概率论习题解答

李勇　张余辉

March 27, 2018

1　第二章　概率空间

§2.1.1 练习题

练习2.1.1 在例2.1.1中定义

$$\widetilde{\mathbb{P}}(\Omega) = \widetilde{\mathbb{P}}(A) = 1, \qquad \widetilde{\mathbb{P}}(\overline{A}) = \widetilde{\mathbb{P}}(\varnothing) = 0,$$

试证明 $\widetilde{\mathbb{P}}$ 为概率.

证明: 显然, 对任意 $B \in \mathscr{F}$ 有 $\widetilde{\mathbb{P}}(B) \geqslant 0$ 且 $\widetilde{\mathbb{P}}(\Omega) = 1$. 下面验证可列可加性. 即对于两两互不相容的 $\{B_n\} \subset \mathscr{F}$, 要证明

$$\widetilde{\mathbb{P}}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{\mathbb{P}}(B_n).$$

只有四种情形, (a)全是 $\varnothing$; (b) 只有一个 A 且其余全是 $\varnothing$; (c) 只有一个 $\overline{A}$ 且其余全是 $\varnothing$; (d) 只有一个 A 和一个 $\overline{A}$ 且其余全是 $\varnothing$. 对于情形(a), 上式两边都为零; 对于(b), 上式两边都为 1; 对于(c), 上式两边都为 0; 对于(d), 上式两边都为 1. 故等号总成立. 因此, 满足可列可加性. $\widetilde{\mathbb{P}}$ 为 $\mathscr{F}$ 上的概率. □

练习2.1.2 将一枚质地均匀的骰子掷 n 次, 求所得最大点数为 4 的概率.

解: 用 A 表示所得最大点数为 4, A_k 表示最大点数不超过 k 点, 则 $A \subset A_4 - A_3$, $A_4 \subset A_3$, 所以

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_4) - \mathbb{P}(A_3) = \frac{4^n - 3^n}{6^n}.$$

□

练习2.1.3 从一副扑克牌中有放回地任意抽取 n 张($n \geqslant 4$), 求这 n 张牌包含了全部 4 种花色的概率.

解: 用 E 表示这 n 张牌包含了全部 4 种花色, A 表示这 n 张牌没有红桃, B 表示这 n 张牌没有黑桃, C 表示这 n 张牌没有方块, D 表示这 n 张牌没有梅花. 则 $E = \overline{A \cup B \cup C \cup D}$. 由加法公式，

$$\mathbb{P}(A\cup B\cup C\cup D) = 4\mathbb{P}(A) - \binom{4}{2}\mathbb{P}(AB) + \binom{4}{3}\mathbb{P}(ABC) - \binom{4}{4}\mathbb{P}(ABCD) = 4\left(\frac{3}{4}\right)^n - 6\left(\frac{2}{4}\right)^n + 4\left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

所以，

$$\mathbb{P}(E) = 1 - \mathbb{P}(A \cup B \cup C \cup D) = \frac{4^n + 6 \cdot 2^n - 4(3^n + 1)}{4^n}.$$

□

练习2.1.4 $n(n>1)$ 对夫妇任意围成一圆桌就坐, 求有夫妇不相邻的概率.

解: 用 A 表示有夫妇不相邻, 则 $\overline{A}$ 表示所有夫妇全相邻. 取一椅子作为参考点, 称为 a 座, 记

$$B_1=\{a\,\text{座与顺时针方向邻座为夫妇}\}\cap\overline{A},\qquad B_1=\{a\,\text{座与逆时针方向邻座为夫妇}\}\cap\overline{A}.$$

则 $\overline{A}=B_1\cup B_2$, $B_1B_2=\varnothing$. 因此,

$$\mathbb{P}(B_i)=\frac{n!2^n}{(2n)!}=\frac{1}{(2n-1)!!},\qquad i=1,2,$$
$$\mathbb{P}(\overline{A})=\mathbb{P}(B_1)+\mathbb{P}(B_2)=\frac{2}{(2n-1)!!},$$

从而

$$\mathbb{P}(A)=1-\mathbb{P}(\overline{A})=1-\frac{2}{(2n-1)!!}.$$

□

练习2.1.5 从 n 阶行列式的一般展开式中任意抽取一项, 问这项包含主对角线元素的概率是多少.

解: 记 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, 则

$$|A|=\sum_{(i_1,i_2,\cdots,i_n)\in\Omega}(-1)^{\tau(i_1,i_2,\cdots,i_n)}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n},$$

其中 $\Omega=\{1,2,\cdots,n$ 的排列全体$\}$. 对 Ω 中的任何点, 该点被取到的概率为 $\frac{1}{n!}$. 记

$$B=\{(i_1,i_2,\cdots,i_n):\text{存在}\,1\leqslant k\leqslant n,\text{使得}\,i_k=k\},\qquad B_k=\{(i_1,i_2,\cdots,i_n):i_k=k\},\qquad 1\leqslant k\leqslant n.$$

则 $B=\bigcup\limits_{k=1}^{n}B_k$. 由加法定理得

$$\mathbb{P}(B)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\mathbb{P}(B_{i_1}\cdots B_{i_k})=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}\frac{(n-k)!}{n!}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k!}.$$

□

练习2.1.6 向画满间隔为 a 的平行直线的桌面上任投一三角形. 假设该三角形的三条边的边长 ℓ_1,ℓ_2 和 ℓ_3 均小于 a, 求此三角形与某直线相交的概率.

