概率论习题解答

李勇　张余辉

March 27, 2018

1　第一章

§1.1.6 练习题

练习1.1.1 请举一个不具备频率稳定性的不确定现象的例子.

解: 考察模型 $y=\sin(\frac{\pi}{6})+e$, 其中 e 按照某种非随机方式变化, 第 n 次观测时 e 的取值为 $(-1)^{[\frac{\log n}{\log 2}]}$.

观测序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	$\cdots$
e	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	$\cdots$
y	1.5	-0.5	-0.5	1.5	1.5	1.5	1.5	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5	1.5	$\cdots$

表1.1 e 以某种非随机方式变化时 y 的观测值

事实上, 对于整数 $k\geqslant 0$,

$$\frac{\log n}{\log 2}=k,\qquad 2^k\leqslant n<2^{k+1}.$$

此时有

$$y=0.5+(-1)^k.$$

用 $f_{1.5}(n)$ 表示前 n 个观测值中 $y=1.5$ 的频率, 则

$$\lim_{k\to\infty}f_{1.5}(2^{2k}-1)=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2^{2k}-1}\sum_{i=0}^{k-1}2^{2i}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2^{2k}-1}\cdot\frac{2^{2k}-1}{3}=\frac{1}{3},$$

$$\lim_{k\to\infty}f_{1.5}(2^{2k+1}-1)=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2^{2k+1}-1}\sum_{i=0}k2^{2i}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2^{2k+1}-1}\cdot\frac{2^{2k+2}-1}{3}=\frac{2}{3},$$

即 $y=1.5$ 的频率不具备频率的稳定性. □

练习1.1.2 请给出一个不确定现象的例子, 并给出相应的样本空间的数学表达式.

解: 投掷一颗质地均匀的骰子, 观测出现的点数, 用 i 表示"出现的点数为 i"$(i=1,2,3,4,5,6)$, 样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$. □

练习1.1.3 试证明 $A-B=A\cap\overline{B},\overline{A}=\Omega-A$.

证明: 由定义知,

$$A-B=\{\omega:\omega\in A\text{ 且 }\omega\notin B\}=\{\omega:\omega\in A\}\cap\{\omega:\omega\notin B\}=A\cap\overline{B},$$

$$\Omega-A=\{\omega:\omega\in\Omega\text{ 且 }\omega\notin A\}=\{\omega:\omega\notin A\}=\overline{A}.$$

□

练习1.1.4 设 A, B, C 为某随机实验中三个事件. 试说明下列事件关系的概率含义, 并画出相应的 Venn 图.

(a) $A \cap B \cap C = A$.

(b) $A \cup B \cup C = A$.

(c) $A \cap B \subset C$.

(d) $A \subset \overline{B \cap C}$.

解: (a) 事件 A 发生当且仅当事件 A, B, C 同时发生.

(b) 事件 A 发生当且仅当事件 A, B, C 中至少有一个发生.

(c) 事件 A, B 同时发生能够推出事件 C 发生.

(d) 事件 A 发生能够推出事件 B, C 中至少有一个不发生.

Venn 图暂略. □

练习1.1.5 考察某网站在一小时内被点击的次数. 记

$$A_k = \{\text{至少被点击}\, k \,\text{次}\},$$

试述事件 $\overline{A}_k, A_k - A_{k+1}, \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 和 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 的含义.

解: $\overline{A}_k = \{$点击次数不多于 $k-1$ 次$\}$; $A_k - A_{k+1} = \{$点击次数为 k 次$\}$; $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \{$点击次数至少 1 次$\}$; $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$ 表示不可能事件. □

练习1.1.6 若 $\{A_n\}$ 为事件列, 试证明

$$\varliminf_{n\to\infty} A_n \subset \varlimsup_{n\to\infty} A_n.$$

证明: 显然对于任意正整数 k 和 m, 有

$$\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n,$$

所以

$$\varliminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n \right) \subset \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n, \qquad m \geqslant 1.$$

进而

$$\varliminf_{n\to\infty} A_n \subset \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n = \varlimsup_{n\to\infty} A_n.$$

□

练习1.1.7 若任意 $n \geqslant 1$ 有 $A_n \subset A_{n+1}$, 就称事件列 $\{A_n\}$ 为单增事件列; 任意 $n \geqslant 1$ 有 $A_n \supset A_{n+1}$, 就称事件列 $\{A_n\}$ 为单减事件列. 对于单增事件列 $\{A_n\}$, 试证明

$$\varlimsup_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \varliminf_{n\to\infty} A_n.$$

对于单减事件列, 相应的结论是什么?

