应用概率统计　第 38 卷
第 3 期　2022 年 6 月

Chinese Journal of Applied Probability and Statistics
Jun., 2022, Vol. 38, No. 3, pp. 413-438
doi: 10.3969/j.issn.1001-4268.2022.03.007

单生过程的一些基本理论 *

王　婧[1,2]　　闫艳艳[2]　　张余辉[2⋆]

([1]伊犁师范大学数学与统计学院, 伊犁, 835000)

([2]北京师范大学数学科学学院, 数学与复杂系统教育部重点实验室, 北京, 100875)

摘　要： 本文作为文章 [1] 的补充, 综述了单生过程的一些基本理论, 包括单生过程一些数字特征的概率意义, 积分型泛函的分布和矩, 停留时和首达时以及末离时的分布等等.

关键词： 单生过程; 积分型泛函; 停留时; 首达时; 末离时

中图分类号： O211.62

英文引用格式： WANG J, YAN Y Y, ZHANG Y H. Some basic theory of single birth processes [J]. Chinese J Appl Probab Statist, 2022, 38(3): 413–438. (in Chinese)

§1. 引　　言

在概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上, 考虑连续时间齐次不可约且轨道右连续的马氏链 $\{X(t): t \geqslant 0\}$, 状态空间为 $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \cdots\}$, 其具有标准转移概率矩阵 $P(t) = (p_{ij}(t): i, j \in \mathbb{Z}_+)$. 此过程具有强马氏性. 如果其转移速率矩阵 $Q = (q_{ij}: i, j \in \mathbb{Z}_+)$ 具有下列形式:

$$Q = \begin{pmatrix} -q_0 & q_{01} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ q_{10} & -q_1 & q_{12} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{n0} & q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{n,n-1} & -q_n & q_{n,n+1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix},$$

其中 $q_i := -q_{ii} = \sum\limits_{j \neq i} q_{ij} < \infty$, $q_{i,i+1} > 0$, $q_{i,i+j} = 0$ 对所有的 $i \geqslant 0$ 和 $j \geqslant 2$ 成立, 且为不可约的, 称该矩阵为单生 Q 矩阵, 相应的过程称为单生过程. 此时当 $t \to 0$ 时,

$$p_{ij}(t) = \begin{cases} q_{ij}t + o(t), & \text{若 } j < i \text{ 或 } j = i+1; \\ 1 - q_i t + o(t), & \text{若 } j = i. \end{cases}$$

*国家自然科学基金项目 (批准号: 11771047、11871008)、国家重点研发计划项目 (课题编号: 2020YFA0712901) 和新疆维吾尔自治区自然科学基金项目 (批准号: 2018D01C007) 资助.

⋆通讯作者, E-mail: zhangyh@bnu.edu.cn.

本文 2020 年 9 月 11 日收到, 2020 年 12 月 21 日收到修改稿.

对称地, 有单死 Q 矩阵, 单死过程. 这两类过程通常是经典的不可配称马氏过程. 关于它们的研究背景和进展, 参看文献 [1] 和 [2], 这两篇文章分别是我们为庆贺王梓坤先生和严士健先生 90 华诞专辑写的综述文章. 在完成此二文的写作以后, 我们发现, 张建康在上世纪 80 年代关于单生过程的系列研究工作, 我们介绍得不够完整, 有必要进行补充. 因此, 在此文中, 我们将拾遗补缺, 介绍其相关成果和我们的进一步研究.

本文基本沿用文献 [3] 关于生灭过程对应内容的框架. 第二节介绍单生过程一些数字特征的概率意义. 第三节介绍单生过程的积分型随机泛函, 这是本文的重点, 将尽量用我们的符号和方法来介绍张建康的工作以及我们自己的一些结果. 第四至六节分别介绍停留时, 首达时, 末离时的分布.

全文约定 $\prod\limits_{\varnothing}=1$, $\sum\limits_{\varnothing}=0$.