解: 用 A 表示此三角形与某直线相交, A_i 表示此三角形的第 i 条边与某直线相交$(i=1,2,3)$. 显然,

$$A_1=(A_1A_2)\cup(A_1A_3),\qquad A_2=(A_2A_3)\cup(A_2A_1),\qquad A_3=(A_3A_2)\cup(A_3A_1).$$

注意到 $\mathbb{P}(A_1A_2A_3)=0$. 由加法定理得

$$\mathbb{P}(A_1)=\mathbb{P}(A_1A_2)+\mathbb{P}(A_1A_3)-\mathbb{P}(A_1A_2A_3)=\mathbb{P}(A_1A_2)+\mathbb{P}(A_1A_3)$$

和

$$\mathbb{P}(A_2)=\mathbb{P}(A_2A_3)+\mathbb{P}(A_1A_2),\qquad \mathbb{P}(A_3)=\mathbb{P}(A_2A_3)+\mathbb{P}(A_1A_3).$$

三个式子相加可得

$$\mathbb{P}(A_1)+\mathbb{P}(A_2)+\mathbb{P}(A_3)=2(\mathbb{P}(A_1A_2)+\mathbb{P}(A_1A_3)+\mathbb{P}(A_2A_3)).$$

再注意到 $\mathbb{P}(A_i)=\frac{2\ell_i}{a\pi}$, 则有

$$\mathbb{P}(A_1A_2)+\mathbb{P}(A_1A_3)+\mathbb{P}(A_2A_3)=\frac{\ell_1+\ell_2+\ell_3}{a\pi}.$$

对 $A=(A_1A_2)\cup(A_1A_3)\cup(A_2A_3)$ 利用加法定理得

$$\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(A_1A_2)+\mathbb{P}(A_1A_3)+\mathbb{P}(A_2A_3)=\frac{\ell_1+\ell_2+\ell_3}{a\pi}.$$

□

练习2.1.7 设 $\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)=1$, 试证明 $\mathbb{P}(AB)=\mathbb{P}(\overline{A}\,\overline{B})$.

证明: 由

$$1-\mathbb{P}(\overline{A}\,\overline{B})=\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(AB)=1-\mathbb{P}(AB)$$

知, 结论正确. □

练习2.1.8 试证明

$$\mathbb{P}\Big(\varliminf_{n\to\infty}A_n\Big)\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\mathbb{P}(A_n),$$
$$\mathbb{P}\Big(\varlimsup_{n\to\infty}A_n\Big)\geqslant\varlimsup_{n\to\infty}\mathbb{P}(A_n).$$

证明: 注意到

$$\varliminf_{n\to\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k,\qquad\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k\subset\bigcap_{k=n+1}^{\infty}A_k,$$

由概率的下连续性得

$$\mathbb{P}\Big(\varliminf_{n\to\infty}A_n\Big)=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k\Big)\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\mathbb{P}(A_n).$$

注意到

$$\varlimsup_{n\to\infty}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k,\qquad\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\supset\bigcup_{k=n+1}^{\infty}A_k,$$

由概率的上连续性得

$$\mathbb{P}\Big(\varlimsup_{n\to\infty}A_n\Big)=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\Big(\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\Big)\geqslant\varlimsup_{n\to\infty}\mathbb{P}(A_n).$$

或者, 由对偶法则可得

$$\overline{\Big(\varliminf_{n\to\infty}\overline{A}_n\Big)}=\varlimsup_{n\to\infty}A_n,$$

所以,

$$1-\mathbb{P}\Big(\varlimsup_{n\to\infty}A_n\Big)=\mathbb{P}\Big(\varliminf_{n\to\infty}\overline{A}_n\Big)\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\mathbb{P}(\overline{A}_n)=1-\varlimsup_{n\to\infty}\mathbb{P}(A_n)$$

即

$$\varlimsup_{n\to\infty}\mathbb{P}(A_n)\leqslant\mathbb{P}\Big(\varlimsup_{n\to\infty}A_n\Big).$$

□

练习2.1.9 对于任意 n 个事件 A_n, 试证明

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\Big) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) - n + 1.$$

证明: 由次可加性得

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{k=1}^{n} \overline{A}_k\Big) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\overline{A}_k) = n - \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k),$$

从而

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\Big) = 1 - \mathbb{P}\Big(\bigcup_{k=1}^{n} \overline{A}_k\Big) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) - n + 1.$$

□

练习2.1.10 有编号为正整数的可数多个球和一个空箱子. 对于 $n \geqslant 1$, 在 11 点 $58 + \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^i$ 分时往箱中放入编号为从 $10n - 9$ 号到 $10n$ 号之间的球, 同时按如下的三种方式之一从箱中取出球: (a) 取出第 $10n - 9$ 号球; (b) 取出第 n 号球; (c) 从箱中任取一球. 分别在上述三种情况下求事件 $A = \{$在 12 点整箱子空$\}$ 的概率.