证明: 由 $\{A_n\}$ 单增知, 任意 $n \geqslant 1$ 有

$$\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,$$

从而有

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,$$

即

$$\varlimsup_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

由 $\{A_n\}$ 单增知, 任意 $n \geqslant 1$ 有

$$\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = A_n,$$

从而有

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

即

$$\varliminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

因此,

$$\varlimsup_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \varliminf_{n\to\infty} A_n.$$

对于单增事件列 $\{B_n\}$ 有

$$\varlimsup_{n\to\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \varliminf_{n\to\infty} B_n.$$

□

练习1.1.8 设 $A_i, i \geqslant 1$ 为事件, 试证明

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \left(A_i - \left(\bigcup_{k=1}^{i-1} A_k \right) \right),$$

这里及以后约定 $\bigcup\limits_{i=1}^{0} A_i = \varnothing$.

证明: 显然

$$\left\{ \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right\} \quad \text{和} \quad \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} \left(A_i - \left(\bigcup_{k=1}^{i-1} A_k \right) \right) \right\}$$

都是单增事件. 一方面,

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \supset \bigcup_{i=1}^{n} \left(A_i - \left(\bigcup_{k=1}^{i-1} A_k \right) \right). \tag{1.1}$$

另一方面, 若 $\omega \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$, 则存在 $j \leqslant n$, 使得

$$j = \arg\min\{m : \omega \in A_m\},$$

因此,

$$\omega \in \bigcup_{i=1}^{j}\Big(A_i - \Big(\bigcup_{k=1}^{i-1} A_k\Big)\Big) \subset \bigcup_{i=1}^{n}\Big(A_i - \Big(\bigcup_{k=1}^{i-1} A_k\Big)\Big),$$

即

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subset \bigcup_{i=1}^{n}\Big(A_i - \Big(\bigcup_{k=1}^{i-1} A_k\Big)\Big). \tag{1.2}$$

由(1.1)和(1.2)得

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n}\Big(A_i - \Big(\bigcup_{k=1}^{i-1} A_k\Big)\Big), \qquad n \geqslant 1.$$

进而

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \lim_{n\to\infty}\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \lim_{n\to\infty}\bigcup_{i=1}^{n}\Big(A_i - \Big(\bigcup_{k=1}^{i-1} A_k\Big)\Big) = \bigcup_{i=1}^{\infty}\Big(A_i - \Big(\bigcup_{k=1}^{i-1} A_k\Big)\Big).$$

□

练习1.1.9 设 $\mathscr{A} = \{A\}$, 求 $\sigma(\mathscr{A})$.

解: 一方面, 由 $\sigma(\mathscr{A})$ 是 $\mathscr{A}$ 生成的事件域, $A \in \mathscr{A} \subset \sigma(\mathscr{A})$, 因此, 由事件域的定义和性质知, $\Omega, \varnothing, A, \overline{A} \in \sigma(\mathscr{A})$, 因此, $\{\Omega, \varnothing, A, \overline{A}\} \subset \sigma(\mathscr{A})$. 另一方面, 可以验证, $\{\Omega, \varnothing, A, \overline{A}\}$ 是包含 $\mathscr{A}$ 的事件域, 故 $\{\Omega, \varnothing, A, \overline{A}\} \supset \sigma(\mathscr{A})$. 因此

$$\sigma(\mathscr{A}) = \{\Omega, \varnothing, A, \overline{A}\}.$$

□

练习1.1.10 依据概率的频率学派定义, 试证明概率的规范性.

证明: 依据概率的频率学派定义, 将事件 Ω 的频率稳定值称为事件 Ω 的概率, 而事件 Ω 的频率总是 1, 因此其稳定值为 1, 因而事件 Ω 的概率 $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, 这就是概率的规范性. □

§1.2.5 练习题

练习1.2.1 用计数原理证明

$$\sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i} = n2^{n-1}.$$

证明: 考虑 n 个人的分房问题. 有一间单人房, 两间多人房, 单人间必须且只能住 1 人, 多人间的人数不限制.

