中国科学: 数学 2023 年 第 53 卷 第 11 期: 1437 ~ 1460

SCIENTIA SINICA Mathematica

论 文

《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

CrossMark
click for updates

向上或向下一致有限程连续时间 Markov 链的常返性和唯一性准则

张余辉

北京师范大学数学科学学院和数学与复杂系统教育部重点实验室, 北京 100875

E-mail: zhangyh@bnu.edu.cn

收稿日期: 2022-12-16; 接受日期: 2023-05-18; 网络出版日期: 2023-09-25

国家重点研发计划 (批准号: 2020YFA0712900) 和国家自然科学基金 (批准号: 10871008 和 12171038) 资助项目

摘要 连续时间 Markov 链唯一性的判别准则是富有挑战性的问题. 本文研究向上或向下一致有限程连续时间 Markov 链并获得其常返性和唯一性的显式判别准则, 主要想法源自最近对单死过程相关问题的研究. 此外, 本文还提供了一些具体例子以说明本文的结果.

关键词 常返性 唯一性 单生过程 单死过程

MSC (2020) 主题分类 60J60

1 引言

在概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathrm{P})$ 上, 考虑可数状态空间 $\mathbb{Z}_+ := \{0,1,2,\ldots\}$ 的具有转移概率矩阵 $P(t) = (p_{ij}(t))$ 和转移速率 (密度) 矩阵 $Q=(q_{ij})$ 的连续时间时齐 Markov 链 $\{X(t): t\geqslant 0\}$. 通常转移速率矩阵称为 Q 矩阵. 本文总假设 Q 矩阵是全稳定和保守的, 即对所有的 $i\in\mathbb{Z}_+$, 有

$$q_i := -q_{ii} = \sum_{j\neq i} q_{ij} < +\infty.$$

需要注意的是, 在实际中, 我们知道的是 Q 矩阵而非 $P(t)$. 对于给定的 Q 矩阵, 是否存在一个满足非负性、Chapman-Kolmogorov 条件、连续性条件 (跳条件) 及 $P(t)\mathbf{1}\leqslant \mathbf{1}$ 的次转移概率矩阵 $P(t)$ (其中 $\mathbf{1}$ 为元素全为 1 的列向量), 使得其 0 时的导数矩阵 $P'(t)|_{t=0}=Q$? 此为 Q 过程的存在性问题, 该 Markov 链称为相应的 Q 过程. 从 Chapman-Kolmogorov 方程出发, 可以推导出如下两个微分方程:

$$\text{Kolmogorov 向后方程}\quad P'(t)=QP(t),$$

$$\text{Kolmogorov 向前方程}\quad P'(t)=P(t)Q.$$

英文引用格式: Zhang Y H. Criteria on recurrence and uniqueness of time-continuous Markov chains with uniformly upward or downward finite ranges (in Chinese). Sci Sin Math, 2023, 53: 1437–1460, doi: 10.1360/SCM-2022-0745

回顾 Q 矩阵全稳定且保守的假设, 可知每一个 Q 过程都满足 Kolmogorov 向后方程. 由此出发, Q 过程的存在性问题就转化为 Kolmogorov 向后方程的解的存在性问题. 事实上, 此时, Q 过程总是存在, 因为方程的最小非负解就是一个 Q 过程, 称为最小 Q 过程, 而且 Kolmogorov 向后、向前方程有相同的最小非负解. 这是由 Feller [7] 在 1940 年构造性地解决的, 文献中称为 Feller 构造.

接下来自然要问, 若 Q 过程存在, 是否唯一? 这是所谓 Q 过程的唯一性问题, 与 Markov 链的常返性与遍历性一起合称为 Markov 链的经典问题. 为考虑唯一性, 从向后方程可以推导出流出方程

$$(\lambda+q_i)u_i=\sum_{j\neq i}q_{ij}u_j,\quad 0\leqslant u_i\leqslant 1,\quad i\geqslant 0,$$

其解集合称为流出空间. 注意流出空间并非线性空间, 但可以暂时借用维数概念, 零维时称为零流出, 1 维时称为单流出, 维数大于 1 时称为多流出. 而此时唯一性与零流出等价, 这是分别由 Feller [8] 和 Reuter [10] 获得的结果.

定理 1.1 (唯一性准则)　给定一个 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$, Q 过程唯一当且仅当对某个 (等价地, 对于所有) $\lambda>0$, 上述流出方程仅有平凡解 $u_i\equiv 0$.

全稳定保守且决定唯一 Q 过程的 Q 矩阵称为正则的. 关于唯一性的更多实用准则, 可参见文献 [3]. 上述准则有很多应用, 例如, 对于生灭过程和单生过程, 由此准则可得到完整答案, 这是因为, 由于单生的特点, 其流出空间至多单流出, 排除掉单流出, 就是零流出. 然而将该准则直接应用于下面所谓的 m 死过程, 哪怕是单死过程, 由于单死 Q 矩阵可能多流出, 甚至可能是无穷流出的, 要排除这些情形和单流出情形, 几乎是不可能完成的任务, 故其唯一性问题是很困难的. 正是由于这些原因, 在过去几十年, 单生过程一直被认为是可以期待获得唯一性显式判别准则的最大类 Markov 链. 幸运的是, 最近我们得到了单死过程唯一性的答案, 其中后面的定理 1.2 扮演了重要角色 1). 此工作激发我们去研究所谓的向上或向下一致有限程 Markov 链的常返性和唯一性.

给定一个 Q 矩阵, 若存在一个正整数 m 使得

$$q_{i,i+m}>0,\quad q_{ij}=0,\quad j>i+m,\quad i\geqslant 1,$$

则称其为向上一致有限程的 Q 矩阵; 对称地, 若存在一个正整数 m 使得

$$q_{i,i-m}>0,\quad q_{ij}=0,\quad 0\leqslant j<i-m,\quad i\geqslant m,$$

则称其为向下一致有限程的 Q 矩阵. 特别地, 对于 $m=1$ 的情形, 此 Q 矩阵也分别称为单生 Q 矩阵和单死 Q 矩阵, 或者向上非跨跳 Q 矩阵和向下非跨跳 Q 矩阵. 为简单起见, 分别称其为 m 生 Q 矩阵和 m 死 Q 矩阵. 关于单生过程和单死过程的系统性结果, 参见文献 [1,2,4,9,12,14–16]. 注意到, 在过去关于单生过程的研究中, 总假设 $q_{01}>0$ 和对于任意 $j>1$ 有 $q_{0j}=0$. 对于向上一致有限程 Q 矩阵, 这里去掉了关于状态 0 的相关假设.

近年的研究表明唯一性与常返性密切相关 (参见文献 [3,11]). 相关结果陈述如下.

定理 1.2　令 E 是一个可数集合, 给定 Q 矩阵 $Q=(q_{ij}:i,j\in E)$. 记次随机矩阵

$$\Pi(\lambda)=(\Pi_{ij}(\lambda):i,j\in E)=\left(\frac{(1-\delta_{ij})q_{ij}}{\lambda+q_i}:i,j\in E\right),\quad \lambda>0,$$

1) Mao Y H, Yan Y Y, Zhang Y H. Criteria for three classical problems of downwardly skip-free Markov processes. Preprint, 2022

设 $(p_j : j \in E)$ 是 E 上一个正概率测度. 引入一个虚拟状态 Δ, 在扩大的状态空间 $E_\Delta := E \cup \{\Delta\}$ 上定义一个新转移概率矩阵

$$\Pi_{ij}^{\Delta}(\lambda) = \begin{cases} \Pi_{ij}(\lambda), & \text{若 } i, j \in E, \\ \dfrac{\lambda}{\lambda + q_i}, & \text{若 } i \in E, \quad j = \Delta, \\ p_j, & \text{若 } i = \Delta, \quad j \in E, \\ 0, & \text{若 } i = j = \Delta. \end{cases} \tag{1.1}$$

则由原 Q 矩阵决定的 Q 过程唯一当且仅当离散时间 $\Pi^{\Delta}(\lambda) = (\Pi_{ij}^{\Delta}(\lambda) : i, j \in E_\Delta)$ 链是常返的.

对于 Markov 链 $P(t) = (p_{ij}(t))$, 若对于每个 $h > 0$, 其离散时间 h 骨架链 $P(h)$ 是常返的, 等价地, 对于所有 $i \in \mathbb{Z}_+$, 有 $\int_0^{+\infty} p_{ii}(t)dt = +\infty$, 则称 $P(t)$ 是常返的.

定义 $P(t)$ 的嵌入链 $\Pi = (\Pi_{ij})$ 如下:

$$\Pi_{ij} = \mathbb{1}_{\{q_i \neq 0\}}(1 - \delta_{ij})\frac{q_{ij}}{q_i} + \mathbb{1}_{\{q_i = 0\}}\delta_{ij}.$$

众所周知, 对于正则不可约 Q 矩阵, 相应的 Q 过程常返当且仅当其嵌入链常返 (参见文献 [6]). 更准确的叙述是, 对全稳定保守且不可约的 Q 矩阵, 相应的最小 Q 过程常返当且仅当其嵌入链常返. 详细的结果见如下定理 (参见文献 [2,8]).

定理 1.3 (常返性定理) 对于给定的全稳定保守 Q 矩阵 $Q = (q_{ij})$, 记相应的最小 Q 过程为 $P^{\min}(t) = (p_{ij}^{\min}(t))$, 则

$$\int_0^{+\infty} p_{ij}^{\min}(t)dt = \frac{1}{q_j}\sum_{n=0}^{+\infty} \Pi_{ij}^{(n)}.$$

特别地, 若 Q 是不可约且正则的, 则相应的 Q 过程 $P(t)$ 常返当且仅当其嵌入链常返.

对于 $\mathbb{Z}_+$ 上全稳定保守 Q 矩阵, 在扩大空间 $\mathbb{Z}_+^{\Delta} := \mathbb{Z}_+ \cup \{\Delta\}$ 上定义一个全稳定保守且不可约 Q 矩阵 $Q^{\Delta} = (q_{ij}^{\Delta})$ 如下:

$$q_{ij}^{\Delta} = \begin{cases} 1, & \text{若 } i \in \mathbb{Z}_+, \quad j = \Delta, \\ q_{ij}, & \text{若 } i \neq j, \quad i, j \in \mathbb{Z}_+, \\ -1 - q_i, & \text{若 } i = j, \quad i, j \in \mathbb{Z}_+, \\ p_j, & \text{若 } i = \Delta, \quad j \in \mathbb{Z}_+, \\ -1, & \text{若 } i = j = \Delta, \end{cases}$$

其中 $(p_j : j \in \mathbb{Z}_+)$ 是 $\mathbb{Z}_+$ 上一个正概率测度. 显然, (1.1) 中的 $\Pi^{\Delta}(1)$ 是 Q^{Δ} 决定过程的嵌入链. 从定理 1.2 和 1.3 可以直接得出, 原 Q 矩阵决定的 Q 过程唯一当且仅当 Q^{Δ} 相应的最小过程是常返的.

基于以上结果, 本文研究了向上或向下一致有限程 Markov 链的常返性和唯一性. 本文余下内容的安排如下. 第 2 节对不可约的向上或向下一致有限程 Q 矩阵, 给出并证明其相应的最小过程的常返性准则 (定理 2.1 和 2.2), 并呈现一些具体例子. 第 3 节结合第 2 节常返性准则及上述讨论, 对全稳定保守的向上或向下一致有限程 Q 矩阵, 获得其过程唯一性准则 (定理 3.1 和 3.2). 这两节对单生、单死、2 生和 2 死均有详尽的讨论. 由于记号的复杂性, 在此处暂不展示本文的主要结果, 详细结论见各节. 最后, 为便于读者理解本文中一些例子的计算, 附录 A 给出差数列及和数列 (Fibonacci 数列) 的相关内容.