解: (a) 此时显然 $A = \varnothing$, $\mathbb{P}(A) = 0$; (b) 此时显然 $A = \Omega$, $\mathbb{P}(A) = 1$; (c) 给定正整数 i, 用 F_i 表示在 12 点整第 i 号球在箱中. 则 $\overline{A} = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$. 由次可加性,

$$\mathbb{P}(\overline{A}) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(F_i).$$

下面讨论 F_i 发生的概率. 用 E_n 表示经过 n 次取球后第 i 号球还在箱中, 则有 $E_n \subset E_{n+1}$. 由概率的上连续性得

$$\mathbb{P}(F_i) = \mathbb{P}\Big(\bigcap_{n=i+1}^{\infty} E_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(E_n),$$

当 $i \leqslant 10n$ 时有

$$\mathbb{P}(E_n) = \frac{\Big(\prod_{k=1}^{[i/10]}(9k+1)\Big)\Big(\prod_{k=1+[i/10]}^{n}(9k)\Big)}{\prod_{k=1}^{n}(9k+1)} = \frac{1}{\prod_{k=1+[i/10]}^{n}(1+1/(9k))} \to 0, \qquad \text{当} \, n \to \infty$$

(因为 $\sum_{k=m}^{\infty} \log(1 + \frac{1}{9k}) = +\infty$). 从而

$$\mathbb{P}(F_i) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(E_n) = 0,$$

进而 $\mathbb{P}(\overline{A}) = 0$, 立即有

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A}) = 1.$$

□

练习2.1.11 参加集会的 n 个人各自的帽子放在一起, 会后每人任取一顶戴上, 求恰有 k 人戴对自己帽子的概率.

解: 用 A_k 表示恰有 k 个人戴对自己帽子($k=1,2,\cdots,n$), A_0 表示 n 个人无人戴对自己帽子, B_i 表示第 i 个人戴对自己帽子($i=1,2,\cdots,n$), 则根据加法定理得到

$$\mathbb{P}(\overline{A}_0)=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(B_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant jn}\mathbb{P}(B_iB_j)+\cdots+(-1)^{n-1}\mathbb{P}(B_1\cdots B_n),$$

而 $n(B_i)=(n-1)!, n(B_iB_j)=(n-2)!, n(B_iB_jB_k)=(n-3)!,\cdots,n(B_1\dot{B}_n)=0!=1$, $n(\Omega)=n!$, 代入可得

$$\mathbb{P}(\overline{A}_0)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant jn}\frac{1}{n(n-1)}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}=\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}.$$

因此，

$$\mathbb{P}(A_0)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{1}{i!}.$$

下面求 $\mathbb{P}(A_k), k\geqslant 1$.

一个解法如下. 用 C_k 表示恰好某指定的 k 个人戴对自己帽子, 则 $n(A_k)=\binom{n}{k}n(C_k)$. 注意到: 恰好某指定的 k 个人戴对自己帽子也即是其余 $n-k$ 个人无人戴对自己帽子. 因此由上面 A_0 的结论有:

$$\mathbb{P}(C_k)=\sum_{i=0}^{n-k}(-1)^i\frac{1}{i!},$$

而 $\mathbb{P}(C_k)=\frac{n(C_k)}{(n-k)!}$, 由此可得

$$n(C_k)=(n-k)!\sum_{i=0}^{n-k}(-1)^i\frac{1}{i!},$$

最终得到

$$\mathbb{P}(A_k)=\frac{\binom{n}{k}n(C_k)}{n!}=\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{n-k}(-1)^i\frac{1}{i!},$$

此结果对于 $k=0,1,\cdots,n$ 均成立.

另一解法. 用 A_k 表示恰有 k 个人戴对自己帽子($k=1,2,\cdots,n$), A_0 表示 n 个人无人戴对自己帽子, $C(i_1,\cdots,i_k)$ 表示仅第 $i_i,\cdots,i_k$ 人戴对自己帽子, 其中 $1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n$. 显然诸 $C(i_1,\cdots,i_k)$ 互不相容, 但有相同的概率, 且当 $k\geqslant 1$ 时有

$$A_k=\bigcup_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}C(i_1,\cdots,i_k),$$

由概率的有限可加性得

$$\mathbb{P}(A_k)=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\mathbb{P}(C(i_1,\cdots,i_k)),$$

所以当 $1\leqslant k\leqslant n$ 时,

$$\mathbb{P}(A_k)=\binom{n}{k}\mathbb{P}(C(1,\cdots,k)).$$

为计算上式右边的概率, 用 B_k 表示第 k 人戴对自己帽子. 则

$$C(1,\cdots,k)=\Big(\bigcap_{i=1}^{k}B_i\Big)\bigcap\Big(\bigcap_{j=k+1}^{n}\overline{B}_j\Big)=\Big(\bigcap_{i=1}^{k}B_i\Big)-\Big(\bigcup_{j=k+1}^{n}(B_jB_1\cdots B_k)\Big).$$

利用概率的可减性得

$$\mathbb{P}(C(1,\cdots,k))=\mathbb{P}(B_1\cdots B_k)-\mathbb{P}\Big(\bigcup_{j=k+1}^{n}(B_jB_1\cdots B_k)\Big).$$

由古典概率计算公式得

$$\mathbb{P}(B_{i_1}\cdots B_{i_k})=\frac{(n-k)!}{n!}.$$

再由概率的加法定理得

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{j=k+1}^{n}(B_jB_1\cdots B_k)\Big)=\sum_{j=1}^{n-k}(-1)^{j-1}\binom{n-k}{j}\frac{(n-k-j)!}{n!}.$$

因此,

$$\mathbb{P}(C(1,\cdots,k))=\sum_{j=0}^{n-k}(-1)^{j}\binom{n-k}{j}\frac{(n-k-j)!}{n!}.$$

由此得到

$$\mathbb{P}(A_k)=\binom{n}{k}\sum_{j=0}^{n-k}(-1)^{j}\binom{n-k}{j}\frac{(n-k-j)!}{n!}=\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{n-k}(-1)^{j}\frac{1}{j!},$$

其中 $1\leqslant k\leqslant n$. □

§2.2.5 练习题

练习2.2.1 试用全概率公式计算例2.2.1中事件 A 的概率.