乘法原理. 分为两步, 第一步, 从 n 个人选取一人住单人间, 共有 n 种方法; 第二步, 剩下的 $n-1$ 个人分到两间多人间, 每人有两种方法, 共有 2^{n-1} 种方法. 总共 $n2^{n-1}$ 种方法.

加法原理. 完成此任务共有 n 种可能方式, 单人间和第一间多人间共住 i 个人($i = 1, 2, \cdots, n$). 对于每种可能方式, 共有 $i\binom{n}{i}$ 种方法. 所以完成此任务共有 $\sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i}$ 种方法.

因此结论成立. $\square$

练习1.2.2 把 n 个不同的元素分成 r 组, 使得各个组中元素的个数分别为 $n_i, 1 \leqslant i \leqslant r$, 问有多少种不同的分组方法?

解: 设有 x 种不同的分组方法. 把 n 个不同的元素不放回地依次取出排成一列, 共有 $n!$ 种不同的排法. 也可以分成两步完成: 第一步, 把 n 个不同的元素分成 r 组, 使得各个组中元素的个数分别为 $n_i, 1 \leqslant i \leqslant r$, 共有 x 种不同的分组方法; 第二步, 将各组元素排成一列, 共有 $n_1!n_2!\cdots n_r!$ 种排法. 因此, 总共有 $xn_1!n_2!\cdots n_r!$ 种不同的排法. 由此得出

$$x = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}.$$

$\square$

练习1.2.3 袋中有 r 个红球与 b 个黑球, 现一一摸出, 直至剩下同色球为止, 求剩下的全是红球的概率.

解: 将袋中的球一一摸出, 直到最后一个球被摸出为止, 用 A 表示最后摸出的是红球, 则事件 A 发生当且仅当剩下的全是红球发生, 从而

$$\mathbb{P}(A) = \frac{r}{r+b}.$$

另一解法. 看作球可辨. 显然, $n(\Omega) = (b+r)!$. 完成剩下的全是红球此任务共有 r 种可能方式, 剩下的全是红球为 i 个($i = 1, 2, \cdots, r$). 对于每种可能方式, 分三步. 第一步, 从 r 个红球选出 i 个红球依次放在最后 i 个位置, 共有 $\binom{r}{i}i!$ 种排法; 第二步, 在倒数第 $i+$ 位置放一个黑球, 共有 b 种方法; 第三步, 在剩下 $r+b-i-1$ 个位置依次放其余的 $r+b-i-1$ 个球, 共有 $(r+b-i-1)!$ 种排法. 所以,

$$n(A) = \sum_{i=1}^{r}\binom{r}{i}i!b(r+b-i-1)! = b!r!\sum_{i=1}^{r}\binom{r-i+b-1}{b-1} = b!r!\sum_{j=0}^{r-1}\binom{j+b-1}{b-1} = b!r!\binom{b+r-1}{b}.$$

所以,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{b!r!\binom{b+r-1}{b}}{(b+r)!} = \frac{r}{r+b}.$$

$\square$

练习1.2.4 甲抛 $n+1$ 个, 乙抛 n 个均匀硬币, 求甲得正面比乙多的概率.

解: 用 A 表示甲得正面比乙多, 用 B 表示甲得反面比乙多, 则 A 与 B 互不相容, 事件 A 和 B 有相同多的样本点. 注意到 $\Omega = A \cap B$, 有

$$n(A) = n(B) = \frac{1}{2}n(\Omega),$$

因此得 $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$. $\square$

练习1.2.5 从 0 至 9 这十个数中不放回地取出四个依次排好, 求恰排成一个四位偶数的概率.

解: 显然, $n(\Omega) = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7$. 用 A 表示恰排成一个四位偶数, B 表示恰排成一个四位的个位数为 0 偶数, B 表示恰排成一个四位的个位数不为 0 偶数, 则 B 和 C 互不相容且 $A = B \cup C$. 则 $n(B) = 9\cdot 8\cdot 7$,

$n(C)=8\cdot 8\cdot 7\cdot 4$(先选定个位, 再选定千位). 因此, $n(A)=n(B)+n(C)=9\cdot 8\cdot 7+8\cdot 8\cdot 7\cdot 4$, 进而,

$$\mathbb{P}(A)=\frac{9\cdot 8\cdot 7+8\cdot 8\cdot 7\cdot 4}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}=\frac{41}{90}\approx 0.46.$$

□

练习1.2.6 袋中有 n 个球, 分别标有号码 $1,2,\cdots,n$. 从中任意不放回地取 k 个球, 求取出的球中有第 i 号球的概率.