§2. 数字特征的概率意义

对 $0\leqslant k<n$ $(k,n\in\mathbb{Z}_+)$, 定义 $q_n^{(k)}=\sum\limits_{j=0}^{k}q_{nj}$ 和

$$F_i^{(i)}=1,\qquad F_n^{(i)}=\frac{1}{q_{n,n+1}}\sum_{k=i}^{n-1}q_n^{(k)}F_k^{(i)},\qquad 0\leqslant i<n,\tag{1}$$

$$m_0=\frac{1}{q_{01}},\qquad m_n=\frac{1}{q_{n,n+1}}\Big(1+\sum_{k=0}^{n-1}q_n^{(k)}m_k\Big),\qquad n\geqslant 1,\tag{2}$$

$$d_0=0,\qquad d_n=\frac{1}{q_{n,n+1}}\Big(1+\sum_{k=0}^{n-1}q_n^{(k)}d_k\Big),\qquad n\geqslant 1.\tag{3}$$

等价地, 也可以定义为

$$F_i^{(i)}=1,\qquad F_n^{(i)}=\sum_{k=i+1}^{n}\frac{F_n^{(k)}q_k^{(i)}}{q_{k,k+1}},\qquad n>i,$$

$$m_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{F_n^{(k)}}{q_{k,k+1}},\qquad d_n=\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{F_n^{(k)}}{q_{k,k+1}},\qquad n\geqslant 0.$$

上面三者实际上满足: $m_n=d_n+F_n^{(0)}/q_{01}$.

对于单生过程, 由 (1) 式, (2) 式和 (3) 式, 可以定义下面这些重要的数字特征:

$$d=\sup_{i>0}\Big[\Big(\sum_{n=0}^{i-1}d_n\Big)\Big/\Big(\sum_{n=0}^{i-1}F_n^{(0)}\Big)\Big],\tag{4}$$

$$R=\sum_{n=0}^{\infty}m_n,\qquad S=\sup_{k\geqslant 0}\sum_{n=0}^{k}(F_n^{(0)}d-d_n),\tag{5}$$

$$Z_{m,n}=\sum_{i=m}^{n-1}F_i^{(m)},\qquad Z_m=\lim_{n\to\infty}Z_{m,n}=\sum_{i=m}^{\infty}F_i^{(m)}.\tag{6}$$

下面我们来阐述各数字特征的概率意义. 以 P_k 表示过程从状态 k 出发 $(X(0)=k)$ 的条件概率, 相应的数学期望记为 E_k. 分别记过程的首个飞跃时和第 n 次跳时刻为 η 和 η_n, 即

$$\eta_n=\inf\{t>\eta_{n-1}:X(t)\neq X(\eta_{n-1})\},\qquad n\geqslant 1;\qquad \eta=\lim_{n\to\infty}\eta_n,$$

此处 $\eta_0\equiv 0$. 状态 i 的首达时和回返时分别为:

$$\tau_i=\inf\{t>0:X(t)=i\},\qquad \sigma_i=\inf\{t\geqslant\eta_1:X(t)=i\}.$$

注意单生过程有如下特点: 过程自状态 i 出发经过一次跳跃只能到达 $i+1$ 或者 $0,\cdots,i-1$ (自 0 出发则只能也必定到达 1). 因此, 为使得自 i 出发经过有限次跳跃到达 n $(n>i)$, 必须经过 i 与 n 之间的所有状态 $i+1,\cdots,n-1$. 由此可见, 当 $i<n$ 时, 以 P_i 概率 1, τ_n 等于首出集合 $\{0,1,\cdots,n-1\}$ 的时间, 亦即为首达集合 $\{n,n+1,\cdots\}$ 的时间, 因而由文献 [3; § 15.3 引理 2] 得到

$$\eta=\lim_{n\to\infty}\tau_n,\qquad \text{a.s.},$$

此处 a.s. 对 P 或者 P_i $(i\geqslant 0)$ 而言均可. 因此, η 可以视为首达 ∞ 的时间. 来看第一个结果 (参看文献 [4; 定理 1.1]).

定理 1 $m_i=\mathsf{E}_i\tau_{i+1}$ $(i\geqslant 0)$, $R=\mathsf{E}_0\eta$, 其中 m_i 和 R 的定义分别见 (2) 式和 (5) 式.