2 常返性准则

对正则不可约的向上或向下一致有限程 Q 矩阵, 在研究其相应 Q 过程的常返性问题之前, 对一个全稳定保守且不可约 Q 矩阵, 其相应的最小过程记为 $(X(t))_{t\geqslant 0}$, 考虑其常返性问题.

记状态 0 的回返时为 σ_0, 即

$$\sigma_0 = \inf\{t > \text{首次跳时刻} : X(t) = 0\}.$$

固定 $N \in \mathbb{Z}_+$, 记集合 $\{N, N+1, \dots\}$ 的首次击中时为

$$\tau_{N+} = \inf\{t > 0 : X(t) \geqslant N\}.$$

令

$$q_i^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} q_{ij}, \quad 0 \leqslant k < i; \quad q_i^{(k)} = \sum_{j=k}^{+\infty} q_{ij}, \quad k > i \geqslant 0.$$

记

$$p_i^{(N)} = \mathrm{P}_i(\tau_{N+} < \sigma_0).$$

由强 Markov 性质和过程的跳性质, 得到下面的方程组:

$$p_0^{(N)} = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{q_{0j}}{q_0} \cdot p_j^{(N)} + \frac{q_0^{(N)}}{q_0}, \tag{2.1}$$

$$p_i^{(N)} = \sum_{1\leqslant j\leqslant i-1} \frac{q_{ij}}{q_i} \cdot p_j^{(N)} + \sum_{i+1\leqslant j\leqslant N-1} \frac{q_{ij}}{q_i} \cdot p_j^{(N)} + \frac{q_i^{(N)}}{q_i}, \quad 1 \leqslant i \leqslant N-1, \tag{2.2}$$

$$p_N^{(N)} = 1. \tag{2.3}$$

此时限制在 $\{1, 2, \dots, N-1\}$ 上的嵌入链的次转移概率矩阵为

$$^{(N)}\Pi_{ij} = \frac{q_{ij}}{q_i}(1 - \delta_{ij}), \quad 1 \leqslant i, j < N.$$

则方程组 (2.2) 可改写为

$$(I^{(N)} - {}^{(N)}\Pi)\boldsymbol{p}^{(N)} = \boldsymbol{r}^{(N)},$$

其中, $I^{(N)}$ 是 $(N-1)\times(N-1)$ 阶单位矩阵, $\boldsymbol{p}^{(N)} = (p_1^{(N)}, \dots, p_{N-1}^{(N)})^{\mathrm{T}}$ 且 $\boldsymbol{r}^{(N)} = (\frac{q_1^{(N)}}{q_1}, \dots, \frac{q_{N-1}^{(N)}}{q_{N-1}})^{\mathrm{T}}$. 注意 $\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}$ 表示向量 $\boldsymbol{u}$ 的转置.

由 Q 的不可约性知, 此局部嵌入链是非常返的, 故

$$(I^{(N)} - {}^{(N)}\Pi)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} ({}^{(N)}\Pi)^n < +\infty.$$

由此得出

$$\boldsymbol{p}^{(N)} = \sum_{n=0}^{+\infty} ({}^{(N)}\Pi)^n \boldsymbol{r}^{(N)},$$

其蕴涵着方程组 (2.2) 存在唯一解, 即上面这个解. 该解的概率意义是清楚的, 即对原来的嵌入链, 在回到 0 之前按照首次击中集合 $\{N, N+1, \dots\}$ 进行的分解.

众所周知, 最小过程常返当且仅当

$$\lim_{N\to+\infty}\mathrm{P}_0(\tau_{N+}<\sigma_0)=0.$$

因此, 在理论意义上, 由 (2.1) 和上面的讨论, 得到

$$\mathrm{P}_0(\tau_{N+}<\sigma_0)=\left(\frac{q_{01}}{q_0},\ldots,\frac{q_{0,N-1}}{q_0}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}({}^{(N)}\Pi)^n\boldsymbol{r}^{(N)}+\frac{q_0^{(N)}}{q_0};$$

进而, 常返性准则为

$$\lim_{N\to+\infty}\left(\frac{q_{01}}{q_0},\ldots,\frac{q_{0,N-1}}{q_0}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}({}^{(N)}\Pi)^n\boldsymbol{r}^{(N)}=0.$$

但在实际意义上, 对于一般 Q 矩阵, 它基本是不可能计算和使用的. 故本文只考虑一些特殊情形 Q 矩阵, 即 m 生或者 m 死转移速率矩阵.

对于 $2\leqslant k\leqslant N$, 令 $w_k=p_k^{(N)}-p_{k-1}^{(N)}$. 则由 (2.2) 和 (2.3) 得到

$$q_{i0}p_1^{(N)}+\sum_{2\leqslant k\leqslant i}q_i^{(k-1)}w_k=\sum_{i+1\leqslant k\leqslant N}q_i^{(k)}w_k,\quad 1\leqslant i\leqslant N-1.\tag{2.4}$$

接下来分别考虑 m 生转移速率矩阵和 m 死转移速率矩阵.

2.1　m 生转移速率矩阵

考虑 m 生情形. 假设存在一个正整数 m 使得

$$q_{i,i+m}>0,\quad q_{ij}=0,\quad j>i+m,\quad i\geqslant 1.$$

对于 $m\leqslant n\leqslant N-1$, 定义 $N\times N$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}_n=(a_{ik}^{(n)}:0\leqslant i,k\leqslant N-1)$ 如下:

$$a_{ik}^{(n)}=\begin{cases}\delta_{ik}, & \text{若 } 0\leqslant i<n,\quad 0\leqslant k<N,\\ \dfrac{q_{i-m+1}^{(k)}}{q_{i-m+1,i+1}}, & \text{若 } i=n,\quad 0\leqslant k\leqslant i-m,\\ -\dfrac{q_{i-m+1}^{(k+1)}}{q_{i-m+1,i+1}}, & \text{若 } i=n,\quad i-m+1\leqslant k<i,\\ 0, & \text{若 } i=n,\quad i\leqslant k<N,\\ 0, & \text{若 } n<i<N,\quad 0\leqslant k<N.\end{cases}$$

定义一些 N 维向量如下:

$$\boldsymbol{f}^{(j)}=\boldsymbol{A}_{N-1}\cdots\boldsymbol{A}_m\boldsymbol{e}_j,\quad j=0,1,\ldots,m-1,$$

其中, $\boldsymbol{f}^{(j)}=(f_0^{(j)},\ldots,f_{N-1}^{(j)})^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{e}_j$ 是 N 维单位向量 $\boldsymbol{e}_j=(\delta_{jk}:0\leqslant k<N)^{\mathrm{T}}$ $(j=0,1,\ldots,m-1)$. 定义 $N\times m$ 阶矩阵

$$\boldsymbol{F}^{(m)}=(\boldsymbol{f}^{(0)},\ldots,\boldsymbol{f}^{(m-1)}).$$

再定义 $m\times N$ 阶矩阵 $\boldsymbol{R}=(r_{ik}:N-m+1\leqslant i\leqslant N,0\leqslant k<N)$ 如下:

$$r_{ik}=\begin{cases}q_i^{(k)}, & \text{若 } N-m+1\leqslant i<N,\quad 0\leqslant k<i,\\ -q_i^{(k+1)}, & \text{若 } N-m+1\leqslant i<N,\quad i\leqslant k<N,\\ 1, & \text{若 } i=N,\quad 0\leqslant k<N.\end{cases}$$

m 维单位列向量 $(0,\dots,0,1)^{\mathrm{T}}$ 记为 $\boldsymbol{e}_m^{(m)}$. 定义 $m\times m$ 阶矩阵

$$\boldsymbol{C}^{(N)}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{F}^{(m)},\quad \boldsymbol{C}_j^{(N)}=(\boldsymbol{R}\boldsymbol{f}^{(0)},\dots,\boldsymbol{R}\boldsymbol{f}^{(j-1)},\boldsymbol{e}_m^{(m)},\boldsymbol{R}\boldsymbol{f}^{(j+1)},\dots,\boldsymbol{R}\boldsymbol{f}^{(m-1)}),$$

其中 $j=0,\dots,m-1$ $(m>1)$, 而当 $m=1$ 时, $\boldsymbol{C}_0^{(N)}=1$.

基于以上记号, m 生情形的常返性准则可以陈述如下.

定理 2.1 假设 m 生 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$ 是不可约的, 则相应的最小过程是常返的当且仅当

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{\sum_{k=0}^{N-1}q_0^{(k+1)}\sum_{j=0}^{m-1}\det(\boldsymbol{C}_j^{(N)})f_k^{(j)}}{\det(\boldsymbol{C}^{(N)})}=0,$$

其中 $\det(A)$ 是指方阵 A 的行列式. 若修改 $\bar{q}_{01}>0$ 和 $\bar{q}_{0j}=0$ (对于所有 $j\geqslant 2$) 还能够保持不可约性, 则原过程常返当且仅当

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{\det(\boldsymbol{C}_0^{(N)})}{\det(\boldsymbol{C}^{(N)})}=0.$$

注 2.1 事实上, 对于 $0\leqslant j\leqslant m-1$ 和 $0\leqslant i\leqslant m-1$, 有 $f_i^{(j)}=\delta_{ji}$ 且

$$f_{i+m-1}^{(j)}=\frac{1}{q_{i,i+m}}\left(\sum_{k=0}^{i-1}q_i^{(k)}f_k^{(j)}-\sum_{i\leqslant k\leqslant i+m-2}q_i^{(k+1)}f_k^{(j)}\right),\quad 1\leqslant i\leqslant N-m.$$

注 2.2 $\det(\boldsymbol{C}^{(N)})=\sum_{j=0}^{m-1}\boldsymbol{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}^{(j)}\det(\boldsymbol{C}_j^{(N)})$, 其中 $\boldsymbol{1}^{\mathrm{T}}=(1,\dots,1)$.

定理 2.1 的证明 从 (2.4) 和 m 生性质, 可以得到

$$q_{i0}p_1^{(N)}+\sum_{2\leqslant k\leqslant i}q_i^{(k-1)}w_k=\sum_{i+1\leqslant k\leqslant(i+m)\wedge N}q_i^{(k)}w_k,\quad 1\leqslant i\leqslant N-1. \tag{2.5}$$

对于所有 $1\leqslant k\leqslant N-1$, 令 $v_k=w_{k+1}=p_{k+1}^{(N)}-p_k^{(N)}$ 和 $v_0=p_1^{(N)}$. 则 (2.5) 成为

$$\sum_{0\leqslant k\leqslant i-1}q_i^{(k)}v_k=\sum_{i\leqslant k\leqslant(i+m)\wedge N-1}q_i^{(k+1)}v_k,\quad 1\leqslant i\leqslant N-1, \tag{2.6}$$

由 $q_i^{(i+m)}=q_{i,i+m}>0$ 知, 上式蕴涵着

$$v_{i+m-1}=\frac{1}{q_{i,i+m}}\left(\sum_{k=0}^{i-1}q_i^{(k)}v_k-\sum_{k=i}^{i+m-2}q_i^{(k+1)}v_k\right),\quad 1\leqslant i\leqslant N-m,$$

则由上面的讨论得到

$$\boldsymbol{v}^{(N)}:=\begin{bmatrix} v_0\\ \vdots\\ v_{m-1}\\ v_m\\ \vdots\\ v_{N-1}\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}_{N-1}\cdots\boldsymbol{A}_m\begin{bmatrix} v_0\\ \vdots\\ v_{m-1}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}=\sum_{j=0}^{m-1}v_j\boldsymbol{f}^{(j)}=\boldsymbol{F}^{(m)}\boldsymbol{v}^{(m)}. \tag{2.7}$$

结合 $p_N^{(N)}=\sum_{k=0}^{N-1}v_k$ 和 (2.3) 及 (2.6), 得到

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=0}^{i-1}q_i^{(k)}v_k-\sum_{k=i}^{N-1}q_i^{(k+1)}v_k=0, \quad N-m<i\leqslant N-1,\\ \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1}v_k=1.\end{cases} \tag{2.8}$$