解: 用 A 表示取出的球中有第 i 号球, 则 $n(\Omega)=\binom{n-1}{n-k}$, $n(A)=\binom{n-1}{n-k}$, 所以

$$\mathbb{P}(A)=\frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}}=\frac{k}{n}.$$

□

练习1.2.7 将 r 个红球与 b 个黑球任排成一列($r\leqslant b$), 求没有两个红球相邻的概率.

解: 看作球不可辨. 显然, $n(\Omega)=\binom{r+b}{r}$. 用 A 表示没有两个红球相邻. 把黑球看成隔板, b 个黑球把直线分成 $b+1$ 个区间盒子, 完成 A 相当于往 $b+1$ 个盒子任意放 r 个不可辨球,每个盒子至多只能放一个球, 所以 $n(A)=\binom{b+1}{r}$, 因此,

$$\mathbb{P}(A)=\frac{\binom{b+1}{r}}{\binom{r+b}{r}}.$$

□

练习1.2.8 袋中有 r 个红球与 b 个黑球, 现有放回地任意摸球, 直到摸出 i 个红球为止, 求恰好摸 k 次的概率.

解: 看作球可辨. 将球编号 1 至 $r+b$, 则 $n(\Omega)=(r+b)^k$. 用 A 表示恰好在第 k 次摸出第 i 个红球, B 表示恰好在前 $k-1$ 次摸出 $i-1$ 个红球, C 表示恰好在第 k 次摸出红球, 则 $A=BC$. 乘法原理, 第一步, 从前 $k-1$ 个位置中选出 $i-1$ 个位置作为放红球的位置, 共有 $\binom{k-1}{i-1}$ 种取法; 第二步, 在前面的 $i-1$ 个红球位置和第 k 位置放红球, 共有 r^i 种取法; 第三步, 在剩下 $k-i$ 个位置放黑球, 共有 b^{k-i} 种取法. 所以

$$\mathbb{P}(A)=\frac{\binom{k-1}{i-1}r^ib^{k-i}}{(r+b)^k}.$$

□

练习1.2.9 在单位圆的圆周上任取三点 A,B,C, 试求事件 $E=\{\triangle ABC$ 成锐角三角形$\}$ 的概率.

解: 用 x,y 和 z 分别表示三段圆弧 AB,BC 和 CA 所对应的圆心角, 则

$$\Omega=\{(x,y,z):x>0,y>0,z>0,x+y+z=2\pi\}.$$

此时, $E=\{(x,y,z)\in\Omega:x<\pi,y<\pi,z<\pi\}$. 进而 $m(E)$ 为 $m(\Omega)$ 的四分之一, 所以, $\mathbb{P}(E)=0.25$. □

练习1.2.10 把长为 ℓ 的线段任意折成 3 段, 试求它们可构成一个三角形的概率.

解: 用 x, y 和 z 分别表示第一, 第二和第三段的长度, 则

$$\Omega = \{(x, y, z) : x > 0, y > 0, z > 0, x + y + z = \ell\}.$$

用 A 表示可构成一个三角形, 则

$$A = \{(x, y, z) \in \Omega : x + y > z, y + z > x, z + x > y\} = \{(x, y, z) \in \Omega : x < \frac{\ell}{2}, y < \frac{\ell}{2}, z < \frac{\ell}{2}\}.$$

进而 $m(A)$ 为 $m(\Omega)$ 的四分之一, 所以, $\mathbb{P}(A) = 0.25$. □

练习1.2.11 向面积为 S 的 $\triangle ABC$ 内任投一点 P, 求 $\triangle PBC$ 的面积小于 $S/2$ 的概率.

解: 设三角形底边 BC 边长为 α, 高为 h, DE 为三角形对应的中位线. 则

$$\Omega = \{P : P\text{ 落在 }\triangle ABC\text{ 内}\}, \qquad G = \{P : P\text{ 落在梯形 }BCED\text{ 内}\},$$

从而

$$m(\Omega) = \frac{1}{2}\alpha h, \qquad m(G) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\alpha}{2} + \alpha\Big)\frac{h}{2} = \frac{3}{8}\alpha h,$$

所以, $\mathbb{P}(G) = \frac{3}{4}$. □