解: 记 A_n 表示 n 根绳恰结成 n 个圈, B 表示第一次结成绳圈, 则 B 和 $\overline{B}$ 构成一个分割. 记 $p_n=\mathbb{P}(A_n)$, 则 $p_1=1$. 由全概率公式得

$$p_n=\mathbb{P}(A_n)=\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A_n|B)+\mathbb{P}(\overline{B})\mathbb{P}(A_n|\overline{B})=\frac{1}{2n-1}p_{n-1}+\frac{2n-2}{2n-1}\cdot 0=\frac{1}{2n-1}p_{n-1},$$

由此递推得

$$\mathbb{P}(A)=p_n=\prod_{k=2}^{n}\frac{1}{2k-1}p_1=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}=\frac{1}{(2n-1)!!}.$$

□

练习2.2.2 盒中放有 10 个乒乓球, 其中 7 个是新的. 第一次比赛时从其中任取 3 个来用, 比赛后仍放回盒中. 第二次比赛时再从盒中任取 3 个, 求第二次取出的球都是新球的概率.

解: 用 A 表示第二次取出的球都是新球, B_i 表示第一次取出的有 i 个新球($i=0,1,2,3$), 则 B_0,B_1,B_2,B_3 构成样本空间的一个分割, 从而则由全概率公式知,

$$\mathbb{P}(A)=\sum_{i=0}^{3}\mathbb{P}(B_i)\mathbb{P}(A|B_i).$$

注意到

$$\mathbb{P}(B_i)=\frac{\binom{7}{i}\binom{3}{3-i}}{\binom{10}{3}},\qquad \mathbb{P}(A|B_i)=\frac{\binom{7-i}{3}}{\binom{10}{3}},\qquad i=0,1,2,3.$$

可得

$$\mathbb{P}(A)=\sum_{i=0}^{3}\frac{\binom{7}{i}\binom{3}{3-i}}{\binom{10}{3}}\cdot\frac{\binom{7-i}{3}}{\binom{10}{3}}=\frac{49}{576}.$$

□

练习2.2.3 试卷中有一道单项选择题, 共有 3 个选项. 任一学生如果会解这道题, 则一定能选出正确的答案; 如果他不会解这道题, 则他会任意选择一个答案. 设考生会解这道题的概率是 0.7, 求:

(1) 考生能够选出正确答案的概率;

(2) 已知某考生所选择的答案是正确的, 他确实会解这道题的概率.

解: 用 A 表示考生能够选出正确答案, B 表示考生会解这道题. 则 B 和 $\overline{B}$ 构成样本空间的一个分割.

(1) 由全概率公式知

$$\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B)+\mathbb{P}(\overline{B})\mathbb{P}(A|\overline{B})=0.7\cdot 1+0.3\cdot\frac{1}{3}=0.8.$$

(2) 由 Bayes 公式知

$$\mathbb{P}(B|A)=\frac{\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B)}{\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B)+\mathbb{P}(\overline{B})\mathbb{P}(A|\overline{B})}=\frac{0.7\cdot 1}{0.8}=0.875.$$

□

练习2.2.4 已知一只母鸡生 k 个蛋的概率为 $\frac{\lambda^k}{k!}\exp(-\lambda)$ ($\lambda>0$, 并且每一个鸡蛋能孵化成小鸡的概率为 p. 求一只母鸡恰好孵出 r 只小鸡的概率.

解: 用 A 表示一只母鸡恰好孵出 r 只小鸡, B_k 表示这只母鸡生 k 个蛋($k\geqslant 0$). 则 $\{B_k\}$ 构成样本空间的一个分割. 由全概率公式知,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A)&=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}(B_k)\mathbb{P}(A|B_k)=\sum_{k=r}^{\infty}\mathbb{P}(B_k)\mathbb{P}(A|B_k)=\sum_{k=r}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}\binom{k}{r}p^r(1-p)^{k-r}\\&=\frac{(\lambda p)^r}{r!}\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=r}^{\infty}\frac{(\lambda(1-p))^{k-r}}{(k-r)!}=\frac{(\lambda p)^r}{r!}\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda(1-p)}=\frac{(\lambda p)^r}{r!}\mathrm{e}^{-\lambda p}.\end{aligned}$$

□

练习2.2.5 接连投掷一枚质地均匀的硬币, 直至第一次连续出现两个正面为止. 求恰投掷 n 次的概率.