由 (2.7) 和 (2.8) 可以得到, 当 $m>1$ 时,

$$\boldsymbol{C}^{(N)}\boldsymbol{v}^{(m)}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{v}^{(N)}=\boldsymbol{e}_m^{(m)}; \tag{2.9}$$

当 $m=1$ 时,

$$\boldsymbol{C}^{(N)}\boldsymbol{v}^{(1)}=\boldsymbol{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}^{(N)}=1.$$

基于本节开始的讨论, 可知方程组 (2.1) 存在唯一解, 等价地, 方程组 (2.9) 存在唯一解, 这意味着 $\det(\boldsymbol{C}^{(N)})\neq 0$. 因此, 对于方程组 (2.9), 由 Cramer 法则知, 该解为

$$\boldsymbol{v}^{(m)}=\frac{1}{\det(\boldsymbol{C}^{(N)})}\begin{bmatrix}\det(\boldsymbol{C}_0^{(N)})\\ \vdots\\ \det(\boldsymbol{C}_{m-1}^{(N)})\end{bmatrix}. \tag{2.10}$$

进而由 (2.7) 得到

$$\boldsymbol{v}^{(N)}=\frac{1}{\det(\boldsymbol{C}^{(N)})}\sum_{0\leqslant j\leqslant m-1}\det(\boldsymbol{C}_j^{(N)})\boldsymbol{f}^{(j)}.$$

再从 (2.1) 容易看出

$$p_0^{(N)}=\frac{1}{q_0}\cdot\frac{\sum_{k=0}^{N-1}q_0^{(k+1)}\sum_{j=0}^{m-1}\det(\boldsymbol{C}_j^{(N)})f_k^{(j)}}{\det(\boldsymbol{C}^{(N)})},$$

这意味着定理结论成立. □

注 2.3　当 $m=1$ 时, 单生过程常返当且仅当

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{\sum_{k=0}^{N-1}q_0^{(k+1)}f_k^{(0)}}{\sum_{k=0}^{N-1}f_k^{(0)}}=0.$$

若仅重设 $\bar{q}_{01}>0$ 且对于所有 $j\geqslant 2$ 都有 $\bar{q}_{0j}=0$ 时不可约性仍然可以保持, 则原过程常返当且仅当 $\sum_{k=0}^{+\infty}f_k^{(0)}=+\infty$, 其中 $f_k^{(0)}$ 恰等于文献 [2,4] 中的 $F_k^{(0)}$.

注 2.4 事实上, 由上面定理的证明可以得到

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}_0(\sigma_0<\tau_{N+}) &= 1-\frac{1}{q_0}\cdot\frac{\sum_{k=0}^{N-1}q_0^{(k+1)}\sum_{j=0}^{m-1}\det(\boldsymbol{C}_j^{(N)})f_k^{(j)}}{\det(\boldsymbol{C}^{(N)})},\\
\mathrm{P}_i(\sigma_0<\tau_{N+}) &= 1-\frac{\sum_{k=0}^{i-1}\sum_{j=0}^{m-1}\det(\boldsymbol{C}_j^{(N)})f_k^{(j)}}{\det(\boldsymbol{C}^{(N)})},\quad 1\leqslant i\leqslant N.
\end{aligned}
$$

进而, 得出灭绝/回返概率具有下面的形式:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}_0(\sigma_0<+\infty) &= 1-\frac{1}{q_0}\lim_{N\to+\infty}\frac{\sum_{k=0}^{N-1}q_0^{(k+1)}\sum_{j=0}^{m-1}\det(\boldsymbol{C}_j^{(N)})f_k^{(j)}}{\det(\boldsymbol{C}^{(N)})},\\
\mathrm{P}_i(\sigma_0<+\infty) &= 1-\lim_{N\to+\infty}\frac{\sum_{k=0}^{i-1}\sum_{j=0}^{m-1}\det(\boldsymbol{C}_j^{(N)})f_k^{(j)}}{\det(\boldsymbol{C}^{(N)})},\quad i\geqslant 1.
\end{aligned}
$$

当 $m=1$ 时, 灭绝/回返概率可以表示为

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}_0(\sigma_0<+\infty) &= 1-\frac{1}{q_0}\lim_{N\to+\infty}\frac{\sum_{k=0}^{N-1}q_0^{(k+1)}f_k^{(0)}}{\sum_{k=0}^{N-1}f_k^{(0)}},\\
\mathrm{P}_i(\sigma_0<+\infty) &= \frac{\sum_{k=i}^{+\infty}f_k^{(0)}}{\sum_{k=0}^{+\infty}f_k^{(0)}},\quad i\geqslant 1.
\end{aligned}
$$

同样的结果可参见文献 [4].

接下来考虑 2 生过程. 现在有

$$
\begin{aligned}
&f_0^{(0)}=1,\quad f_1^{(0)}=0,\quad f_{i+1}^{(0)}=\frac{1}{q_{i,i+2}}\left(\sum_{k=0}^{i-1}q_i^{(k)}f_k^{(0)}-q_i^{(i+1)}f_i^{(0)}\right),\quad 1\leqslant i\leqslant N-2,\\
&f_0^{(1)}=0,\quad f_1^{(1)}=1,\quad f_{i+1}^{(1)}=\frac{1}{q_{i,i+2}}\left(\sum_{k=0}^{i-1}q_i^{(k)}f_k^{(1)}-q_i^{(i+1)}f_i^{(1)}\right),\quad 1\leqslant i\leqslant N-2.
\end{aligned}
$$

定义

$$
f_N^{(0)}=\sum_{k=0}^{N-2}q_{N-1}^{(k)}f_k^{(0)}-q_{N-1}^{(N)}f_{N-1}^{(0)},\quad f_N^{(1)}=\sum_{k=0}^{N-2}q_{N-1}^{(k)}f_k^{(1)}-q_{N-1}^{(N)}f_{N-1}^{(1)},
$$

则

$$
\boldsymbol{C}^{(N)}=\begin{bmatrix} f_N^{(0)} & f_N^{(1)}\\ \sum_{k=0}^{N-1}f_k^{(0)} & \sum_{k=0}^{N-1}f_k^{(1)}\end{bmatrix}
$$

且

$$
\boldsymbol{C}_0^{(N)}=\begin{bmatrix} 0 & f_N^{(1)}\\ 1 & \sum_{k=0}^{N-1}f_k^{(1)}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{C}_1^{(N)}=\begin{bmatrix} f_N^{(0)} & 0\\ \sum_{k=0}^{N-1}f_k^{(0)} & 1\end{bmatrix}.
$$

进而

$$
\det(\boldsymbol{C}^{(N)})=f_N^{(0)}\sum_{k=0}^{N-1}f_k^{(1)}-f_N^{(1)}\sum_{k=0}^{N-1}f_k^{(0)},\quad \det(\boldsymbol{C}_0^{(N)})=-f_N^{(1)},\quad \det(\boldsymbol{C}_1^{(N)})=f_N^{(0)}.
$$

因此, 由定理 2.1 和上面的讨论, 容易看到下面的结论成立.

推论 2.1 假设 2 生 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$ 是不可约的, 则相应的最小过程常返当且仅当

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{\sum_{k=0}^{N-1}q_0^{(k+1)}(f_N^{(0)}f_k^{(1)}-f_N^{(1)}f_k^{(0)})}{f_N^{(0)}\sum_{k=0}^{N-1}f_k^{(1)}-f_N^{(1)}\sum_{k=0}^{N-1}f_k^{(0)}}=0.$$

若仅重设 $\bar{q}_{01}>0$ 且对于所有 $j\geqslant 2$ 都有 $\bar{q}_{0j}=0$ 时不可约性仍然可以保持, 则原过程常返当且仅当

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{f_N^{(1)}}{f_N^{(1)}\sum_{k=0}^{N-1}f_k^{(0)}-f_N^{(0)}\sum_{k=0}^{N-1}f_k^{(1)}}=0.$$

2.2 m 死转移速率矩阵

为了后面在唯一性问题上的应用, 考虑比 m 死更扩展一些的转移速率矩阵. 事实上, 我们需要研究所谓带可能大灾难的 m 死 Q 矩阵, 即存在一个正整数 m 使得转移速率矩阵满足

$$q_{i,i-m}>0,\quad q_{ij}=0,\quad 1\leqslant j<i-m,\quad i\geqslant m.$$

换而言之, 对于任意 $i\neq m$, q_{i0} 没有限制条件, 这意味着对某个或者所有 $i\neq m$, $q_{i0}>0$ 可以发生.

对于 $m+1\leqslant n\leqslant N-1$, 定义 $(N-1)\times(N-1)$ 阶矩阵 $\boldsymbol{B}_n=(b_{ik}^{(n)}:m<i,k<N+m)$ 如下:

$$b_{ik}^{(n)}=\begin{cases}0, & 若\ m<i<n,\quad m<k<N+m,\\ -\dfrac{q_{i0}}{q_{i,i-m}}, & 若\ i=n,\quad k=m+1,\\ 0, & 若\ i=n,\quad m+2\leqslant k\leqslant i,\\ -\dfrac{q_i^{(k-m)}-q_{i0}}{q_{i,i-m}}, & 若\ i=n,\quad i+1\leqslant k<i+m,\\ \dfrac{q_i^{(k-m+1)}+q_{i0}}{q_{i,i-m}}, & 若\ i=n,\quad i+m\leqslant k<N+m,\\ \delta_{ik}, & 若\ n<i<N+m,\quad m<k<N+m.\end{cases}$$

定义一些 $N-1$ 维向量:

$$\boldsymbol{g}^{(j)}=\boldsymbol{B}_{m+1}\cdots\boldsymbol{B}_{N-1}\boldsymbol{e}_j,\quad j=2,N-m+1,\ldots,N,$$

其中, 对于 $j=2,N-m+1,\ldots,N$, $\boldsymbol{g}^{(j)}=(g_2^{(j)},\ldots,g_N^{(j)})^{\mathrm{T}}$; $\boldsymbol{e}_j$ 是 $N-1$ 维单位向量, $\boldsymbol{e}_j=(\delta_{jk}:2\leqslant k\leqslant N)^{\mathrm{T}}$. 定义 $(N-1)\times m$ 阶矩阵

$$\boldsymbol{G}^{(m)}=(\boldsymbol{g}^{(N-m+1)},\ldots,\boldsymbol{g}^{(N)}).$$

定义 $m\times(N-1)$ 阶矩阵 $\boldsymbol{S}=(s_{ik}:1\leqslant i\leqslant m,2\leqslant k\leqslant N)$ 如下:

$$s_{ik}=\begin{cases}-q_i^{(k-1)}+q_{i0}, & 若\ 1\leqslant i\leqslant m,\quad 2\leqslant k\leqslant i,\\ q_i^{(k)}+q_{i0}, & 若\ 1\leqslant i\leqslant m,\quad i<k\leqslant N.\end{cases}$$

定义 $m\times m$ 阶矩阵

$$\boldsymbol{D}^{(N)}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{G}^{(m)}.$$

当 $m>1$ 时, 对于 $j=N-m+1,\dots,N$, 定义

$$\boldsymbol{D}_j^{(N)}=(\boldsymbol{S}\boldsymbol{g}^{(N-m+1)},\dots,\boldsymbol{S}\boldsymbol{g}^{(j-1)},\boldsymbol{q}-\boldsymbol{S}\boldsymbol{g}^{(2)},\boldsymbol{S}\boldsymbol{g}^{(j+1)},\dots,\boldsymbol{S}\boldsymbol{g}^{(N)});$$

当 $m=1$ 时, 令 $\boldsymbol{D}_N^{(N)}=\boldsymbol{q}-\boldsymbol{S}\boldsymbol{g}^{(2)}$, 其中 $\boldsymbol{q}=(q_{10},\dots,q_{m0})^{\mathrm{T}}$.

