrt{y}\leqslant\eta\leqslant\sqrt{y})&=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}u\int_{-(1\wedge\sqrt{y})}^{1\wedge\sqrt{y}}\frac{1+uv}{4}\mathrm{d}v\\
&=\int_{-1}^{1}\frac{1\wedge\sqrt{y}}{2}\mathrm{d}u=1\wedge\sqrt{y},
\end{aligned}
$$

则

$$F_{(\xi^2,\eta^2)}(x,y)=G_1(x)G_2(y)$$

即 ξ^2 和 η^2 相互独立. □

练习3.6.8 若 ξ,η 独立, 都服从 -1 与 1 这两点上的等可能分布, 而 $\zeta=\xi\eta$. 求证 ξ,η,ζ 两两独立但不相互独立.

证明: (ξ,η,ζ) 的联合分布密度

$$p_{ijk}=\mathbb{P}(\xi=i,\eta=j,\zeta=k)=1/4,\qquad i,j=\pm1,k=i\times j.$$

ζ 的边缘分布密度

$$p_{\bullet\bullet k}=\mathbb{P}(\zeta=k)=\mathbb{P}(\xi=1,\zeta=k)+\mathbb{P}(\xi=-1,\zeta=k)=\frac{1}{2},\qquad k=\pm1,$$

ξ 和 η 的边缘密度分别为

$$
\begin{aligned}
p_{i\bullet\bullet}&=\mathbb{P}(\xi=i)=\mathbb{P}(\xi=i,\zeta=1)+\mathbb{P}(\xi=i,\zeta=-1)=\frac{1}{2},\qquad i=\pm1,\\
p_{\bullet j\bullet}&=\mathbb{P}(\eta=j)=\mathbb{P}(\eta=j,\zeta=1)+\mathbb{P}(\eta=j,\zeta=-1)=\frac{1}{2},\qquad j=\pm1,
\end{aligned}
$$

显然 $p_{111}\neq p_{1\bullet\bullet}p_{\bullet1\bullet}p_{\bullet\bullet1}$, 所以 ξ,η,ζ 不相互独立.

另一方面, 由联合密度得其三个二元边缘密度

$$p_{ij\bullet}=p_{i\bullet k}=p_{\bullet jk}=\frac{1}{4},\qquad i,j,k=\pm1,$$

从而

$$p_{ij\bullet}=p_{i\bullet\bullet}p_{\bullet j\bullet},\qquad p_{i\bullet k}=p_{i\bullet\bullet}p_{\bullet\bullet k},\qquad p_{\bullet jk}=p_{\bullet j\bullet}p_{\bullet\bullet k},\qquad i,j,k=\pm1,$$

即 ξ,η,ζ 两两独立. □

练习3.6.9 试证常数 c 与任何随机变量 ξ 相互独立.

证明: 设 ξ 为任意一个随机变量, 则任意 $A, B \in \mathscr{B}$,

$$\mathbb{P}(c \in A, \xi \in B) = \begin{cases} 0, & c \notin A; \\ \mathbb{P}(\xi \in B), & c \in A. \end{cases}$$

注意到

$$\mathbb{P}(c \in A) = \begin{cases} 0, & c \notin A; \\ 1, & c \in A. \end{cases}$$

故有

$$\mathbb{P}(c \in A, \xi \in B) = \mathbb{P}(c \in A)\mathbb{P}(\xi \in B), \qquad A, B \in \mathscr{B},$$

即常数 c 与随机变量 ξ 相互独立. □

练习3.6.10 设 $\mathbb{F}$ 和 $\mathbb{G}$ 为分布, $p \in [0,1]$, 试证明

$$\mathbb{H} = p\mathbb{F} + (1-p)\mathbb{G}$$

为分布.

证明: 取相互独立的随机变量 ξ, η 和 ζ, 使得

$$\xi \sim \mathbb{F}, \qquad \eta \sim \mathbb{G}, \qquad \zeta \sim B(1,p).$$

定义 $\gamma = \xi\zeta + \eta(1-\zeta)$, 则对于任何 $B \in \mathscr{B}$, 由全概率公式和随机变量的独立性得

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\gamma \in B) &= \mathbb{P}(\zeta = 1)\mathbb{P}(\gamma \in B|\zeta = 1) + \mathbb{P}(\zeta = 0)\mathbb{P}(\gamma \in B|\zeta = 0) \\ &= p\mathbb{P}(\xi \in B|\zeta = 1) + (1-p)\mathbb{P}(\eta \in B|\zeta = 0) \\ &= p\mathbb{P}(\xi \in B) + (1-p)\mathbb{P}(\eta \in B) \\ &= p\mathbb{F}(B) + (1-p)\mathbb{G}(B) = \mathbb{H}(B), \end{aligned}$$

因此 $\mathbb{H}$ 为 γ 的分布. □

练习3.6.11 设 ξ 有母函数 $G(s) = \mathrm{e}^{s-1}$, 求 ξ 的分布密度.