现在来看 $Z_{m,n}$, Z_m 的概率意义 (其定义见 (6) 式). 定义

$$p_k(m,n)=\mathsf{P}_k(\tau_m<\tau_n),\qquad m\leqslant k\leqslant n;\qquad p_k(m)=\mathsf{P}_k(\sigma_m<\eta).$$

因而 $p_k(m,n)$ 是过程自状态 k 出发, 沿轨道, 在首达 n 以前先到 m 的概率, $p_k(m)$ 是过程自状态 k 出发, 沿轨道, 经过有限次跳跃而到达 m 的概率. 显然, $p_k(m,n)$, $p_k(m)$ 也是嵌入马氏链的同样事件的概率. 至于 $p_k(k)$, 是过程自 k 出发, 沿轨道, 离开 k 以后, 经过有限次跳跃而回到 k 的概率, 通常称为回返概率. 关于这些概率, 我们有以下结果.

定理 2 (i) 设 $m<k<n$, 则

$$p_k(m,n)=1-\frac{Z_{m,k}}{Z_{m,n}},\qquad p_k(n,m)=\frac{Z_{m,k}}{Z_{m,n}};$$

(ii)

$$p_k(m)=\begin{cases}1-\dfrac{Z_{m,k}}{Z_m}, & \text{若 } k>m;\\ 1, & \text{若 } k<m;\\ 1-\dfrac{q_{m,m+1}}{q_mZ_m}, & \text{若 } k=m.\end{cases}$$

上述结果由文献 [4; 定理 1.2] 首先得到. 文献 [5] 独立地给出其新证明.

在实际应用中, $p_k(0)$ 称为灭绝概率, 即开始时有 k 个个体, 最终 (经过有限次转移后) 完全灭绝 (即到达状态 0) 的概率. 由定理 2 可以直接得到下面结论.

命题 3 假定单生 Q 矩阵不可约. 则

(i) $Z_m\ (m \geqslant 0)$ 或者同时有限, 或者同时无穷;

(ii) 若再假定过程唯一, 则单生过程常返当且仅当 $Z_0 = \infty$.

命题 3 结论 (i) 的概率方法证明参看文献 [4], 分析方法的证明参看文献 [6]. 关于常返性的判别准则, 由文献 [7] 和 [4] 分别独立地得到. 文献 [8] 中利用过程的强马氏性得到

$$\mathsf{E}_1\tau_0 \geqslant \mathsf{E}_k\tau_0 \prod_{i=1}^{k-1} \frac{q_{i,i+1}}{q_i}, \qquad \mathsf{E}_{k+1}\tau_k \leqslant \mathsf{E}_{k+1}\tau_0 + \mathsf{E}_0\tau_k.$$

由此推出: 若 $\mathsf{E}_1\tau_0 < \infty$, 则 $\mathsf{E}_k\tau_0 < \infty$, $\mathsf{E}_{k+1}\tau_k < \infty\ (k \geqslant 1)$; 进而得到: 在过程唯一的假定下, 过程遍历当且仅当 $Z_0 = \infty$, $\mathsf{E}_1\tau_0 < \infty$.

由 [9] 知, 在单生 Q 矩阵不可约且相应的过程常返的假定下,

$$\mathsf{E}_0\sigma_0 = \frac{1}{q_0} + d, \qquad \mathsf{E}_i\tau_0 = \sum_{k=0}^{i-1}(F_k^{(0)}d - d_k), \qquad i \geqslant 0,$$

其中 d_i 和 d 的定义见 (3) 式和 (4) 式. 因此, 有下面结果.

定理 4 假定单生 Q 矩阵不可约, 相应的过程常返. 则 $d = \mathsf{E}_1\tau_0$, $S = \sup\limits_{i\geqslant 1} \mathsf{E}_i\tau_0$, 其中 S 的定义见 (6) 式.

此时有: $d = \varlimsup\limits_{k\to\infty} \big[\big(\sum\limits_{n=0}^{k} d_n\big)\big/\big(\sum\limits_{n=0}^{k} F_n^{(0)}\big)\big]$. 参看文献 [10; 命题 5.2]. 实际上, 还有下面的准则 (参看文献 [7]).

定理 5 假定单生 Q 矩阵不可约且过程唯一. 则过程遍历当且仅当 $d < \infty$.

在过程唯一的条件下, $d < \infty$ 蕴含过程常返, 即 $Z_0 = \infty$, 否则若 $Z_0 < \infty$, 由 d 的定义知, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} d_k < \infty$, 进而 $R = \sum\limits_{k=0}^{\infty} m_k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} d_k + Z_0/q_{01} < \infty$, 与过程唯一的假定矛盾.