下面结果是我们关于带可能大灾难的 m 死 Q 矩阵的常返性准则.

定理 2.2 假设带可能大灾难的 m 死 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$ 是不可约的, 则相应的最小过程常返当且仅当

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=2}^{N}(q_0^{(1)}-q_0^{(k)})\left(g_k^{(2)}+\frac{\sum_{N-m+1\leqslant j\leqslant N}\det(\boldsymbol{D}_j^{(N)})g_k^{(j)}}{\det(\boldsymbol{D}^{(N)})}\right)=q_0.$$

若仅重设 $\bar{q}_{01}>0$ 和对于所有 $j\geqslant 2$ 有 $\bar{q}_{0j}=0$ 时不可约性仍然可以保持, 则原最小过程常返当且仅当

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=2}^{N}\left(g_k^{(2)}+\frac{\sum_{N-m+1\leqslant j\leqslant N}\det(\boldsymbol{D}_j^{(N)})g_k^{(j)}}{\det(\boldsymbol{D}^{(N)})}\right)=1.$$

证明 由 (2.4) 和 m 死性质得到

$$q_{i0}+\sum_{(i-m+1)\vee 1\leqslant k\leqslant i}(q_i^{(k-1)}-q_{i0})w_k=\sum_{i+1\leqslant k\leqslant N}(q_i^{(k)}+q_{i0})w_k,\quad 1\leqslant i\leqslant N-1. \tag{2.11}$$

对于 $m+1\leqslant i\leqslant N-1$, 由 $q_i^{(i-m)}-q_{i0}=q_{i,i-m}>0$ 和 (2.11) 知, 下式成立:

$$w_{i-m+1}=\frac{1}{q_{i,i-m}}\left(\sum_{i+1\leqslant k\leqslant N}(q_i^{(k)}+q_{i0})w_k-\sum_{i-m+2\leqslant k\leqslant i}(q_i^{(k-1)}-q_{i0})w_k-q_{i0}\right). \tag{2.12}$$

则上述讨论蕴涵着

$$\begin{aligned}\boldsymbol{w}^{(N-1)}:=\begin{bmatrix}w_2\\ w_3\\ \vdots\\ w_{N-m}\\ w_{N-m+1}\\ \vdots\\ w_N\end{bmatrix}&=\boldsymbol{B}_{m+1}\cdots\boldsymbol{B}_{N-1}\begin{bmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ w_{N-m+1}\\ \vdots\\ w_N\end{bmatrix}=\boldsymbol{g}^{(2)}+\sum_{j=N-m+1}^{N}w_j\boldsymbol{g}^{(j)}\\ &=(\boldsymbol{g}^{(2)},\boldsymbol{G}^{(m)})\begin{bmatrix}1\\ w_{N-m+1}\\ \vdots\\ w_N\end{bmatrix}=:(\boldsymbol{g}^{(2)},\boldsymbol{G}^{(m)})\begin{bmatrix}1\\ \boldsymbol{w}^{(m)}\end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{2.13}$$

从 (2.11) 推导出

$$q_{i0}+\sum_{2\leqslant k\leqslant i}(q_i^{(k-1)}-q_{i0})w_k=\sum_{i+1\leqslant k\leqslant N}(q_i^{(k)}+q_{i0})w_k,\quad 1\leqslant i\leqslant m.$$

由 (2.13) 知, 其等价于

$$(\boldsymbol{S}\boldsymbol{g}^{(2)}, \boldsymbol{S}\boldsymbol{G}^{(m)}) \begin{bmatrix} 1 \\ \boldsymbol{w}^{(m)} \end{bmatrix} = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{g}^{(2)}, \boldsymbol{G}^{(m)}) \begin{bmatrix} 1 \\ \boldsymbol{w}^{(m)} \end{bmatrix} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{w}^{(N-1)} = \boldsymbol{q},$$

即

$$\boldsymbol{D}^{(N)}\boldsymbol{w}^{(m)} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{G}^{(m)}\boldsymbol{w}^{(m)} = \boldsymbol{q} - \boldsymbol{S}\boldsymbol{g}^{(2)}. \tag{2.14}$$

由本节开始部分的讨论知, 方程组 (2.1) 存在唯一解, 等价地, 方程组 (2.14) 存在唯一解, 这意味着 $\det(\boldsymbol{D}^{(N)}) \neq 0$. 因此, 对于方程组 (2.14), 由 Cramer 法则知, 此解可以表示为

$$\boldsymbol{w}^{(m)} = \frac{1}{\det(\boldsymbol{D}^{(N)})} \begin{bmatrix} \det(\boldsymbol{D}_{N-m+1}^{(N)}) \\ \vdots \\ \det(\boldsymbol{D}_N^{(N)}) \end{bmatrix}. \tag{2.15}$$

进而, 由 (2.13) 和 (2.15), 得到

$$\boldsymbol{w}^{(N-1)} = \boldsymbol{g}^{(2)} + \frac{1}{\det(\boldsymbol{D}^{(N)})} \sum_{N-m+1 \leqslant j \leqslant N} \det(\boldsymbol{D}_j^{(N)}) \boldsymbol{g}^{(j)}. \tag{2.16}$$

再从 (2.16) 得出

$$p_i^{(N)} = 1 - \sum_{k=i+1}^{N} w_k = 1 - \sum_{k=i+1}^{N} \left(g_k^{(2)} + \frac{\sum_{N-m+1 \leqslant j \leqslant N} \det(\boldsymbol{D}_j^{(N)}) g_k^{(j)}}{\det(\boldsymbol{D}^{(N)})} \right), \quad 1 \leqslant i < N.$$

进而, 由 (2.1), 容易看出

$$p_0^{(N)} = 1 - \frac{1}{q_0} \sum_{k=2}^{N} (q_0^{(1)} - q_0^{(k)}) \left(g_k^{(2)} + \frac{\sum_{N-m+1 \leqslant j \leqslant N} \det(\boldsymbol{D}_j^{(N)}) g_k^{(j)}}{\det(\boldsymbol{D}^{(N)})} \right),$$

其意味着定理结论成立. □

注 2.5　事实上, 对于 $j = 2, N-m+1, \ldots, N$,

$$g_i^{(j)} = \delta_{ij}, \quad N - m < i \leqslant N,$$

且

$$g_{i-m+1}^{(j)} = \frac{1}{q_{i,i-m}} \left(\sum_{i+1 \leqslant k \leqslant N} (q_i^{(k)} + q_{i0}) g_k^{(j)} - \sum_{i-m+2 \leqslant k \leqslant i} (q_i^{(k-1)} - q_{i0}) g_k^{(j)} - q_{i0}\delta_{j2} \right)$$

对 $m+1 \leqslant i \leqslant N-1$ 成立.

注 2.6　由上面定理的证明知, 灭绝/回返概率可以表示为

$$\mathrm{P}_0(\sigma_0 < +\infty) = \frac{1}{q_0} \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=2}^{N} (q_0^{(1)} - q_0^{(k)}) \left(g_k^{(2)} + \frac{\sum_{N-m+1 \leqslant j \leqslant N} \det(\boldsymbol{D}_j^{(N)}) g_k^{(j)}}{\det(\boldsymbol{D}^{(N)})} \right),$$

$$\mathrm{P}_i(\sigma_0 < +\infty) = \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=i+1}^{N} \left(g_k^{(2)} + \frac{\sum_{N-m+1 \leqslant j \leqslant N} \det(\boldsymbol{D}_j^{(N)}) g_k^{(j)}}{\det(\boldsymbol{D}^{(N)})} \right), \quad i \geqslant 1.$$

注 2.7 若限制在 $\mathbb{N} := \{1,2,\ldots\}$ 上的 Q 矩阵是不可约的, 对于所有 $j \geqslant 2$, 重令 $\bar{q}_{01} > 0$ 和 $\bar{q}_{0j} = 0$, 则不可约性可以保持.

对于 $m=1$ 的情形, 考虑没有大灾难的单死情形, 其转移速率矩阵满足

$$q_{i,i-1} > 0, \quad i \geqslant 1; \quad q_{ij} = 0, \quad 0 \leqslant j < i-1,$$

则 $g_i^{(2)} \equiv 0$ 且

$$g_N^{(N)} = 1, \quad g_i^{(N)} = \frac{1}{q_{i,i-1}} \sum_{i+1 \leqslant k \leqslant N} q_i^{(k)} g_k^{(N)}, \quad 2 \leqslant i \leqslant N-1.$$

此外, 定义

$$g_1^{(N)} = \frac{1}{q_{10}} \sum_{2 \leqslant k \leqslant N} q_1^{(k)} g_k^{(N)}.$$

进而,

$$\boldsymbol{D}^{(N)} = \sum_{k=2}^{N} (q_1^{(k)} + q_{10}) g_k^{(N)} = q_{10} \sum_{k=1}^{N} g_k^{(N)}, \quad \boldsymbol{D}_N^{(N)} = q_{10}.$$

注意到 $q_0 = q_0^{(1)}$, 则极限

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{\sum_{k=2}^{N} (q_0^{(1)} - q_0^{(k)}) g_k^{(N)}}{\sum_{k=1}^{N} g_k^{(N)}} = q_0$$

等价于

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{\sum_{k=1}^{N} q_0^{(k)} g_k^{(N)}}{\sum_{k=1}^{N} g_k^{(N)}} = 0. \tag{2.17}$$

因此, 从定理 2.2 直接得到如下的结论.

推论 2.2 假设不带大灾难的单死 Q 矩阵 $Q = (q_{ij})$ 是不可约的, 则相应的最小过程是常返的当且仅当 (2.17) 成立. 若仅重设 $\bar{q}_{01} > 0$ 且 $\bar{q}_{0j} = 0$ 对于所有 $j \geqslant 2$ 成立时不可约性仍然保持, 即限制在 $\mathbb{N} := \{1,2,\ldots\}$ 上的 Q 矩阵是不可约的, 则最小过程是常返的当且仅当

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{g_1^{(N)}}{\sum_{k=1}^{N} g_k^{(N)}} = 0.$$

下面考虑没有大灾难的 2 死过程, 此时转移速率矩阵满足

$$q_{i,i-2} > 0, \quad i \geqslant 2; \quad q_{ij} = 0, \quad 0 \leqslant j < i-2.$$

则 $g_i^{(2)} \equiv 0$ 且

$$g_N^{(N)} = 1, \quad g_{N-1}^{(N)} = 0, \quad g_{i-1}^{(N)} = \frac{1}{q_{i,i-2}} \left(\sum_{i+1 \leqslant k \leqslant N} q_i^{(k)} g_k^{(N)} - q_i^{(i-1)} g_i^{(N)} \right), \quad 3 \leqslant i \leqslant N-1,$$

$$g_N^{(N-1)} = 0, \quad g_{N-1}^{(N-1)} = 1, \quad g_{i-1}^{(N-1)} = \frac{1}{q_{i,i-2}} \left(\sum_{i+1 \leqslant k \leqslant N} q_i^{(k)} g_k^{(N-1)} - q_i^{(i-1)} g_i^{(N-1)} \right), \quad 3 \leqslant i \leqslant N-1.$$

同上面一样定义 $g_1^{(N)}$ 和 $g_1^{(N-1)}$. 再定义

$$g_0^{(N)} = \sum_{2 \leqslant k \leqslant N} q_1^{(k)} g_k^{(N)} - q_1^{(0)} g_1^{(N)}, \quad g_0^{(N-1)} = \sum_{2 \leqslant k \leqslant N} q_1^{(k)} g_k^{(N-1)} - q_1^{(0)} g_1^{(N-1)}.$$