解: 记 $A_n=\{$恰在第 n 次抛出连续两个正面$\}$, $B_k=\{$第 k 次抛出为正面$\}$, $p_n=\mathbb{P}(A_n)$. 则 $\overline{B}_1, B_1B_2$ 和 $B_1\overline{B}_2$ 恰为概率空间的一个分割. 当 $n\geqslant 2$ 时, 由全概率公式知,

$$\begin{aligned}p_n&=\mathbb{P}(\overline{B}_1)\mathbb{P}(A_n|\overline{B}_1)+\mathbb{P}(B_1B_2)\mathbb{P}(A_n|B_1B_2)+\mathbb{P}(B_1\overline{B}_2)\mathbb{P}(A_n|B_1\overline{B}_2)\\&=\frac{1}{2}p_{n-1}+0+\frac{1}{4}p_{n-2}=\frac{1}{2}p_{n-1}+\frac{1}{4}p_{n-2}.\end{aligned}$$

为求解此差分方程，可将其改写为如下便于递推的形式

$$p_n-ap_{n-1}=b(p_{n-1}-ap_{n-2}),$$

其中 a 和 b 是待定常数. 将上式代入差分方程有

$$(a+b)p_{n-1}-abp_{n-2}=\frac{1}{2}p_{n-1}+\frac{1}{4}p_{n-2},$$

即 $a+b=\frac{1}{2}, ab=\frac{1}{4}$, 解之得

$$a=\frac{1+\sqrt{5}}{4}, \qquad b=\frac{1-\sqrt{5}}{4}.$$

另一方面, 注意到 $p_2=\frac{1}{4}, p_1=0$, 通过递推得

$$p_n-ap_{n-1}=b^{n-2}(p_2-ap_1)=\frac{1}{4}b^{n-2},$$

即

$$p_n=\frac{1}{4}b^{n-2}+ap_{n-1}, \qquad n\geqslant 2,$$

递推得

$$p_n=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n-2}a^kb^{n-2-k}+a^{n-1}p_1=\frac{1}{4}b^{n-2}\sum_{k=0}^{n-2}\left(\frac{a}{b}\right)^k=\frac{1}{4}b^{n-2}\frac{1-(\frac{a}{b})^{n-1}}{1-\frac{a}{b}}.$$

将 a 和 b 的值代入整理得

$$p_n=\frac{1}{2\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)\right).$$

□

练习2.2.6 在例2.2.5中, 在已知 A 发生的情况下, 哪一车间应该对这件次品负责?

解: 记 $B=\{$取到第 i 车间产品$\}$, 则由 Bayes 公式

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_1|A)&=\frac{\mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(A|B_1)}{\mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(A|B_1)+\mathbb{P}(B_2)\mathbb{P}(A|B_2)+\mathbb{P}(B_3)\mathbb{P}(A|B_3)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot 0.01}{0.0125}=0.4,\\
\mathbb{P}(B_2|A)&=\frac{\mathbb{P}(B_2)\mathbb{P}(A|B_2)}{\mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(A|B_1)+\mathbb{P}(B_2)\mathbb{P}(A|B_2)+\mathbb{P}(B_3)\mathbb{P}(A|B_3)}=\frac{\frac{1}{4}\cdot 0.01}{0.0125}=0.2,\\
\mathbb{P}(B_3|A)&=\frac{\mathbb{P}(B_3)\mathbb{P}(A|B_3)}{\mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(A|B_1)+\mathbb{P}(B_2)\mathbb{P}(A|B_2)+\mathbb{P}(B_3)\mathbb{P}(A|B_3)}=\frac{\frac{1}{4}\cdot 0.02}{0.0125}=0.4,
\end{aligned}$$

所以应该应该由第 1 或第 3 车间对这件次品负责. □

练习2.2.7 在信号传递中, 发送信号"0"或"1", 它们分别占 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{2}{3}$, 由于外界的随机干扰和信号传递系统内部的噪声, 接收到的信号可能出错的概率均为 0.05, 若已知接收到的信号为"1", 试问发送的信号也是"1"的概率多大?

解: 用 A 表示发送的信号是"1", B 表示接收到的信号为"1", 由 Bayes 公式

$$\mathbb{P}(A|B)=\frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A)}{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A)+\mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(B|\overline{A})}=\frac{\frac{2}{3}\cdot 0.95}{\frac{2}{3}\cdot 0.95+\frac{1}{3}\cdot 0.05}=\frac{38}{39}\approx 0.97.$$

□

§2.3.5 练习题

练习2.3.1 如果三个事件 A,B,C 相互独立, 试证 $A\cup B, AB, A\overline{B}$ 均与 C 独立.

证明: 事实上,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((A\cup B)C)&=\mathbb{P}((AC)\cup(BC))=\mathbb{P}(AC)+\mathbb{P}(BC)-\mathbb{P}(ABC)\\&=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)+\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)-\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)\\&=(\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B))\mathbb{P}(C)\\&=(\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(AB))\mathbb{P}(C)\\&=\mathbb{P}(A\cup B))\mathbb{P}(C),\end{aligned}$$

即 $A\cup B$ 与 C 相互独立. 注意到

$$\mathbb{P}((AB)C)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)=\mathbb{P}(AB)\mathbb{P}(C),$$

得 AB 与 C 相互独立. 类似地,

$$\mathbb{P}((A\overline{B})C)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\overline{B})\mathbb{P}(C)=\mathbb{P}(A\overline{B})\mathbb{P}(C),$$

即 $A\overline{B}$ 与 C 相互独立. □

练习2.3.2 试证明事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立的充要条件为: 对每个事件 $\hat{A}_k=A_k$ 或者 $\overline{A}_k(k=1,2,\cdots,n)$, 总有

$$\mathbb{P}(\hat{A}_1\hat{A}_2\cdots\hat{A}_n)=\mathbb{P}(\hat{A}_1)\mathbb{P}(\hat{A}_2)\cdots\mathbb{P}(\hat{A}_n).$$

证明: 对 n 用数学归纳法. 显然当 $n=2$ 时结论成立. 设在 n 时结论成立, 往证 $n+1$ 结论还成立.