对遍历情形, 由文献 [11] 或者 [1] 知, 平稳分布 $\pi = (\pi_i)$ 满足:

$$\pi_0 = \frac{1}{\mu}, \qquad \mu = 1 + q_{01}d.$$

下面介绍强遍历速度估计的一个结果. 对于 $\gamma \geqslant 2$, 定义

$$\alpha(\gamma) = \sup\Big\{\epsilon \geqslant 0 : \sup_{i\geqslant 0} \|p_{i\cdot}(t) - \pi\|_{\mathsf{Var}} \leqslant \gamma \mathrm{e}^{-\epsilon t}, \forall\, t \geqslant 0\Big\},$$

其中 $\|\cdot\|_{\mathsf{Var}}$ 是全变差范数. 进而, 定义 $\alpha = \alpha(\infty) = \lim\limits_{\gamma\to\infty} \alpha(\gamma)$. 由文献 [12,13] 可得下列估计.

定理 6 假设单生过程是强遍历的. 则有下面的估计:

$$\alpha(\gamma) \leqslant \frac{2\mu\ln(\gamma\mu)}{S}, \qquad \gamma \geqslant 2.$$

若此单生过程还是随机单调的, 则

$$\alpha(\gamma) \geqslant \frac{1 - 2/\gamma}{S}, \qquad \gamma > 2.$$

进而, $\alpha \geqslant 1/S$.

§3. 积分型随机泛函

设 V 是定义在状态空间 $\mathbb{Z}_+$ 上的非负但不恒为 0 的函数. 本节目的是研究下列两个积分型随机泛函的分布:

$$\xi_n = \int_0^{\tau_n} V(X(t))\mathrm{d}t, \qquad \xi = \int_0^{\eta} V(X(t))\mathrm{d}t.$$

固定 $n \geqslant 0$, 记 ξ_n 从状态 k 出发的分布函数为 $F_{kn}(x) = \mathsf{P}_k(\xi_n \leqslant x)$. 考虑 $F_{kn}(x)$ 的 Laplace 变换

$$\varphi_{kn}(\lambda) = \mathsf{E}_k \mathrm{e}^{-\lambda\xi_n} = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}F_{kn}(x),$$

$\varphi_{kn}(\lambda)$ 至少对 $\lambda \geqslant 0$ 都有定义. 一般地, $F_{kn}(x)$ 可以由 $\varphi_{kn}(\lambda)$ 经过反 Laplace 变换得到.

注意, 如果 $V \equiv 1$, 则 $\xi_n = \tau_n$, $\xi = \eta$; $\varphi_{nn}(\lambda) \equiv 1$.

此节仅讨论开始状态 $k \leqslant n$ 的情形. 此时 $F_{kn}(x)$ 是自状态 k 出发, 积分上限为首达更大状态 n 时刻的积分的分布, 或者说积分是向上的. 先看两个引理.

引理 7 设 A 为 $\mathbb{Z}_+$ 的任意非空子集. 记 $\tau = \inf\{t > 0 : X(t) \in A\}$. 假设

$$f_{kA}(\lambda) := \mathsf{E}_k \exp\Big[-\lambda\int_0^{\tau} V(X(t))\mathrm{d}t\Big] < \infty.$$

则 $(f_{kA}(\lambda))$ 满足差分方程组

$$q_{k,k+1}g_{k+1} + \sum_{j=0}^{k-1} q_{kj}g_j - (\lambda V(k) + q_k)g_k = 0, \qquad k \notin A; \qquad g_k = 1, \qquad k \in A.$$

下面考虑差分方程组

$$\sum_{j=0}^{k-1} q_{kj}g_j - (\lambda V(k) + q_k)g_k + q_{k,k+1}g_{k+1} = 0, \qquad 0 \leqslant k < n; \qquad g_n = 1. \tag{7}$$

其系数行列式为 n 阶行列式:

$$D_n(\lambda) := \begin{vmatrix} W_0 & q_{01} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ q_{10} & W_1 & q_{12} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ q_{20} & q_{21} & W_2 & q_{23} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{n-2,0} & q_{n-2,1} & q_{n-2,2} & q_{n-2,3} & \cdots & q_{n-2,n-3} & W_{n-2} & q_{n-2,n-1} \\ q_{n-1,0} & q_{n-1,1} & q_{n-1,2} & q_{n-1,3} & \cdots & q_{n-1,n-3} & q_{n-1,n-2} & W_{n-1} \end{vmatrix},$$

其中 $W_i = -(\lambda V(i) + q_i)$, $i = 0, 1, \cdots, n-1$. 注意, $D_n(\lambda)$ 是至多 n 次实系数多项式.