解: 因为

$$\mathrm{e}^{s-1} = \mathrm{e}^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}s^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-1}}{n!}s^n,$$

所以 ξ 的密度为

$$\mathbb{P}(\xi = n) = \frac{\mathrm{e}^{-1}}{n!}, \qquad n \geqslant 0.$$

□

练习3.6.12 某城镇共有 1000 辆汽车, 牌照号自 000 至 999. 试用母函数求在此城街上任遇一汽车, 其牌照号数字之和等于 9 的概率.

解: 用 ξ_i 表示汽车牌照第 i 位数字($i = 1, 2, 3$), 则 $\xi = \sum\limits_{i=1}^{3} \xi_i$ 为牌照数字之和, 且

$$G_{\xi_i}(s) = \frac{1}{10}\sum_{j=0}^{9} s^j, \qquad i = 1, 2, 3,$$

从而

$$G_\xi(s) = \left(\frac{1}{10}\sum_{j=0}^{9} s^j\right)^3 = \frac{1}{1000}\left(\frac{1-s^{10}}{1-s}\right)^3$$
$$= \frac{1}{1000}\left(1 - \binom{3}{1}s^{10} + \binom{3}{2}s^{20} - \binom{3}{3}s^{30}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{2}s^n,$$

故所求概率为

$$\mathbb{P}(\xi = 9) = \frac{1}{1000}\cdot\frac{(9+1)(9+2)}{2} = \frac{11}{200}.$$

附:

$$\frac{1}{(1-s)^3} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{2}s^n, \qquad 0 < s < 1.$$

□

练习3.6.13 甲、乙两人各掷均匀的硬币 n 次, 用母函数的方法计算甲得正面数比乙得正面数多 $k(0 \leqslant k \leqslant n)$的概率.

解: 用 ξ 和 η 分别表示甲和乙得正面的次数, 记 $\zeta = \xi - \eta + n$, 则 ζ 为非负整数值随机变量, 且 $\{\xi - \eta = k\} = \{\zeta = n + k\}$. 由硬币的均匀性得

$$G_\xi(s) = \left(\frac{1+s}{2}\right)^n, \qquad G_{n-\eta}(s) = \left(\frac{1+s}{2}\right)^n,$$

再由 ξ 与 η 的独立性知

$$G_\zeta(s) = \left(\frac{1+s}{2}\right)^{2n} = \left(\frac{1}{4}\right)^n\sum_{j=0}^{2n}\binom{2n}{j}s^j.$$

因此所求概率为

$$\mathbb{P}(\xi - \eta = k) = \mathbb{P}(\zeta = n + k) = \left(\frac{1}{4}\right)^n\binom{2n}{n+k}, \qquad 0 \leqslant k \leqslant n.$$

□

§3.7.6 练习题

练习3.7.1 设 $\xi \sim \Gamma(1,1)$, $a > 0$, $b > 0$, 试证明 $\eta = b\xi^{1/a}$ 的密度函数

$$p_\eta(x) = \frac{a}{b}\left(\frac{x}{b}\right)^{a-1}\exp\left(-\left(\frac{x}{b}\right)^a\right), \qquad x > 0,$$

称 η 的分布为 **Weibull 分布**, 简记为 $W(a,b)$, a 和 b 称为该分布的形状参数和尺度参数.

证明: 易见

$$F_\eta(x) = \mathbb{P}(b\xi^{1/a} \leqslant x) = \mathbb{P}\left(\xi \leqslant \left(\frac{x}{b}\right)^a\right) = F_\xi\left(\left(\frac{x}{b}\right)^a\right), \qquad x > 0.$$

因此 η 的密度函数

$$p_\eta(x) = \frac{\mathrm{d}F_\eta(x)}{\mathrm{d}x} = p_\xi\left(\left(\frac{x}{b}\right)^a\right)\left(\left(\frac{x}{b}\right)^a\right)' = \frac{a}{b}\left(\frac{x}{b}\right)^{a-1}\exp\left(-\left(\frac{x}{b}\right)^a\right), \qquad x > 0.$$