进而

$$\boldsymbol{D}^{(N)}=\begin{bmatrix} g_0^{(N-1)}+q_{10}\sum_{k=1}^N g_k^{(N-1)} & g_0^{(N)}+q_{10}\sum_{k=1}^N g_k^{(N)} \\ q_{20}\sum_{k=1}^N g_k^{(N-1)} & q_{20}\sum_{k=1}^N g_k^{(N)} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{D}_{N-1}^{(N)}=\begin{bmatrix} q_{10} & g_0^{(N)}+q_{10}\sum_{k=1}^N g_k^{(N)} \\ q_{20} & q_{20}\sum_{k=1}^N g_k^{(N)} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{D}_{N}^{(N)}=\begin{bmatrix} g_0^{(N-1)}+q_{10}\sum_{k=1}^N g_k^{(N-1)} & q_{10} \\ q_{20}\sum_{k=1}^N g_k^{(N-1)} & q_{20} \end{bmatrix}.$$

故有

$$\det(\boldsymbol{D}^{(N)})=q_{20}\left(g_0^{(N-1)}\sum_{k=1}^N g_k^{(N)}-g_0^{(N)}\sum_{k=1}^N g_k^{(N-1)}\right),$$

$$\det(\boldsymbol{D}_{N-1}^{(N)})=-q_{20}g_0^{(N)},\quad \det(\boldsymbol{D}_{N}^{(N)})=q_{20}g_0^{(N-1)}.$$

因此,

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=2}^N (q_0^{(1)}-q_0^{(k)})\frac{\det(\boldsymbol{D}_{N-1}^{(N)})g_k^{(N-1)}+\det(\boldsymbol{D}_{N}^{(N)})g_k^{(N)}}{\det(\boldsymbol{D}^{(N)})}=q_0,$$

等价于

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{\sum_{k=1}^N q_0^{(k)}(g_0^{(N-1)}g_k^{(N)}-g_0^{(N)}g_k^{(N-1)})}{g_0^{(N-1)}\sum_{k=1}^N g_k^{(N)}-g_0^{(N)}\sum_{k=1}^N g_k^{(N-1)}}=0. \tag{2.18}$$

则从定理 2.2 立刻得到如下推论.

推论 2.3　假设不带大灾难的 2 死 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$ 是不可约的, 则相应的最小过程常返当且仅当 (2.18) 成立. 若仅重令 $\bar{q}_{01}>0$ 和 $\bar{q}_{0j}=0$ (对于所有 $j\geqslant 2$) 时不可约性仍然能够保持, 则最小过程常返当且仅当

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{g_0^{(N-1)}g_1^{(N)}-g_0^{(N)}g_1^{(N-1)}}{g_0^{(N-1)}\sum_{k=1}^N g_k^{(N)}-g_0^{(N)}\sum_{k=1}^N g_k^{(N-1)}}=0.$$

2.3　例子

例 2.1　给定正则不可约单死 Q 矩阵如下:

$$q_{i,i-1}=a>0,\quad q_{i,i+1}=b\geqslant 0,\quad q_{i,i+2}=d\geqslant 0,\quad i\geqslant 1,$$

其中 $b+d>0$, 且对于其他的 $i,j\geqslant 1$, $i\neq j$, 有 $q_{ij}=0$. 则过程常返当且仅当 $a\geqslant b+2d$.

证明　事实上, 可以看到

$$g_N^{(N)}=1,\quad g_{N-1}^{(N)}=\frac{b+d}{a},\quad g_i^{(N)}=\frac{b+d}{a}g_{i+1}^{(N)}+\frac{d}{a}g_{i+2}^{(N)},\quad 1\leqslant i\leqslant N-2.$$

由推广的 Fibonacci 数列可知 (参见附录 A)

$$g_i^{(N)}=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}(\lambda_1^{N-i+1}-\lambda_2^{N-i+1}),\quad 1\leqslant i\leqslant N,$$

其中

$$\lambda_1=\frac{b+d+\sqrt{(b+d)^2+4ad}}{2a},\quad \lambda_2=\frac{b+d-\sqrt{(b+d)^2+4ad}}{2a}.$$

注意到 $-1<\lambda_2<0$ 和 $\lambda_1>0$, 更细致地, 有

$$\lambda_1\begin{cases}>1, & 若\ a<b+2d,\\ =1, & 若\ a=b+2d,\\ <1, & 若\ a>b+2d.\end{cases}$$

如果 $a\neq b+2d$, 则

$$\frac{g_1^{(N)}}{\sum_{k=1}^N g_k^{(N)}}=\frac{\lambda_1^N-\lambda_2^N}{\frac{\lambda_1^{N+1}-\lambda_1}{\lambda_1-1}-\frac{\lambda_2^{N+1}-\lambda_2}{\lambda_2-1}}.$$

因此

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{g_1^{(N)}}{\sum_{k=1}^N g_k^{(N)}}=\begin{cases}\dfrac{\lambda_1-1}{\lambda_1}\neq 0, & 若\ a<b+2d,\\ 0, & 若\ a>b+2d.\end{cases}$$

当 $a=b+2d$ 时,

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{g_1^{(N)}}{\sum_{k=1}^N g_k^{(N)}}=\lim_{N\to+\infty}\frac{1-\lambda_2^N}{N-\frac{\lambda_2^{N+1}-\lambda_2}{\lambda_2-1}}=0.$$

故由推论 2.2 知结论成立. □

例 2.2 给定一个正则不可约 2 死 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$ 如下:

$$q_{i,i-2}=c>0,\quad q_{i,i-1}=a\geqslant 0,\quad i\geqslant 2,\quad q_{1,0}=d\geqslant 0;\quad q_{i,i+1}=b>0,\quad i\geqslant 0,$$

且 $q_{ij}=0$ 对其他的 $i,j\geqslant 1$, $i\neq j$ 成立. 则过程常返当且仅当 $a+2c\geqslant b$. 此例子在 $a=0$, $d=1$ 且 $c=b=1$ 的情形参见文献 [9], 在该文献中证明了该过程是指数遍历但非强遍历.

证明 由于

$$g_N^{(N)}=1,\quad g_{N-1}^{(N)}=0,\quad g_{i-1}^{(N)}=\frac{b}{c}g_{i+1}^{(N)}-\frac{a+c}{c}g_i^{(N)},\quad 2\leqslant i\leqslant N-1,$$
$$g_N^{(N-1)}=0,\quad g_{N-1}^{(N-1)}=1,\quad g_{i-1}^{(N-1)}=\frac{b}{c}g_{i+1}^{(N-1)}-\frac{a+c}{c}g_i^{(N-1)},\quad 2\leqslant i\leqslant N-1,$$

因此, 有 (参见附录 A)

$$g_i^{(N)}=\frac{(-1)^{N-i-1}\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}(\lambda_1^{N-i-1}-\lambda_2^{N-i-1}),\quad 1\leqslant i\leqslant N,$$
$$g_0^{(N)}=\frac{(-1)^{N-1}\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}(b(\lambda_1^{N-3}-\lambda_2^{N-3})+d(\lambda_1^{N-2}-\lambda_2^{N-2})),$$
$$g_i^{(N-1)}=\frac{(-1)^{N-i-1}}{\lambda_1-\lambda_2}(\lambda_1^{N-i}-\lambda_2^{N-i}),\quad 1\leqslant i\leqslant N,$$
$$g_0^{(N-1)}=\frac{(-1)^{N-1}}{\lambda_1-\lambda_2}(b(\lambda_1^{N-2}-\lambda_2^{N-2})+d(\lambda_1^{N-1}-\lambda_2^{N-1})),$$

其中

$$\lambda_1=\frac{a+c+\sqrt{(a+c)^2+4bc}}{2c},\quad \lambda_2=\frac{a+c-\sqrt{(a+c)^2+4bc}}{2c}.$$

注意到 $\lambda_1>1$ 和 $\lambda_2<0$. 事实上,

$$|\lambda_2|\begin{cases}>1, & 若\ a+2c<b,\\ =1, & 若\ a+2c=b,\\ <1, & 若\ a+2c>b.\end{cases}$$

经过计算, 得到

$$g_0^{(N-1)}g_1^{(N)}-g_0^{(N)}g_1^{(N-1)}=b(-1)^{2N-1}\lambda_1^{N-2}\lambda_2^{N-2}$$

和

$$\begin{aligned}&g_0^{(N-1)}\sum_{k=1}^N g_k^{(N)}-g_0^{(N)}\sum_{k=1}^N g_k^{(N-1)}\\&=\frac{(-1)^{N-1}\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\times\begin{cases}\bigg((b\lambda_2^{N-3}+d\lambda_2^{N-2})\dfrac{(-\lambda_1)^N-1}{\lambda_1(\lambda_1+1)}\\ \quad -(b\lambda_1^{N-3}+d\lambda_1^{N-2})\frac{(-\lambda_2)^N-1}{\lambda_2(\lambda_2+1)}\bigg), & 若\ \lambda_2\neq-1,\\ \bigg((b\lambda_2^{N-3}+d\lambda_2^{N-2})\dfrac{(-\lambda_1)^N-1}{\lambda_1(\lambda_1+1)}\\ \quad -(b\lambda_1^{N-3}+d\lambda_1^{N-2})N\bigg), & 若\ \lambda_2=-1.\end{cases}\end{aligned}$$

从上面的两个等式得出

$$\begin{aligned}&\lim_{N\to+\infty}\frac{g_0^{(N-1)}g_1^{(N)}-g_0^{(N)}g_1^{(N-1)}}{g_0^{(N-1)}\sum_{k=1}^N g_k^{(N)}-g_0^{(N)}\sum_{k=1}^N g_k^{(N-1)}}\\&=\begin{cases}0, & 若\ a+2c\geqslant b,\\ \dfrac{b(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)}{(d+b)\lambda_1\lambda_2+b(\lambda_1+\lambda_2)}\neq0, & 若\ a+2c<b,\end{cases}\end{aligned}$$

由推论 2.3 知, 其意味着结论成立. □

例 2.3　给定一个正则不可约 2 死 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$, 其满足

$$q_{i,i-2}=c>0,\quad i\geqslant2;\quad q_{i,i+2}=d>0,\quad i\geqslant0;\quad q_{01}=b>0,\quad q_{10}=a>0,$$

且 $q_{ij}=0$ 对于其他的 $i\neq j$ 成立. 则过程常返当且仅当 $c\geqslant d$.

证明　令 $h=d/c$. 由于

$$\begin{aligned}&g_N^{(N)}=1,\quad g_{N-1}^{(N)}=0,\quad g_{N-2}^{(N)}=h\cdot g_N^{(N)}-g_{N-1}^{(N)},\\&g_{i-1}^{(N)}=h\cdot g_{i+2}^{(N)}+h\cdot g_{i+1}^{(N)}-g_i^{(N)},\quad 2\leqslant i\leqslant N-2,\\&g_0^{(N)}=d\cdot g_3^{(N)}+d\cdot g_2^{(N)}-a\cdot g_1^{(N)};\\&g_N^{(N-1)}=0,\quad g_{N-1}^{(N-1)}=1,\quad g_{N-2}^{(N-1)}=h\cdot g_N^{(N-1)}-g_{N-1}^{(N-1)},\\&g_{i-1}^{(N-1)}=h\cdot g_{i+2}^{(N-1)}+h\cdot g_{i+1}^{(N-1)}-g_i^{(N-1)},\quad 2\leqslant i\leqslant N-2,\\&g_0^{(N-1)}=d\cdot g_3^{(N-1)}+d\cdot g_2^{(N-1)}-a\cdot g_1^{(N-1)},\end{aligned}$$

因此,

$$
\begin{aligned}
g_{N-2i}^{(j)} &= h^i g_N^{(j)} - \sum_{0\leqslant k\leqslant i-1} h^k g_{N-1}^{(j)}, \quad 0\leqslant i\leqslant \left[\frac{N}{2}\right]-1, \quad j=N-1,N,\\
g_{N-(2i+1)}^{(j)} &= \sum_{0\leqslant k\leqslant i} h^k g_{N-1}^{(j)}, \quad 0\leqslant i\leqslant \left[\frac{N}{2}\right]-1, \quad j=N-1,N.
\end{aligned}
$$