设 $D_0(\lambda) \equiv 1$. 按 $D_n(\lambda)$ 的最后一行展开, 得

$$D_n(\lambda) = W_{n-1}D_{n-1}(\lambda) + \sum_{i=0}^{n-2}(-1)^{n-1-i}q_{n-1,i}\prod_{j=i}^{n-2}q_{j,j+1}D_i(\lambda).$$

记 $L_j(\lambda):=(-1)^jD_j(\lambda)$, $j=0,1,\cdots,n$. 则 $L_0(\lambda)\equiv 1$,

$$L_k(\lambda)=[\lambda V(k-1)+q_{k-1}]L_{k-1}(\lambda)-\sum_{i=0}^{k-2}q_{k-1,i}\prod_{j=i}^{k-2}q_{j,j+1}L_i(\lambda),\qquad k\geqslant 1. \tag{8}$$

引理 8 (i) 对于一切 $1\leqslant k\leqslant n$ 和 $\lambda\geqslant 0$, 有 $L_k(\lambda)\geqslant L_k(0)=\prod\limits_{j=0}^{k-1}q_{j,j+1}>0$.

(ii) 存在常数 $\theta>0$, 使得当 $\lambda>-\theta$ 时, $L_n(\lambda)>0$.

证明: (i) 首先, 用数学归纳法证明

$$L_k(0)=L_{k-1}(0)q_{k-1,k}=\prod_{j=0}^{k-1}q_{j,j+1},\qquad 1\leqslant k\leqslant n. \tag{9}$$

事实上, $L_1(0)=q_0=q_{01}=L_0(0)q_{01}$. 假设直至 $k<n$ 时 (9) 式都成立. 则

$$\begin{aligned}L_{k+1}(0)&=q_kL_k(0)-\sum_{i=0}^{k-1}q_{ki}\prod_{j=i}^{k-1}q_{j,j+1}L_i(0)\\&=q_k\prod_{j=0}^{k-1}q_{j,j+1}-\sum_{i=1}^{k-1}q_{ki}\prod_{j=i}^{k-1}q_{j,j+1}\prod_{j=0}^{i-1}q_{j,j+1}-q_{k0}\prod_{j=0}^{k-1}q_{j,j+1}\\&=\prod_{j=0}^{k}q_{j,j+1}=L_k(0)q_{k,k+1}.\end{aligned}$$

因此, 对 $k+1$, (9) 式依然成立. 由归纳法得证 (9) 式. 因此对一切 $1\leqslant k\leqslant n$, $L_k(0)=q_{01}q_{12}\cdots q_{k-1,k}>0$.

其次, 考虑多项式

$$\mathscr{L}_k(\lambda)=\frac{L_k(\lambda)}{L_k(0)}=L_k(\lambda)\Big/\Big(\prod_{j=0}^{k-1}q_{j,j+1}\Big),\qquad 0\leqslant k\leqslant n. \tag{10}$$

此时, 有 $\mathscr{L}_0(\lambda)\equiv 1$,

$$\mathscr{L}_k(\lambda)=\frac{\lambda V(k-1)+q_{k-1}}{q_{k-1,k}}\mathscr{L}_{k-1}(\lambda)-\frac{1}{q_{k-1,k}}\sum_{i=0}^{k-2}q_{k-1,i}\mathscr{L}_i(\lambda),\qquad 1\leqslant k\leqslant n. \tag{11}$$

对任意 $\lambda\geqslant 0$, 为证明 $L_k(\lambda)\geqslant L_k(0)$, 只需证明 $\mathscr{L}_k(\lambda)\geqslant 1$.