□

练习3.7.2 设 ξ 的密度函数为 $p(x), x \in (a,b)$, $f(x)$ 为 (a,b) 上的严格单减可微函数, $h(y)$ 为其反函数, 试证明 $\eta = f(\xi)$ 的密度函数为

$$p_\eta(y) = p(h(y))|h'(y)|, \qquad y \in (f(b), f(a)).$$

证明: 对于任何 $y \in (f(b), f(a))$, 有

$$F_\eta(y) = \mathbb{P}(\eta \leqslant y) = \mathbb{P}(\xi \geqslant h(y)) = 1 - F_\xi(h(y)).$$

因此

$$p_\eta(y) = \frac{\mathrm{d}F_\eta(y)}{\mathrm{d}y} = -p_\xi(h(y))h'(y) = p_\xi(h(y))|h'(y)|, \qquad y \in (f(b), f(a)).$$

□

练习3.7.3 若 $\xi \sim N(a, \sigma^2)$, $\eta = \mathrm{e}^\xi$, 试证明 η 的密度函数为

$$p_\eta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \exp\left(- \frac{(\ln x - a)^2}{2\sigma^2} \right), \qquad x > 0.$$

称 η 的分布为**对数正态分布**.

证明: 显然, 当 $x \leqslant 0$ 时, $F_\eta(x) = 0$. 当 $x > 0$ 时,

$$F_\eta(x) = \mathbb{P}(\mathrm{e}^\xi \leqslant x) = \mathbb{P}(\xi \leqslant \ln x) = F_\xi(\ln x),$$

所以

$$p_\eta(x) = \frac{\mathrm{d}F_\eta(x)}{\mathrm{d}x} = p_\xi(\ln x)(\ln x)' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \exp\left(- \frac{(\ln x - a)^2}{2\sigma^2} \right), \qquad x > 0.$$

□

练习3.7.4 设 ξ 和 η 相互独立, 同服从参数为 p 的几何分布, 试求 $\xi + \eta$ 和 $\xi \vee \eta$ 的密度.

解: (1) 由卷积公式, $\xi + \eta$ 的密度为

$$p(i) = \sum_{k=1}^{i-1} \mathbb{P}(\xi = i-k)\mathbb{P}(\eta = k) = (i-1)(1-p)^{i-2}p^2, \qquad i \geqslant 2,$$

即 $\xi + \eta$ 服从负二项分布 $Nb(2,p)$.

(2) $\xi \vee \eta$ 的密度为

$$\begin{aligned} q(i) &= \mathbb{P}(\xi \vee \eta = i) = \mathbb{P}(\xi = i, \eta \leqslant i) + \mathbb{P}(\xi < i, \eta = i) \\ &= \mathbb{P}(\xi = i)\mathbb{P}(\eta \leqslant i) + \mathbb{P}(\xi < i)\mathbb{P}(\eta = i) \\ &= (1-p)^{i-1}p\left(\sum_{k=1}^{i} (1-p)^{k-1}p + \sum_{k=1}^{i-1} (1-p)^{k-1}p \right) \\ &= (1-p)^{i-1}p(2 - (1-p)^{i-1} - (1-p)^i), \qquad i \geqslant 1. \end{aligned}$$

□

练习3.7.5 设 ξ_1 和 ξ_2 相互独立, $\xi_i \sim P(\lambda_i)$, 试求已知 $\xi_1 + \xi_2 = n$ 时 ξ_1 的条件分布.

解: (1) 由卷积公式, 有

$$\mathbb{P}(\xi_1+\xi_2=n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda_1^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda_1}\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}\mathrm{e}^{-\lambda_2}=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)},\qquad n\geqslant 0,$$

所以, $\xi+\eta\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$.

(2) 由条件概率的定义及上面的结果得

$$\mathbb{P}(\xi_1=k|\xi_1+\xi_2=n)=\frac{\mathbb{P}(\xi_1=k,\xi_2=n-k)}{\mathbb{P}(\xi_1+\xi_2=n)}=\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k},\qquad 0\leqslant k\leqslant n,$$

即已知 $\xi_1+\xi_2=n$ 时 ξ_1的条件分布为 $B\big(n,\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\big)$. □

练习3.7.6 设随机变量 ξ 有标准正态分布, 求 ξ^{-2} 的密度函数.

解: 当 $x>0$ 时, ξ^{-2} 的分布函数

$$F(x)=\mathbb{P}(\xi^{-2}\leqslant x)=\mathbb{P}(x^{-1/2}\leqslant|\xi|)=2\Phi(-x^{-1/2}),$$

求导得

$$p_{\xi^{-2}}(x)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2x}\right)\frac{1}{2}x^{-3/2}=\frac{1}{x^{3/2}\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2x}\right),\qquad x>0.$$

□

练习3.7.7 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 为相互独立的随机变量, 每个 ξ_i 服从参数为 λ_i 的指数分布. 试求它们的最小值 $\bigwedge_{i=1}^n\xi_i$ 的分布.