进而推导出

$$
\begin{aligned}
&g_{N-2i}^{(N)} = h^i, \quad g_{N-(2i+1)}^{(N)} = 0, \quad 0\leqslant i\leqslant \left[\frac{N}{2}\right]-1,\\
&g_{N-2i}^{(N-1)} = -\sum_{0\leqslant k\leqslant i-1} h^k, \quad g_{N-(2i+1)}^{(N-1)} = \sum_{0\leqslant k\leqslant i} h^k, \quad 0\leqslant i\leqslant \left[\frac{N}{2}\right]-1.
\end{aligned}
$$

令

$$
\begin{aligned}
H_N :&= \sum_{k=1}^{N} q_0^{(k)} (g_0^{(N-1)} g_k^{(N)} - g_0^{(N)} g_k^{(N-1)})\\
&= g_0^{(N-1)}((b+d)g_1^{(N)} + d\cdot g_2^{(N)}) - g_0^{(N)}((b+d)g_1^{(N-1)} + d\cdot g_2^{(N-1)})
\end{aligned}
$$

和

$$
J_N := g_0^{(N-1)} \sum_{k=1}^{N} g_k^{(N)} - g_0^{(N)} \sum_{k=1}^{N} g_k^{(N-1)}.
$$

当 $N=2K$ 时,

$$
\begin{aligned}
&g_1^{(N)} = 0, \quad g_2^{(N)} = h^{K-1}, \quad g_3^{(N)} = 0, \quad g_0^{(N)} = dh^{K-1},\\
&g_1^{(N-1)} = \sum_{k=0}^{K-1} h^k, \quad g_2^{(N-1)} = -\sum_{k=0}^{K-2} h^k, \quad g_3^{(N-1)} = \sum_{k=0}^{K-2} h^k, \quad g_0^{(N-1)} = -a\sum_{k=0}^{K-1} h^k.
\end{aligned}
$$

因此,

$$
\begin{aligned}
H_{2K} &= -dh^{K-1}\left((a+b)\sum_{k=0}^{K-1} h^k + dh^{K-1}\right),\\
J_{2K} &= -a\left(\sum_{k=0}^{K-1} h^k\right)^2 - dh^{K-1}\sum_{i=1}^{K-1} h^i.
\end{aligned}
$$

然后

$$
\frac{H_{2K}}{J_{2K}} = \begin{cases} \dfrac{d(a+b)K+d^2}{aK^2+d(K-1)}, & \text{若 } h=1,\\ \dfrac{(1-h)(d(a+b)h^{K-1}+d^2h^{2K-2}-d(a+b+d)h^{2K-1})}{a+(d-2a)h^K-dh^{K+1}-dh^{2K-1}+(1+d)h^{2K}}, & \text{若 } h\neq 1, \end{cases}
$$

由其推导出

$$
\lim_{K\to+\infty} \frac{H_{2K}}{J_{2K}} = \begin{cases} 0, & \text{若 } h\leqslant 1,\\ \dfrac{d(h-1)((a+b+d)h-d)}{(1+d)h^2-dh} \neq 0, & \text{若 } h>1. \end{cases}
$$

当 $N=2K+1$ 时,

$$g_1^{(N)}=h^K,\quad g_2^{(N)}=0,\quad g_3^{(N)}=h^{K-1},\quad g_0^{(N)}=dh^{K-1}-ah^K,$$
$$g_1^{(N-1)}=-\sum_{k=0}^{K-1}h^k,\quad g_2^{(N-1)}=\sum_{k=0}^{K-1}h^k,\quad g_3^{(N-1)}=-\sum_{k=0}^{K-2}h^k,$$
$$g_0^{(N-1)}=dh^{K-1}-a\sum_{k=0}^{K-1}h^k.$$

因此,

$$H_{2K+1}=d(b+d)h^{2K-1}+(bdh^{K-1}-a(2b+d)h^K)\sum_{k=0}^{K-1}h^k,$$
$$J_{2K+1}=dh^{K-1}\sum_{k=0}^{K}h^k-a\sum_{k=0}^{K-1}h^k\sum_{k=0}^{K}h^k.$$

所以,

$$\frac{H_{2K+1}}{J_{2K+1}}=\begin{cases}\dfrac{d(b+d)+(bd-2ab-ad)K}{d(K+1)-aK(K+1)}, & 若\ h=1,\\ \dfrac{(1-h)(bdh^{K-1}-a(2b+d)h^K+d^2h^{2K-1}+a(2b+d)h^{2K})}{-a+dh^{K-1}+(a-d)h^K+ah^{K+1}-dh^{2K}+(d-a)h^{2K+1}}, & 若\ h\neq 1,\end{cases}$$

由上式可以推导出

$$\lim_{K\to+\infty}\frac{H_{2K+1}}{J_{2K+1}}=\begin{cases}0, & 若\ h\leqslant 1,\\ \dfrac{(h-1)(d^2+a(2b+d)h)}{dh+(a-d)h^2}\neq 0, & 若\ h>1.\end{cases}$$

因此, $\lim_{N\to+\infty}\frac{H_N}{J_N}=0$ 当且仅当 $h\leqslant 1$, 即 $d\leqslant c$. 故由推论 2.3 知结论成立. □

例 2.4 给定一个正则不可约 2 死 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$ 如下:

$$q_{i,i-2}=q_{i,i-1}=1,\quad i\geqslant 2;\quad q_{i,i+1}=q_{i,i+2}=1,\quad i\geqslant 0;\quad q_{10}=2,$$

且 $q_{ij}=0$ 对于其他的 $i\neq j$ 成立. 则过程常返 (参见文献 [17]).

证明 由于

$$f_0^{(0)}=1,\quad f_1^{(0)}=0,\quad f_2^{(0)}=2f_0^{(0)}-2f_1^{(0)},\quad f_{i+1}^{(0)}=f_{i-2}^{(0)}+2f_{i-1}^{(0)}-2f_i^{(0)},\quad 2\leqslant i\leqslant N-1,$$
$$f_0^{(1)}=0,\quad f_1^{(1)}=1,\quad f_2^{(1)}=2f_0^{(1)}-2f_1^{(1)},\quad f_{i+1}^{(1)}=f_{i-2}^{(1)}+2f_{i-1}^{(1)}-2f_i^{(1)},\quad 2\leqslant i\leqslant N-1,$$

因此,

$$f_i^{(0)}=(-1)^iF_{i-1}F_{i+1},\quad i\geqslant 1;\quad f_i^{(1)}=(-1)^{i-1}F_iF_{i+1},\quad i\geqslant 0,$$

其中 $\{F_i\}_{i=0}^{+\infty}$ 是 Fibonacci 数列且满足 $F_0=0$ 和 $F_1=1$, 即

$$F_i=\frac{1}{\sqrt{5}}(A^i-B^i),\quad i\geqslant 0;\quad A=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\quad B=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

注意到 $AB=-1$ 且 $A+B=1$. 因此

$$f_i^{(0)}=\frac{1}{5}((-A^2)^i+(-B^2)^i+3),\quad f_i^{(1)}=\frac{1}{5}((-A)(-A^2)^i+(-B)(-B^2)^i+1),\quad i\geqslant 0.$$

进而有

$$\sum_{k=0}^{N-1}f_k^{(1)}=\frac{1}{25}(5(3N+1)-(1+B^2)(-A^2)^N-(1+A^2)(-B^2)^N),$$
$$\sum_{k=0}^{N-1}f_k^{(0)}=\frac{1}{25}(5N+A(1+B^2)(-A^2)^N+B(1+A^2)(-B^2)^N),$$

从其出发得到 $f_N^{(1)}=\frac{A^{2N+1}}{5}((-1)^{N+1}+\mathrm{o}(1))$ $(N\to+\infty)$ 和

$$f_N^{(1)}\sum_{k=0}^{N-1}f_k^{(0)}-f_N^{(0)}\sum_{k=0}^{N-1}f_k^{(1)}=\frac{A^{4N}}{125}(B-A+\mathrm{o}(1))\quad(N\to+\infty).$$

因此

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{f_N^{(1)}}{f_N^{(1)}\sum_{k=0}^{N-1}f_k^{(0)}-f_N^{(0)}\sum_{k=0}^{N-1}f_k^{(1)}}=0.$$

由推论 2.1 知, 上式蕴涵着过程是常返的. □

3 唯一性准则

本节考虑 m 生转移速率矩阵和 m 死转移速率矩阵的唯一性准则. 已经知道, 唯一性与常返性密切相关 (见第 1 节). 为方便读者, 重新整理相关结果如下.

引理 3.1 给定 $\mathbb{Z}_+$ 上一个全稳定保守的 Q 矩阵 $\widetilde{Q}=(\tilde{q}_{ij})$, 定义一个 $\mathbb{Z}_+$ 上全稳定保守且不可约的 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$ 如下:

$$q_{ij}=\begin{cases}1, & \text{若 } i\geqslant 1,\quad j=0,\\ \tilde{q}_{i-1,j-1}, & \text{若 } i\neq j,\quad i,j\geqslant 1,\\ -1-\tilde{q}_{i-1}, & \text{若 } i=j,\quad i,j\geqslant 1,\\ \mu_j\geqslant 0, & \text{若 } i=0,\quad j\geqslant 1,\\ -\sum_{j\geqslant 1}\mu_j<+\infty, & \text{若 } i=j=0,\end{cases}$$

则 $\widetilde{Q}$ 决定的原过程唯一当且仅当 Q 决定的最小过程是常返的.

一方面, 在引理 3.1 中, 对于所有 $j\geqslant 1$, μ_j 被要求是正的只是为了保证矩阵 Q 的不可约性. 另一方面, 对于任意 $j\geqslant 1$, 无论 $\tilde{q}_{0j}$ 是什么, 甚至 0 是 $\widetilde{Q}$ 的一个吸收态, $\widetilde{Q}$ 决定过程的唯一性都是相互等价的 (参见文献 [2, 第 109 页, 定理 3.16] 的替代证明). 因此, 不失一般性, 不妨考虑这样的 $\widetilde{Q}$: 对于任意 $j\geqslant 1$, 从 0 出发最终都可达 (这意味着存在有限个互异的状态 $j_1,j_2,\dots,j_k$ 使得 $q_{0j_1}q_{j_1j_2}\cdots q_{j_kj}>0$). 故为了保证引理 3.1 中矩阵 Q 的不可约性, 只需要定义 $q_{01}=1$ 和 $q_{0j}=0$ $(j\geqslant 2)$.

3.1　m 生转移速率矩阵

考虑 $\mathbb{Z}_+$ 上这样一个 m 生 Q 矩阵 $\widetilde{Q}=(\tilde{q}_{ij})$: 从 0 出发, 任意 $j\geqslant 1$ 都最终可达. 例如, 它满足

$$\tilde{q}_{0j}>0,\quad 1\leqslant j\leqslant m;\quad \tilde{q}_{0j}=0,\quad j>m.$$

同引理 3.1, 定义 $\mathbb{Z}_+$ 上不可约、全稳定且保守的 Q 矩阵如下:

$$q_{01}=1,\quad q_{0j}=0,\quad j\geqslant 2;\quad q_{i0}=1,\quad q_{ij}=\tilde{q}_{i-1,j-1},\quad i,j\geqslant 1,\quad j\neq i.$$

则按照第 2.1 小节中的定义, 对所有 $0\leqslant i\leqslant m-1$, 有 $f_i^{(j)}=\delta_{ji}$ 且

$$f_{i+m-1}^{(j)}=\frac{1}{\tilde{q}_{i-1,i-1+m}}\left(f_0^{(j)}+\sum_{0\leqslant k\leqslant i-2}(\tilde{q}_{i-1}^{(k)}+1)f_{k+1}^{(j)}-\sum_{i\leqslant k\leqslant i+m-2}\tilde{q}_{i-1}^{(k)}f_k^{(j)}\right),\quad 1\leqslant i\leqslant N-m;$$

同时,

$$r_{ik}=\begin{cases}1, & 若\ N-m+1\leqslant i<N,\quad k=0,\\ \tilde{q}_{i-1}^{(k-1)}+1, & 若\ N-m+1\leqslant i<N,\quad 1\leqslant k<i,\\ -\tilde{q}_{i-1}^{(k)}, & 若\ N-m+1\leqslant i<N,\quad i\leqslant k<N,\\ 1, & 若\ i=N,\quad 0\leqslant k<N.\end{cases}$$

由引理 3.1 和定理 2.1, 可得如下结果.