事实上, 可以证明, 对任意 $\lambda\geqslant 0$, 则 $\mathscr{L}_k(\lambda)$ 关于 k 单调增. 为此, 采用数学归纳法. $\mathscr{L}_0(\lambda)\equiv 1\leqslant\mathscr{L}_1(\lambda)=\lambda V(0)/q_{01}+1$. 假设直至 $k<n$ 时单调性成立. 此时, 有

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{k+1}(\lambda)&=\frac{\lambda V(k)+q_k}{q_{k,k+1}}\mathscr{L}_k(\lambda)-\frac{1}{q_{k,k+1}}\sum_{i=0}^{k-1}q_{ki}\mathscr{L}_i(\lambda)\\&\geqslant\frac{q_k}{q_{k,k+1}}\mathscr{L}_k(\lambda)-\frac{1}{q_{k,k+1}}\sum_{i=0}^{k-1}q_{ki}\mathscr{L}_k(\lambda)=\mathscr{L}_k(\lambda).\end{aligned}$$

因此, 由数学归纳法知 $\mathscr{L}_k(\lambda)$ 关于 k 单调增. 故 $\mathscr{L}_k(\lambda)\geqslant\mathscr{L}_0(\lambda)\equiv 1$, 进而 $L_k(\lambda)\geqslant L_k(0)$. 结论 (i) 成立.

(ii) 由前面的证明知, 对于任意 $\lambda\geqslant 0$, $\mathscr{L}_n(\lambda)\geqslant 1$, 进而, $L_n(\lambda)\geqslant L_n(0)=q_{01}q_{12}\cdots q_{n-1,n}>0$. 留意 $L_n(\lambda)$ 是 λ 的多项式, 为连续函数. 因此结论 (ii) 成立.

引理结论证毕. □

引理 8 的内容可以参看文献 [4; 引理 2.1 和引理 2.2]. 由这些引理, 可以证明如下结果.

定理 9 存在常数 $h>0$, 使得当 $\lambda>-h$ 时, 对一切 $0\leqslant k<n$, $\varphi_{kn}(\lambda)<\infty$, 且是差分方程组 (7) 式的唯一解, 因而

$$\varphi_{kn}(\lambda)=\frac{D_n^{(k+1)}(\lambda)}{D_n(\lambda)},\qquad 0\leqslant k<n;\qquad \varphi_{nn}(\lambda)\equiv 1,$$

其中 $D_n^{(k)}(\lambda)$ 是以列向量 $(0,0,\cdots,0,-q_{n-1,n})^{\mathsf{T}}$ 代替 $D_n(\lambda)$ 中第 k 列所得的行列式.

定理 9 可参看文献 [4; 定理 2.1]. 注意, 此时由定理 9 的结论知, $\varphi_{kn}(\lambda)$ 关于 λ 任意阶可导. 由文献 [10] 可得 $\varphi_{kn}(\lambda)$ 的另一个表示.

定理 10 令

$$\begin{aligned}
&\widetilde{q}_j^{(k)}=q_j^{(k)}+\lambda V(j)=\sum_{i=0}^{k}q_{ji}+\lambda V(j),\qquad 0\leqslant k<j,\\
&\widetilde{F}_i^{(i)}=1,\qquad \widetilde{F}_j^{(i)}=\frac{1}{q_{j,j+1}}\sum_{k=i}^{j-1}\widetilde{q}_j^{(k)}\widetilde{F}_k^{(i)},\qquad 0\leqslant i<j,
\end{aligned}\tag{12}$$

则定理 9 的 $\varphi_{kn}(\lambda)$ 可表示为

$$\varphi_{kn}(\lambda)=\Big(1+\lambda\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=0}^{j}\frac{\widetilde{F}_j^{(i)}V(i)}{q_{i,i+1}}\Big)\Big/\Big(1+\lambda\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{j}\frac{\widetilde{F}_j^{(i)}V(i)}{q_{i,i+1}}\Big),\qquad 0\leqslant k\leqslant n.$$

进而, 有以下两式成立:

$$\begin{aligned}
(L_n(\lambda)=)(-1)^nD_n(\lambda)&=\Big(\prod_{j=0}^{n-1}q_{j,j+1}\Big)\Big(1+\lambda\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{j}\frac{\widetilde{F}_j^{(i)}V(i)}{q_{i,i+1}}\Big),\qquad n\geqslant 1;\\
(-1)^nD_n^{(k+1)}(\lambda)&=\Big(\prod_{j=0}^{n-1}q_{j,j+1}\Big)\Big(1+\lambda\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=0}^{j}\frac{\widetilde{F}_j^{(i)}V(i)}{q_{i,i+1}}\Big),\qquad 0\leqslant k<n.
\end{aligned}$$