解: 记 $\eta=\bigwedge_{i=1}^n\xi_i$, 则

$$\mathbb{P}(\eta\geqslant x)=\mathbb{P}(\xi_1\geqslant x,\xi_2\geqslant x,\cdots,\xi_n\geqslant x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0;\\ 1, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

其中 $\lambda=\sum\limits_{i=1}^n\lambda_i$. 所以 η 的密度函数为

$$p_\eta(x)=\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x},\qquad x>0,$$

即 $\bigwedge\limits_{i=1}^n\xi_i$ 服从参数为 $\sum\limits_{i=1}^n\lambda_i$的指数分布. □

练习3.7.8 设随机变量 ξ 与 η 独立，同服从 $U(0,1)$ 分布，求 $\xi+\eta$ 的密度函数.

解: 由卷积公式, 有

$$\begin{aligned}p_{\xi+\eta}(y)&=\int_0^1 p_\xi(x)p_\eta(y-x)\mathrm{d}x=\int_{0\vee(y-1)}^{1\wedge y}\mathrm{d}x\\&=(1\wedge y)-0\vee(y-1)=\begin{cases}y, & 0<y<1;\\ 2-y, & 1\leqslant y<2.\end{cases}\end{aligned}$$

□

练习3.7.9 向区间 $(0,a)$ 内任投两点, 求两点间距离的密度函数.

解: 用 ξ_1,ξ_2 分别表示两个点的坐标, 则它们相互独立，都服从 $U(0,a)$, 且两点之间的距离为 $\eta=\eta_2-\eta_1$, 其中 $\eta_1=\xi_1\wedge\xi_2$, $\eta_2=\xi_1\vee\xi_2$.

分别记 $F(x)$ 和 $p(x)$ 为 $U(0,a)$ 的分布函数和密度函数, 则 (η_1,η_2) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=2(F(y)-F(x))^{2-2}p(x)p(y)=2/a^2,\qquad 0<x<y<a.$$

所以 η 的分布函数为

$$
\begin{aligned}
F_\eta(z) &= \mathbb{P}(\eta_2-\eta_1<z) = \iint\limits_{y-x<z,0<x<y<a} 2/a^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^a \mathrm{d}x\int_x^{a\wedge(z+x)} 2/a^2\mathrm{d}y = \begin{cases} \frac{2az-z^2}{a^2}, & 0<z\leqslant a; \\ 1, & z>a. \end{cases}
\end{aligned}
$$

由此可得两点间距离的密度函数为

$$
p_\eta(z) = \frac{2a-2z}{a^2}, \qquad 0<z<a.
$$

□

练习3.7.10 设随机变量 ξ 与 η 独立. $\xi\sim U(0,1)$, η 的分布函数为 $F(y)=1-\frac{1}{y^2}$, $y>1$. 试求 $\xi\eta$ 的密度函数.

解: $\xi\eta$ 的分布函数为

$$
F_{\xi\eta}(z) = \iint\limits_{\substack{0<x<1,y>1\\ xy<z}} \frac{2}{y^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \begin{cases} \frac{2z}{3}, & 0<z\leqslant 1; \\ 1-\frac{1}{3z^2}, & z>1. \end{cases}
$$

注意到 $F_{\xi\eta}$ 连续且分段可微, 得密度函数

$$
p_{\xi\eta}(z) = \begin{cases} \frac{2}{3}, & 0<z\leqslant 1; \\ \frac{2}{3z^3}, & z>1. \end{cases}
$$

□

练习3.7.11 设 (ξ,η) 服从区域 $D=\{(x,y):0<|x|<y<1\}$ 上的均匀分布, 试求 ξ^2 的密度函数.