$n+1$ 时必要性的证明. 记 $B_i=A_i(1\leqslant i\leqslant n-1),B_n=A_nA_{n+1}$, 则对于 $2\leqslant s\leqslant n$, $1\leqslant i_1<\cdots<i_{s-1}\leqslant n-1$,

$$\mathbb{P}(B_{i_1}\cdots B_{i_{s-1}}B_n)=\mathbb{P}(B_{i_1})\cdots\mathbb{P}(B_{i_{s-1}})\mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(A_{n+1})=\mathbb{P}(B_{i_1})\cdots\mathbb{P}(B_{i_{s-1}})\mathbb{P}(B_n),$$

从而

$$\mathbb{P}(B_{i_1}\cdots B_{i_{s-1}}B_{i_s})=\mathbb{P}(B_{i_1})\cdots\mathbb{P}(B_{i_{s-1}})\mathbb{P}(B_{i_s}),\qquad 1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n.$$

即 $B_1,\cdots,B_n$ 相互独立. 由归纳假设

$$\mathbb{P}(\hat{B}_1\hat{B}_2\cdots\hat{B}_n)=\mathbb{P}(\hat{B}_1)\mathbb{P}(\hat{B}_2)\cdots\mathbb{P}(\hat{B}_n).$$

再由 $\mathbb{P}(B_n)=\mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(A_{n+1})$, 得

$$\mathbb{P}(\hat{A}_1\hat{A}_2\cdots\hat{A}_{n-1}A_nA_{n+1})=\mathbb{P}(\hat{A}_1)\mathbb{P}(\hat{A}_2)\cdots\mathbb{P}(\hat{A}_{n-1})\mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(A_{n+1}).$$

类似地, 把 $A_n\overline{A}_{n+1},\overline{A}_nA_{n+1}$ 或 $\overline{A}_n\overline{A}_{n+1}$ 看成 B_n 可得

$$\mathbb{P}(\hat{A}_1\hat{A}_2\cdots\hat{A}_{n-1}A_n\overline{A}_{n+1})=\mathbb{P}(\hat{A}_1)\mathbb{P}(\hat{A}_2)\cdots\mathbb{P}(\hat{A}_{n-1})\mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(\overline{A}_{n+1}),$$

$$\mathbb{P}(\hat{A}_1\hat{A}_2\cdots\hat{A}_{n-1}\overline{A}_nA_{n+1})=\mathbb{P}(\hat{A}_1)\mathbb{P}(\hat{A}_2)\cdots\mathbb{P}(\hat{A}_{n-1})\mathbb{P}(\overline{A}_n)\mathbb{P}(A_{n+1}),$$

$$\mathbb{P}(\hat{A}_1\hat{A}_2\cdots\hat{A}_{n-1}\overline{A}_n\overline{A}_{n+1})=\mathbb{P}(\hat{A}_1)\mathbb{P}(\hat{A}_2)\cdots\mathbb{P}(\hat{A}_{n-1})\mathbb{P}(\overline{A}_n)\mathbb{P}(\overline{A}_{n+1}).$$

因此, $n+1$ 时必要性成立.

$n+1$ 时充分性的证明. 为此仅需证明

$$\mathbb{P}(A_{i_1}\cdots A_{i_k})=\mathbb{P}(A_{i_1})\cdots\mathbb{P}(A_{i_k}),\qquad 2\leqslant k\leqslant n, 1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n+1. \tag{1.1}$$

事实上, 取 $j\in\{1,2,\cdots,n+1\}-\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}$, 有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\hat{A}_1\cdots\hat{A}_{j-1}A_j\hat{A}_{j+1}\cdots\hat{A}_{n+1})&=\mathbb{P}(\hat{A}_1)\cdots\mathbb{P}(\hat{A}_{j-1})\mathbb{P}(A_j)\mathbb{P}(\hat{A}_{j+1})\cdots\mathbb{P}(\hat{A}_{n+1}),\\ \mathbb{P}(\hat{A}_1\cdots\hat{A}_{j-1}\overline{A}_j\hat{A}_{j+1}\cdots\hat{A}_{n+1})&=\mathbb{P}(\hat{A}_1)\cdots\mathbb{P}(\hat{A}_{j-1})\mathbb{P}(\overline{A}_j)\mathbb{P}(\hat{A}_{j+1})\cdots\mathbb{P}(\hat{A}_{n+1}),\end{aligned}$$

将两式相加有

$$\mathbb{P}(\hat{A}_1\cdots\hat{A}_{j-1}\hat{A}_{j+1}\cdots\hat{A}_{n+1})=\mathbb{P}(\hat{A}_1)\cdots\mathbb{P}(\hat{A}_{j-1})\mathbb{P}(\hat{A}_{j+1})\cdots\mathbb{P}(\hat{A}_{n+1}).$$

由归纳假设知, $A_1,\cdots,A_{j-1},A_{j+1},\cdots,A_{n+1}$ 相互独立. 再注意到 $\{i_1,\cdots,i_k\}\subset\{1,\cdots,j-1,j+1,\cdots,n+1\}$, 得(1.1). □

练习2.3.3 设事件 A 与 B 独立, 仅 A 发生和仅 B 发生的概率分别是 $\frac{3}{8}$ 和 $\frac{1}{8}$, 求 $\mathbb{P}(A)$ 和 $\mathbb{P}(B)$.