证明: 改写方程组 (7) 式为

$$(Qg-\lambda Vg)_k=0,\qquad 0\leqslant k<n;\qquad g_n=1.$$

应用文献 [10; 定理 1.1], 此时, 该定理的 $f\equiv 0$, $c=-\lambda V$, 得到

$$g_k=g_0\Big(1+\lambda\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=0}^{j}\frac{\widetilde{F}_j^{(i)}V(i)}{q_{i,i+1}}\Big),\qquad 0\leqslant k\leqslant n.$$

由 $g_n=1$, 得 $g_0=\big[1+\lambda\sum\limits_{j=0}^{n-1}\sum\limits_{i=0}^{j}(\widetilde{F}_j^{(i)}V(i)/q_{i,i+1})\big]^{-1}$. 由此得证定理前一结论.

由定理 9 和上面的结论知, 为证后面的两式, 只需证明后面的第一式. 应用数学归纳法. 当 $n=1$ 时, $(L_1(\lambda)=)(-1)D_1(\lambda)=\lambda V(0)+q_0$, 而

$$q_{01}\Big(1+\frac{\lambda V(0)}{q_{01}}\Big)=q_{01}+\lambda V(0)=\lambda V(0)+q_0.$$

所以, 该式在 $n=1$ 时成立. 实际上根据约定 $\prod\limits_{\varnothing}=1$, $\sum\limits_{\varnothing}=0$, 此式对 $n=0$ 同样成立. 假设直至 $n=k-1$ 该式都成立. 当 $n=k$ 时, 由 (8) 式, 得到

$$\begin{aligned}
L_k(\lambda)=&\Big(\prod_{j=0}^{k-2}q_{j,j+1}\Big)\Big[\big(\widetilde{q}_{k-1}^{(k-2)}+q_{k-1,k}\big)\Big(1+\lambda\sum_{j=0}^{k-2}\sum_{i=0}^{j}\frac{\widetilde{F}_j^{(i)}V(i)}{q_{i,i+1}}\Big)+\lambda V(k-1)\\
&-\widetilde{q}_{k-1}^{(k-2)}-\lambda\sum_{j=0}^{k-3}\big(\widetilde{q}_{k-1}^{(k-2)}-\widetilde{q}_{k-1}^{(j)}\big)\sum_{\ell=0}^{j}\frac{\widetilde{F}_j^{(\ell)}V(\ell)}{q_{\ell,\ell+1}}\Big]\\
=&\Big(\prod_{j=0}^{k-2}q_{j,j+1}\Big)\Big[\lambda\widetilde{q}_{k-1}^{(k-2)}\sum_{i=0}^{k-2}\frac{\widetilde{F}_{k-2}^{(i)}V(i)}{q_{i,i+1}}+\lambda V(k-1)+q_{k-1,k}\Big(1+\lambda\sum_{j=0}^{k-2}\sum_{i=0}^{j}\frac{\widetilde{F}_j^{(i)}V(i)}{q_{i,i+1}}\Big)\\
&+\lambda q_{k-1,k}\sum_{\ell=0}^{k-3}\frac{\widetilde{F}_{k-1}^{(\ell)}V(\ell)}{q_{\ell,\ell+1}}-\lambda\widetilde{q}_{k-1}^{(k-2)}\sum_{\ell=0}^{k-3}\frac{\widetilde{F}_{k-2}^{(\ell)}V(\ell)}{q_{\ell,\ell+1}}\Big]\qquad(\text{由 (12) 式}),
\end{aligned}$$

进而得到

$$\begin{aligned}
L_k(\lambda)=&\Big(\prod_{j=0}^{k-2}q_{j,j+1}\Big)\Big[\frac{\lambda\widetilde{q}_{k-1}^{(k-2)}V(k-2)}{q_{k-2,k-1}}+\lambda V(k-1)+q_{k-1,k}\Big(1+\lambda\sum_{j=0}^{k-2}\sum_{i=0}^{j}\frac{\widetilde{F}_j^{(i)}V(i)}{q_{i,i+1}}\Big)\\
&+\lambda q_{k-1,k}\sum_{\ell=0}^{k-3}\frac{\widetilde{F}_{k-1}^{(\ell)}V(\ell)}{q_{\ell,\ell+1}}\Big]\\
=&\Big(\prod_{j=0}^{k-2}q_{j,j+1}\Big)\Big[q_{k-1,k}\Big(1+\lambda\sum_{j=0}^{k-2}\sum_{i=0}^{j}\frac{\widetilde{F}_j^{(i)}V(i)}{q_{i,i+1}}\Big)+\lambda q_{k-1,k}\sum_{\ell=0}^{k-1}\frac{\widetilde{F}_{k-1}^{(\ell)}V(\ell)}{q_{\ell,\ell+1}}\Big]\\
=&\Big(\prod_{j=0}^{k-1}q_{j,j+1}\Big)\Big(1+\lambda\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=0}^{j}\frac{\widetilde{F}_j^{(i)}V(i)}{q_{i,i+1}}\Big).
\end{aligned}$$