定理 3.1　对如上的 m 生 Q 矩阵 $\widetilde{Q}=(\tilde{q}_{ij})$, 其决定的过程唯一当且仅当

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{\det(\boldsymbol{C}_0^{(N)})}{\det(\boldsymbol{C}^{(N)})}=0.$$

当 $m=1$ 时, 即单生情形, 容易验证

$$f_0^{(0)}=1;\quad f_i^{(0)}=\frac{1}{q_{i,i+1}}\sum_{k=0}^{i-1}q_i^{(k)}f_k^{(0)}=\frac{1}{\tilde{q}_{i-1,i}}\left(f_0^{(0)}+\sum_{0\leqslant k\leqslant i-2}(\tilde{q}_{i-1}^{(k)}+1)f_{k+1}^{(0)}\right),\quad i\geqslant 1.$$

记 $\tilde{m}_k=f_{k+1}^{(0)}$ (对于所有 $k\geqslant 0$), 则

$$\tilde{m}_0=\frac{1}{\tilde{q}_{01}},\quad \tilde{m}_i=\frac{1}{\tilde{q}_{i,i+1}}\left(1+\sum_{0\leqslant k\leqslant i-1}(\tilde{q}_i^{(k)}+1)\tilde{m}_k\right),\quad i\geqslant 1.$$

此时

$$\boldsymbol{C}^{(N)}=\sum_{i=0}^{N-1}f_i^{(0)}=1+\sum_{i=0}^{N-2}\tilde{m}_i,\quad \boldsymbol{C}_0^{(N)}=1.$$

定义

$$m_0=\frac{1}{\tilde{q}_{01}},\quad m_i=\frac{1}{\tilde{q}_{i,i+1}}\left(1+\sum_{0\leqslant k\leqslant i-1}\tilde{q}_i^{(k)}m_k\right),\quad i\geqslant 1.$$

则单生过程唯一当且仅当 $\sum_{i=0}^{+\infty}\tilde{m}_i=+\infty$, 等价地, $\sum_{i=0}^{+\infty}m_i=+\infty$ (参见文献 [4]).

3.2 m 死转移速率矩阵

考虑 $\mathbb{Z}_+$ 上一个不带大灾难的 m 死 Q 矩阵 $\widetilde{Q}=(\tilde{q}_{ij})$, 其满足

$$\tilde{q}_{i,i-m}>0,\quad \tilde{q}_{ij}=0,\quad 0\leqslant j<i-m,\quad i\geqslant m,$$

且对于 $\widetilde{Q}$, 从 0 出发, 任意 $j\geqslant 1$ 都可达.

在 $\mathbb{Z}_+$ 上定义一个不可约、全稳定且保守的 Q 矩阵如下:

$$q_{01}=1,\quad q_{0j}=0,\quad j\geqslant 2;\quad q_{i0}=1,\quad q_{ij}=\tilde{q}_{i-1,j-1},\quad i,j\geqslant 1,\quad j\neq i.$$

按照第 2.2 小节的定义, 对于 $j=2,N-m+1,\dots,N$, 有

$$g_i^{(j)}=\delta_{ij},\quad N-m<i\leqslant N,$$

且

$$g_{i-m+1}^{(j)}=\frac{1}{\tilde{q}_{i-1,i-1-m}}\Bigg(\sum_{i\leqslant k\leqslant N-1}(\tilde{q}_{i-1}^{(k)}+1)g_{k+1}^{(j)}-\sum_{i-m+1\leqslant k\leqslant i-1}\tilde{q}_{i-1}^{(k-1)}g_{k+1}^{(j)}-\delta_{j2}\Bigg)$$

对于 $m+1\leqslant i\leqslant N-1$ 成立. 同时, 对于 $1\leqslant i\leqslant m$, 有

$$s_{ik}=\begin{cases}-\tilde{q}_{i-1}^{(k-2)}, & \text{若 } 1\leqslant i\leqslant m,\quad 1<k\leqslant i,\\ \tilde{q}_{i-1}^{(k-1)}+1, & \text{若 } 1\leqslant i\leqslant m,\quad i<k\leqslant N.\end{cases}$$

注意到 m 维列向量 $\boldsymbol{q}=(1,\dots,1)^{\mathrm{T}}$, 则由引理 3.1 和定理 2.2 立即得到下面的结果.

定理 3.2 对于如上的不带大灾难的 m 死 Q 矩阵 $\widetilde{Q}=(\tilde{q}_{ij})$, 其决定的过程唯一当且仅当

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=2}^{N}\left(g_k^{(2)}+\frac{\sum_{N-m+1\leqslant j\leqslant N}\det(\boldsymbol{D}_j^{(N)})g_k^{(j)}}{\det(\boldsymbol{D}^{(N)})}\right)=1.$$

当 $m=1$ 时, 即单死情形, 容易验证

$$g_N^{(N)}=1,\quad g_i^{(N)}=\frac{1}{\tilde{q}_{i-1,i-2}}\sum_{i+1\leqslant k\leqslant N}(\tilde{q}_{i-1}^{(k-1)}+1)g_k^{(N)},\quad 2\leqslant i\leqslant N-1 \tag{3.1}$$

且

$$g_N^{(2)}=0,\quad g_i^{(2)}=\frac{1}{\tilde{q}_{i-1,i-2}}\Bigg(\sum_{i+1\leqslant k\leqslant N}(\tilde{q}_{i-1}^{(k-1)}+1)g_k^{(2)}-1\Bigg),\quad 2\leqslant i\leqslant N-1. \tag{3.2}$$

此时

$$\boldsymbol{D}^{(N)}=\sum_{k=2}^{N}(\tilde{q}_0^{(k-1)}+1)g_k^{(N)}=:g_1^{(N)} \tag{3.3}$$

和

$$\boldsymbol{D}_N^{(N)}=1-\sum_{k=2}^{N}(\tilde{q}_0^{(k-1)}+1)g_k^{(2)}=:-g_1^{(2)}. \tag{3.4}$$

注意到 $g_i^{(2)}<0$ 对于所有 $1\leqslant i<N$ 都成立, 则由定理 3.2, 得到单死过程如下的唯一性准则.

推论 3.1 对于不带大灾难的不可约单死 Q 矩阵 $\widetilde{Q}=(\tilde{q}_{ij})$, 其决定的过程唯一当且仅当

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{\sum_{k=2}^{N}(g_1^{(N)}g_k^{(2)}-g_1^{(2)}g_k^{(N)})}{g_1^{(N)}}=1,$$

其中 $g_i^{(N)}$ 和 $g_i^{(2)}$ 分别由 (3.1)–(3.4) 定义.

下面给出一个众所周知的单死 Q 矩阵的例子.

例 3.1 给定一个不可约、全稳定且保守的不带大灾难的单死 Q 矩阵 $\widetilde{Q}=(\tilde{q}_{ij})$, 其满足

$$\tilde{q}_{i,i-1}>0,\quad \tilde{q}_{ij}=0,\quad i\geqslant 1,\quad j\neq i,\quad j\neq i-1;\quad \tilde{q}_{0j}>0,\quad j\geqslant 1,$$

则过程唯一.

证明 $g_i^{(N)}=-g_i^{(2)}$ 对于所有 $2\leqslant i<N$ 成立, 进而 $g_1^{(N)}=-g_1^{(2)}+\tilde{q}_0^{(N-1)}$. 注意到 $g_N^{(N)}=1$ 和 $g_N^{(2)}=0$, 则

$$\sum_{k=2}^{N}g_k^{(2)}-\frac{g_1^{(2)}}{g_1^{(N)}}\sum_{k=2}^{N}g_k^{(N)}=\sum_{k=2}^{N}g_k^{(2)}+\left(1-\frac{\tilde{q}_0^{(N-1)}}{g_1^{(N)}}\right)\sum_{k=2}^{N}g_k^{(N)}=1-\frac{\tilde{q}_0^{(N-1)}}{g_1^{(N)}}\sum_{k=2}^{N}g_k^{(N)}.$$

由合分比性质可以得出

$$0\leqslant\frac{\tilde{q}_0^{(N-1)}}{g_1^{(N)}}\sum_{k=2}^{N}g_k^{(N)}\leqslant\tilde{q}_0^{(N-1)}\sup_{2\leqslant k\leqslant N}\frac{1}{\tilde{q}_0^{(k-1)}+1}=\frac{\tilde{q}_0^{(N-1)}}{\tilde{q}_0^{(N-1)}+1}\to 0,\quad N\to+\infty,$$

由推论 3.1 知, 其意味着过程唯一. □

接下来介绍一个与 $GI/G/1$ 型排队论模型相关的 Q 矩阵的结果.

命题 3.1 给定一个正则不可约 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$ 如下:

$$q_{i,i+k}=r_id_k,\quad i\geqslant 0,\quad k\geqslant 1;\quad q_{i,i-k}=r_ic_k,\quad i>k\geqslant 1;\quad q_{i0}=r_i\sum_{k=i}^{+\infty}c_k,\quad i\geqslant 1,$$

其中, $\{r_i\}_{i=0}^{+\infty}$ 是一个正数列, $\{c_k\}_{k=1}^{+\infty}$ 和 $\{d_k\}_{k=1}^{+\infty}$ 是两个非负数列, 满足 $c:=\sum_{k=1}^{+\infty}kc_k<+\infty$ 和 $d:=\sum_{k=1}^{+\infty}kd_k<+\infty$. 则相应的过程常返当且仅当 $c\geqslant d$.

证明 若 $c\geqslant d$, 则定义一个全稳定、保守且不可约单死 Q 矩阵 $\overline{Q}=(\bar{q}_{ij})$ 如下:

$$\bar{q}_{i,i+k}=r_id_k,\quad i\geqslant 0,\quad k\geqslant 1;\quad \bar{q}_{i,i-1}=r_i\sum_{k=1}^{+\infty}c_k,\quad i\geqslant 1;\quad \bar{q}_{i,i-k}=0,\quad i\geqslant k\geqslant 2,$$

这是文献 [5] 中讨论的连续时间分枝过程扩展类的 Q 矩阵. 注意到此时 $c\geqslant d$ 等价于文献 [5] 中的 $M_1\leqslant 1$. 因此, 由文献 [5] 直接得出该单死过程是唯一且常返的.

注意到 Q 与 $\overline{Q}$ 是可比的, 这蕴涵着它们对应的过程是随机可比的, 换而言之, 前者被后者随机控制. 从而存在它们的保序耦合 (参见文献 [2,13]). 因此, 单死过程的常返性保证了原过程的常返性.