解: 由概率的有限可加性得

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(A-B)+\mathbb{P}(AB)=\frac{3}{8}+\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B),\\ \mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(B-A)+\mathbb{P}(AB)=\frac{1}{8}+\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B),\end{aligned}$$

所以

$$\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(B)=\frac{1}{4},$$

进而

$$\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(A)-\frac{1}{4};$$

另外

$$\frac{3}{8}=\mathbb{P}(A)(1-\mathbb{P}(B))=\mathbb{P}(A)\left(1-\mathbb{P}(A)+\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{4}\mathbb{P}(A)-(\mathbb{P}(A))^2,$$

即

$$\mathbb{P}(A)=\frac{5}{8}\pm\frac{1}{8},\qquad \mathbb{P}(B)=\frac{3}{8}\pm\frac{1}{8}.$$

因此, 得: $\mathbb{P}(A)=\frac{3}{4},\mathbb{P}(B)=\frac{1}{2}$; 或者 $\mathbb{P}(A)=\frac{1}{2},\mathbb{P}(B)=\frac{1}{4}$. □

练习2.3.4 若 $A_1,A_2,\cdots,A_{m+n}$ 相互独立, $B\in\sigma(\{A_1,\cdots,A_m\})$, $C\in\sigma(\{A_{m+1},A_{m+2},\cdots,A_{m+n}\})$, 试证明 B 与 C 相互独立.

证明: 记 $\mathbb{M}=\{1,2,\cdots,m\}$ 和

$$\mathscr{A}=\{\varnothing\}\cup\left\{A: 存在\ \mathbb{S}\subset\mathbb{M},\ 使得\ A=\left(\bigcap_{k\in\mathbb{S}}A_k\right)\bigcap\left(\bigcap_{k\in\mathbb{M}-\mathbb{S}}\overline{A}_k\right)\right\},$$

约定 $\bigcap_{k\in\varnothing}A_k=\Omega$, 则 $\mathscr{A}$ 中事件互不相容, 对于任何 $A\in\mathscr{A}$, A, A_{m+1}, $\cdots,A_{m+n}$ 相互独立, 且

$$\Omega=\bigcup_{A\in\mathscr{A}}A\in\mathscr{F}. \tag{1.2}$$

记 $\mathscr{F}=\{B: B$ 为 $\mathscr{A}$ 中事件之并$\}$. 若 $A\in\mathscr{F}$, 则存在 $B_k\in\mathscr{A}(k=1,\cdots,s)$, 使得 $A=\bigcup\limits_{k=1}^{s}B_k$, 从而

$$\overline{A}=\Omega-\left(\bigcup_{k=1}^{s}B_k\right)=\bigcup_{A\in\mathscr{A}-\{B_1,B_2,\cdots,B_s\}}A\in\mathscr{F}. \tag{1.3}$$

若 $A_k\in\mathscr{F}(k\geqslant 1)$, 注意到 $\mathscr{A}$ 中仅有有限多个互不相容的事件知

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\in\mathscr{F}. \tag{1.4}$$

由(1.2), (1.3)和(1.4)知 $\mathscr{F}=\sigma(\{A_1,A_2,\cdots,A_n\})$.

对于任何事件 $B\in\mathscr{F}$, 存在 $B_k\in\mathscr{A}(k=1,\cdots,s)$, 使得 $B=\bigcup\limits_{k=1}^{s}B_k$. 注意到 $B_1,B_2,\cdots,B_s$ 互不相容, 并且 $B_k,A_{m+1},A_{m+2},\cdots,A_{m+n}$ 相互独立, 可得 $B,A_{m+1},A_{m+2},\cdots,A_{m+n}$ 相互独立. 进而对于任何 $C\in\sigma(\{A_{m+1},A_{m+2},\cdots,A_{m+n}\})$, B 和 C 相互独立. □

练习2.3.5 有一个均匀正四面体, 其中的三个面分别只涂上红、黄和蓝色, 在剩下的一个面上同时涂有红、黄和蓝三色. 掷此四面体落地后, 事件 A 表示四面体的底面有红色, 事件 B 表示四面体的底面有黄色, 事件 C 表示四面体的底面有蓝色. 试证明 A,B 和 C 两两独立, 但不相互独立.

证明: 显然,

$$\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(C)=\frac{1}{2},\qquad \mathbb{P}(AB)=\mathbb{P}(AC)=\mathbb{P}(BC)=\frac{1}{4},\qquad \mathbb{P}(ABC)=\frac{1}{4},$$

所以

$$\mathbb{P}(AB)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B),\quad \mathbb{P}(AC)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C),\quad \mathbb{P}(BC)=\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C),\quad \mathbb{P}(ABC)\neq\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C),$$

即 A,B 和 C 两两独立, 但不相互独立. □

练习2.3.6 现有如下系统,

其中元件 A,B,C 互相独立, 而且可靠性分别为 p_1,p_2,p_3, 求系统不正常工作的概率.

解: 系统正常工作的概率为

$$\mathbb{P}(A\cup(BC))=1-\mathbb{P}(\overline{A}\cap\overline{(BC)})=1-\mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(\overline{(BC)}),$$

系统不能正常工作的概率为

$$\mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(\overline{(BC)})=(1-\mathbb{P}(A))(1-\mathbb{P}(BC))=(1-p_1)(1-p_2p_3).$$

□

练习2.3.7 设事件 A,B,C 两两独立, 且满足 $ABC=\varnothing$ 及 $\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(C)=x$, 求 $\max(x)$.