解: 设联合密度函数 $p(x,y)=c,(x,y)\in D$. 由于

$$
1 = \iint_D p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = c\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{|x|}^1\mathrm{d}y = c,
$$

所以 (ξ,η) 的联合密度函数为

$$
p(x,y)=1, \qquad (x,y)\in D.
$$

从而 ξ^2的分布函数为

$$
\begin{aligned}
F_{\xi^2}(z) &= \iint\limits_{x^2<z,0<|x|<y<1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-(\sqrt{z}\wedge 1)}^{\sqrt{z}\wedge 1}\mathrm{d}x\int_{|x|}^1\mathrm{d}y \\
&= \begin{cases} 2\sqrt{z}-z, & 0<z\leqslant 1; \\ 1, & z>1. \end{cases}
\end{aligned}
$$

因此, ξ^2 的密度函数为

$$
p_{\xi^2}(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}-1, \qquad 0<z<1.
$$

□

练习3.7.12 设随机向量 (ξ,η) 的联合密度函数为

$$
p(x,y) = \frac{1}{x^2y^2}, \qquad x,y\geqslant 1,
$$

试求 $\alpha=\xi\eta$ 与 $\beta=\xi/\eta$ 的联合密度函数与边缘密度函数.

解: 令 $u=xy$, $v=\frac{x}{y}$, $x,y\geqslant 1$, 则

$$x=\sqrt{uv},\qquad y=\sqrt{\frac{u}{v}},\qquad u\geqslant 1,\ \frac{1}{u}\leqslant v\leqslant u.$$

从而 $|J|=\frac{1}{2v}$, 所以 (α,β) 的联合密度函数为

$$p_{\alpha,\beta}(u,v)=\frac{1}{2u^2v},\qquad u\geqslant 1,\ \frac{1}{u}\leqslant v\leqslant u.$$

α 的边缘密度函数为

$$p_\alpha(u)=\int_{1/u}^{u}\frac{1}{2u^2v}\mathrm{d}v=\frac{\ln u}{u^2},\qquad u\geqslant 1,$$

β 的边缘密度函数为

$$p_\beta(v)=\int_{v\vee 1\vee\frac{1}{v}}^{\infty}\frac{1}{2u^2v}\mathrm{d}u=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0<v\leqslant 1;\\ \frac{1}{2v^2}, & v>1.\end{cases}$$

□

练习3.7.13 设随机变量 ξ 与 η 独立同分布, 都服从 $\Gamma(\lambda,r)$ 分布. 试证 $\xi+\eta$ 与 ξ/η 相互独立.

证明: 令

$$\begin{cases}u=x+y,\\ v=\frac{x}{y},\end{cases}\qquad x>0,y>0,$$

则

$$\begin{cases}x=\frac{uv}{v+1},\\ y=\frac{u}{v+1},\end{cases}\qquad u>0,v>0;\qquad |J|=\frac{u}{(v+1)^2}.$$

由随机变量 ξ 与 η 独立同分布, 都服从 $\Gamma(\lambda,r)$ 分布知, (ξ,η) 的联合密度函数为

$$p_{(\xi,\eta)}(x,y)=p_\xi(x)p_\eta(y)=\left(\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}\right)^2(xy)^{r-1}\mathrm{e}^{-\lambda(x+y)},\qquad x>0,y>0.$$

所以 $\xi+\eta$ 与 ξ/η 的联合密度函数为

$$p(u,v)=\left(\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}\right)^2u^{2r-1}\mathrm{e}^{-\lambda u}\frac{v^{r-1}}{(v+1)^{2r}},\qquad u>0,v>0,$$

从而 $\xi+\eta$ 与 ξ/η 相互独立. □

练习3.7.14 设 ξ 的分布函数 F 连续, 求 $\eta=F(\xi)$ 的分布.

解: 设 ξ 的值域为 $[a,b]$. 对于任何 $y\in(0,1)$, 由 F 的连续性知: 存在 $t\in[a,b]$, 使得 $F(t)=y$. 记

$$F^{-1}(y)=\inf\{x:F(x)\geqslant y\},$$

由分布函数的单调性知

$$F^{-1}(y)=\inf\{x:F(x)=y\}.$$

所以

$$F(F^{-1}(y))=F(F^{-1}(F(t)))=F(t)=y.$$

因此

$$y = F(F^{-1}(y)) = \mathbb{P}(\xi \leqslant F^{-1}(y)) \leqslant \mathbb{P}(F(\xi) \leqslant F(F^{-1}(y))) = \mathbb{P}(\eta \leqslant y).$$

注意到 $\{F(\xi) \leqslant y\} \subset \{\xi \leqslant F^{-1}(y)\} \cup \{F(\xi) = y\}$, 得

$$\mathbb{P}(\eta \leqslant y) = \mathbb{P}(F(\xi) \leqslant y) \leqslant \mathbb{P}(\xi \leqslant F^{-1}(y)) + \mathbb{P}(F(\xi) = y) = F(F^{-1}(y)) = y.$$

因此

$$\mathbb{P}(\eta \leqslant y) = y,$$

即 $\eta \sim U(0,1)$.