若原过程常返, 则定义两个正则不可约 Q 矩阵 $\widehat{Q}=(\hat{q}_{ij})$ 和 $\widetilde{Q}=(\tilde{q}_{ij})$ 如下:

$$\hat{q}_{i,i+k}=d_k,\quad i\geqslant 0,\quad k\geqslant 1;\quad \hat{q}_{i,i-k}=c_k,\quad i>k\geqslant 1;\quad \hat{q}_{i0}=\sum_{k=i}^{+\infty}c_k,\quad i\geqslant 1;$$

$$\tilde{q}_{i,i+1}=\sum_{k=1}^{+\infty}d_k,\quad \tilde{q}_{i,i+k}=0,\quad i\geqslant 0,\quad k\geqslant 2;\quad \tilde{q}_{i,i-k}=c_k,\quad i>k\geqslant 1;\quad \tilde{q}_{i0}=\sum_{k=i}^{+\infty}c_k,\quad i\geqslant 1.$$

显然 $\widetilde{Q}$ 为单生的. 一方面, 注意到 Q 和 $\widehat{Q}$ 有相同的嵌入链. 因此, 由定理 1.3 知, $\widehat{Q}$ 对应的过程是常返的. 另一方面, $\widetilde{Q}$ 和 $\widehat{Q}$ 是可比的, 进而它们对应的过程是随机可比的, 这意味着单生过程被 $\widehat{Q}$ 对应的过程随机控制. 故由前面的讨论知单生过程是常返的. 因此由注 2.3 知, $\sum_{k=0}^{+\infty}f_k^{(0)}=+\infty$, 其等价于 $c\geqslant d$. 事实上, 定义 $C_i:=\sum_{k=i}^{+\infty}c_k$, 则 $\tilde{q}_k^{(\ell)}=\sum_{j=0}^{\ell}\tilde{q}_{kj}=C_{k-\ell}$ 和 $f_k^{(0)}=\frac{1}{d}\sum_{\ell=0}^{k-1}C_{k-\ell}f_\ell^{(0)}$ 对于 $k\geqslant 1$ 都成立. 因此, $\sum_{i=1}^{+\infty}C_i=c$,

$$\sum_{k=0}^{N}f_k^{(0)}=1+\frac{1}{d}\sum_{k=1}^{N}\sum_{\ell=0}^{k-1}C_{k-\ell}f_\ell^{(0)}=1+\frac{1}{d}\sum_{\ell=0}^{N-1}f_\ell^{(0)}\sum_{k=\ell+1}^{N}C_{k-\ell}=1+\frac{1}{d}\sum_{\ell=0}^{N-1}f_\ell^{(0)}\sum_{k=1}^{N-\ell}C_k.$$

当 $c\geqslant d$ 时, 如下事实

$$\sum_{k=0}^{+\infty}f_k^{(0)}=1+\frac{c}{d}\sum_{\ell=0}^{+\infty}f_\ell^{(0)}\geqslant 1+\sum_{\ell=0}^{+\infty}f_\ell^{(0)}$$

蕴涵 $\sum_{k=0}^{+\infty}f_k^{(0)}=+\infty$. 当 $c<d$ 时,

$$\sum_{k=0}^{N}f_k^{(0)}\leqslant 1+\frac{c}{d}\sum_{\ell=0}^{N-1}f_\ell^{(0)}\leqslant 1+\frac{c}{d}\sum_{\ell=0}^{N}f_\ell^{(0)},$$

进而, $\sum_{k=0}^{+\infty}f_k^{(0)}\leqslant\frac{1}{1-\frac{c}{d}}$. 故命题结论成立. □

致谢 感谢审稿人的宝贵意见和建议.

参考文献

1 Chen M F. Single birth processes. Chin Ann Math Ser B, 1999, 20: 77–82
2 Chen M F. From Markov Chains to Non-equilibrium Particle Systems, 2nd ed. Singapore: World Scientific, 2004
3 Chen M F. Practical criterion for uniqueness of Q-processes. Chinese J Appl Probab Statist, 2015, 31: 213–224
4 Chen M F, Zhang Y H. Unified representation of formulas for single birth processes. Front Math China, 2014, 9: 761–796
5 Chen R R. An extended class of time-continuous branching processes. J Appl Probab, 1997, 34: 14–23
6 Chung K L. Markov Chains with Stationary Transition Probabilities. Berlin-Heidelberg: Springer, 1960
7 Feller W. On the integro-differential equations of purely discontinuous Markoff processes. Trans Amer Math Soc, 1940, 48: 488–515
8 Feller W. On boundaries and lateral conditions for the Kolmogorov differential equations. Ann of Math (2), 1957, 65: 527–570
9 Mao Y H, Zhang Y H. Exponential ergodicity for single-birth processes. J Appl Probab, 2004, 41: 1022–1032
10 Reuter G E H. Denumerable Markov processes and the associated contraction semigroups on l. Acta Math, 1957, 97: 1–46
11 Spieksma F M. Countable state Markov processes: Non-explosiveness and moment function. Probab Engrg Inform Sci, 2015, 29: 623–637
12 Wang J, Zhang Y H. Moments of integral-type downward functionals for single death processes. Front Math China, 2020, 15: 749–768
13 Zhang Y H. Sufficient and necessary conditions for stochastic comparability of jump processes. Acta Math Sin (Engl Ser), 2000, 16: 99–102
14 Zhang Y H. Strong ergodicity for single-birth processes. J Appl Probab, 2001, 38: 270–277
15 Zhang Y H. Criteria on ergodicity and strong ergodicity of single death processes. Front Math China, 2018, 13: 1215–1243

16 Zhang Y H, Zhou X F. High order moments of first hitting times for single death processes. Front Math China, 2019, 14: 1037–1061

17 Zhang Y Q. Research on recurrence of Markov chains with double birth and double death (in Chinese). Bachelor's Thesis. Beijing: Beijing Normal University, 2021 [张煜畦. 双生双灭过程的常返性研究. 学士学位论文. 北京: 北京师范大学, 2021]

附录 A　差数列与和数列

对于数列 $\{c_n\}_{n=0}^{+\infty}$, 若 $c_{n+1}=c_{n-1}-c_n$ $(n\geqslant 1)$, 则称其为差数列; 若 $c_{n+1}=c_{n-1}+c_n$, 则称其为和数列或者 Fibonacci 数列. 对于满足 $F_0=1$ 和 $F_1=1$ 的 Fibonacci 数列 $\{F_n\}_{n=0}^{+\infty}$, 有

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right),\quad n\geqslant 0.$$

对于满足 $s_0=a$ 和 $s_1=b$ 的差数列 $\{s_n\}_{n=0}^{+\infty}$, 记 $s_n=(-1)^{n-2}a_n\cdot a+(-1)^{n-1}b_n\cdot b$ $(n\geqslant 0)$, 则 $a_0=1$, $a_1=0$, $b_0=0$, $b_1=1$,

$$\begin{aligned}s_{n+1}&=s_{n-1}-s_n\\&=(-1)^{n-3}a_{n-1}\cdot a+(-1)^{n-2}b_{n-1}\cdot b-(-1)^{n-2}a_n\cdot a-(-1)^{n-1}b_n\cdot b\\&=(-1)^{n-1}(a_{n-1}+a_n)\cdot a+(-1)^n(b_{n-1}+b_n)\cdot b.\end{aligned}$$

可以看到 $a_{n+1}=a_{n-1}+a_n$ 和 $b_{n+1}=b_{n-1}+b_n$ 对于所有 $n\geqslant 1$ 都成立, 这意味着 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都是 Fibonacci 数列. 由 $a_0=1$、$a_1=0$、$b_0=0$ 和 $b_1=1$, 可以得出 $a_{n+2}=F_n$ (对于所有 $n\geqslant 0$) 和 $b_{n+1}=F_n$ (对于所有 $n\geqslant 0$). 进而, $s_n=(-1)^{n-2}F_{n-2}\cdot a+(-1)^{n-1}F_{n-1}\cdot b$, $n\geqslant 2$.

对于推广的 Fibonacci 数列 $\{F_n\}_{n=0}^{+\infty}$, 其满足 $F_{n+2}=c\cdot F_{n+1}+d\cdot F_n$ (对于所有 $n\geqslant 0$), 其中 c 和 d 是两个正常数, 则

$$\begin{bmatrix}F_{n+1}\\F_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c&d\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_n\\F_{n-1}\end{bmatrix}=:\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}F_n\\F_{n-1}\end{bmatrix}=\cdots=\boldsymbol{A}^n\begin{bmatrix}F_1\\F_0\end{bmatrix},\quad n\geqslant 0.$$

对于矩阵 $\boldsymbol{A}$, 其特征值为

$$\lambda_1=\frac{c+\sqrt{c^2+4d}}{2},\quad \lambda_2=\frac{c-\sqrt{c^2+4d}}{2},$$

此时, $\lambda_1+\lambda_2=c$, $\lambda_1\lambda_2=-d$, 则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^n&=\begin{bmatrix}\lambda_1&\lambda_2\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1^n&0\\0&\lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1&\lambda_2\\1&1\end{bmatrix}^{-1}\\&=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\begin{bmatrix}\lambda_1&\lambda_2\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1^n&0\\0&\lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-\lambda_2\\-1&\lambda_1\end{bmatrix}\\&=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\begin{bmatrix}\lambda_1^{n+1}-\lambda_2^{n+1}&-\lambda_1^{n+1}\lambda_2+\lambda_1\lambda_2^{n+1}\\\lambda_1^n-\lambda_2^n&-\lambda_1^n\lambda_2+\lambda_1\lambda_2^n\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}((\lambda_1^n-\lambda_2^n)F_1-(\lambda_1^n\lambda_2-\lambda_1\lambda_2^n)F_0) \\ &= \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}(\lambda_1^n(F_1-\lambda_2F_0)-\lambda_2^n(F_1-\lambda_1F_0)), \quad n\geqslant 0. \end{aligned}$$

特别地, 若 $F_1=c\cdot F_0$, 则

$$F_n=\frac{F_0}{\lambda_1-\lambda_2}(\lambda_1^{n+1}-\lambda_2^{n+1}), \quad n\geqslant 0.$$

对于差数列 $\{s_n\}_{n=0}^{+\infty}$, 其满足 $s_0=a$, $s_1=b$ 和 $s_{n+1}=d\cdot s_{n-1}-c\cdot s_n$ (对于所有 $n\geqslant 1$). 记 $s_n=(-1)^{n-2}a_n\cdot a+(-1)^{n-1}b_n\cdot b$ (对于所有 $n\geqslant 0$), 则 $a_0=1$, $a_1=0$, $b_0=0$, $b_1=1$,

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= d\cdot s_{n-1}-c\cdot s_n \\ &= (-1)^{n-3}a_{n-1}\cdot da+(-1)^{n-2}b_{n-1}\cdot db-(-1)^{n-2}a_n\cdot ca-(-1)^{n-1}b_n\cdot cb \\ &= (-1)^{n-1}(c\cdot a_n+d\cdot a_{n-1})\cdot a+(-1)^n(c\cdot b_n+d\cdot b_{n-1})\cdot b. \end{aligned}$$

可以看到 $a_{n+1}=c\cdot a_n+d\cdot a_{n-1}$ 和 $b_{n+1}=c\cdot b_n+d\cdot b_{n-1}$ 对于所有 $n\geqslant 1$ 都成立, 这意味着 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是推广的 Fibonacci 数列. 由 $a_0=1$、$a_1=0$、$b_0=0$ 和 $b_1=1$, 可推导出

$$a_n=-\frac{\lambda_1\lambda_2(\lambda_1^{n-1}-\lambda_2^{n-1})}{\lambda_1-\lambda_2}, \quad b_n=\frac{\lambda_1^n-\lambda_2^n}{\lambda_1-\lambda_2}, \quad n\geqslant 0.$$

进而有

$$s_n=\frac{(-1)^{n-1}}{\lambda_1-\lambda_2}(\lambda_1\lambda_2(\lambda_1^{n-1}-\lambda_2^{n-1})\cdot a+(\lambda_1^n-\lambda_2^n)\cdot b), \quad n\geqslant 0.$$

Criteria on recurrence and uniqueness of time-continuous Markov chains with uniformly upward or downward finite ranges

Yuhui Zhang

Abstract The criterion of uniqueness is a challenging problem for time-continuous Markov chains. In this paper, we obtain the explicit criteria for recurrence and uniqueness of time-continuous Markov chains with uniformly upward or downward finite ranges. The main ideas originated from our recent work on single-death processes. In addition, some concrete examples are presented to demonstrate the research results.

Keywords recurrence, uniqueness, single-birth process, single-death process

MSC(2020) 60J60

doi: 10.1360/SCM-2022-0745