解: 因为

$$A-(B\cup C)=A-((AB)\cup(AC)),$$

所以

$$\mathbb{P}(A-(B\cup C))=\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}((AB)\cup(AC)). \tag{1.5}$$

注意到 A,B,C 两两独立得

$$\mathbb{P}((AB)\cup(AC))=\mathbb{P}(AB)+\mathbb{P}(AC)-\mathbb{P}(ABC)=\mathbb{P}(AB)+\mathbb{P}(AC)=2x^2,$$

代入(1.5)有

$$\mathbb{P}(A-(B\cup C))=x-2x^2.$$

注意到概率取值于 $[0,1]$ 得

$$0\leqslant x-2x^2\leqslant 1. \tag{1.6}$$

而 $f(x)\triangleq\ x-2x^2$ 在 $[0,1]$ 上的极大值点为 $1/4$，并且

$$f(0)=f\left(\frac{1}{2}\right)=0,$$

再注意到(1.6)得

$$0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}.$$

例如, 有一个均匀正四面体, 其中的三个面分别涂上红黄、红蓝和黄蓝色, 在剩下的一个面上涂有白色. 掷此四面体落地后, 事件 A 表示四面体的底面有红色, 事件 B 表示四面体的底面有黄色, 事件 C 表示四面体的底面有蓝色. 则

$$\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(C)=\frac{1}{2},$$

A,B 和 C 两两独立且 $ABC=\varnothing$.

所以 x 的最大值为$\frac{1}{2}$. □

练习2.3.8 已知事件 A 和 B 相互独立且互不相容, 求 $\min\{\mathbb{P}(A),\mathbb{P}(B)\}$.

解: 由独立性

$$\mathbb{P}(AB)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

由 A 与 B 互不相容得

$$\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(\varnothing)=0,$$

所以 $\mathbb{P}(A)=0$ 或 $\mathbb{P}(B)=0$, 故 $\min\{\mathbb{P}(A),\mathbb{P}(B)\}=0$. □

练习2.3.9 假设事件 B 发生的概率为 $\mathbb{P}(B)\in(0,1)$, 试证明事件 A 与 B 独立的充要条件为 $\mathbb{P}(A|B)=\mathbb{P}(A|\overline{B})$.

证明: 必要性. 注意到 $0<\mathbb{P}(B)<1$, 有

$$\mathbb{P}(A|B)=\mathbb{P}(A),\qquad \mathbb{P}(\overline{B})>0.$$

再注意到 A 和 $\overline{B}$ 也相互独立, 有

$$\mathbb{P}(A|\overline{B})=\mathbb{P}(A),$$

即得必要性.

充分性. 由于

$$\frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A\overline{B})}{\mathbb{P}(\overline{B})},$$

导致

$$\mathbb{P}(\overline{B})\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A\overline{B}),$$

即

$$(1-\mathbb{P}(B))\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(B)(\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(AB)),$$

整理得

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

即充分性成立. □

练习2.3.10 称事件 A 与 B 关于事件 C 条件独立, 如果事件 A, B, C 满足 $\mathbb{P}(AB|C) = \mathbb{P}(A|C)\cdot\mathbb{P}(B|C)$, 其中 $\mathbb{P}(C) > 0$. 试证明: (1) 当 $\mathbb{P}(BC) > 0$ 时, 上述条件独立性的充要条件是 $\mathbb{P}(A|BC) = \mathbb{P}(A|C)$; (2) 举例说明“独立”与”条件独立”两者没有蕴含关系.

证明: (1) 由 $P(BC) > 0$ 知:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(AB|C) = \mathbb{P}(A|C)\mathbb{P}(B|C) &\Longleftrightarrow \frac{\mathbb{P}(ABC)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\mathbb{P}(AC)\mathbb{P}(BC)}{\mathbb{P}(C)\mathbb{P}(C)} \\ &\Longleftrightarrow \frac{\mathbb{P}(ABC)}{\mathbb{P}(BC)} = \frac{\mathbb{P}(AC)}{\mathbb{P}(C)} \\ &\Longleftrightarrow \mathbb{P}(A|BC) = \mathbb{P}(A|C),\end{aligned}$$

即(1)成立.

(2) 反例: 掷质地均匀硬币两次, 用 A 表示第一次得正面, B 表示第二次得正面, C 表示得正面和反面各一次. 则 A 与 B 相互独立. 但是

$$\mathbb{P}(AB|C) = 0 \neq \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A|C)\mathbb{P}(B|C),$$

即 A 与 B 不是关于 C 条件独立.

正例: 掷一枚质地均匀硬币, 用 A 表示出现正面, B 表示出现反面, $C = A$. 则 A 与 B 不相互独立, 但是 $\mathbb{P}(AB|C) = 0 = \mathbb{P}(A|C)\mathbb{P}(B|C)$, 即 A 与 B 关于 C 条件独立. □

练习2.3.11 若对于 $i = 1, 2$, $\Omega_i = \{1, 2, 3\}$, $\mathscr{F}_i$ 由 Ω_i 的所有子集构成, 试证明 $\mathscr{C} = \{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathscr{F}_1, A_2 \in \mathscr{F}_2\}$ 对于并运算不封闭.

证明: 显然 $\{(1,1)\} \in \mathscr{C}$, $\{(2,2)\} \in \mathscr{C}$, 但是

$$\{(1,1)\} \cup \{(2,2)\} = \{(1,1),(2,2)\} \notin \mathscr{C}.$$

□