因此, 该式对 $n=k$ 依然成立. 由归纳法知, 该式对所有 n 成立. 结论证毕. □

注意, 由定理 10 和 (10) 式可以得到

$$\mathscr{L}_k(\lambda)=1+\lambda\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=0}^{j}\frac{\widetilde{F}_j^{(i)}V(i)}{q_{i,i+1}},\qquad k\geqslant 0.$$

现在来求 ξ_n 的各阶矩. 参看文献 [4; 定理 2.2].

定理 11 $\mathsf{E}_n\xi_n^\ell=0$, $\mathsf{E}_k\xi_n^\ell=\sum\limits_{j=k}^{n-1}m_j^{(\ell)}$, $0\leqslant k<n$, 其中

$$m_j^{(\ell)}=\ell\sum_{i=0}^{j}\frac{F_j^{(i)}V(i)\mathsf{E}_i\xi_n^{\ell-1}}{q_{i,i+1}},\qquad 0\leqslant j<n,\tag{13}$$

等价地,

$$m_j^{(\ell)}=\frac{1}{q_{j,j+1}}\Big(\ell V(j)\mathsf{E}_j\xi_n^{\ell-1}+\sum_{i=0}^{j-1}q_j^{(i)}m_i^{(\ell)}\Big),\qquad 0\leqslant j<n.\tag{14}$$

证明: 令

$$y_k=\mathsf{E}_k\xi_n^\ell,\qquad \ell\geqslant 1;\qquad \varphi_{kn}^{(\ell)}(0)=\frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}\lambda^\ell}\varphi_{kn}(\lambda)\Big|_{\lambda=0}.$$

则

$$y_k=(-1)^\ell\varphi_{kn}^{(\ell)}(0).$$

由定理 9 知, $(\varphi_{kn}(\lambda),k\leqslant n)$ 是方程组 (7) 式的唯一解, 将其代入方程组, 对 λ 求 ℓ 次导数, 并令 $\lambda=0$, 乘以 $(-1)^\ell$, 得到

$$\sum_{j=0}^{k-1}q_{kj}y_j-q_ky_k+q_{k,k+1}y_{k+1}+\ell V(k)\mathsf{E}_k\xi_n^{\ell-1}=0,\qquad 0\leqslant k<n;\qquad y_n=0.\tag{15}$$

改写方程组 (15) 式为

$$(Qy)_k=-\ell V(k)\mathsf{E}_k\xi_n^{\ell-1},\qquad 0\leqslant k<n;\qquad y_n=0.$$

应用文献 [10; 定理 1.1], 此时, 该定理的 $f=-\ell V(k)\mathsf{E}_k\xi_n^{\ell-1}$, $c\equiv 0$, 得到

$$y_k=y_0-\ell\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=0}^{j}\frac{F_j^{(i)}V(i)\mathsf{E}_i\xi_n^{\ell-1}}{q_{i,i+1}},\qquad 0\leqslant k\leqslant n.$$

由 $y_n=1$, 得

$$y_0=\ell\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{j}\frac{F_j^{(i)}V(i)\mathsf{E}_i\xi_n^{\ell-1}}{q_{i,i+1}},$$

进而

$$y_k=\ell\sum_{j=k}^{n-1}\sum_{i=0}^{j}\frac{F_j^{(i)}V(i)\mathsf{E}_i\xi_n^{\ell-1}}{q_{i,i+1}}=\sum_{j=k}^{n-1}m_j^{(\ell)}.$$

(13) 式和 (14) 式的等价性则由文献 [10; 推论 2.3] 直接得到. 由此得证定理结论. □

特别地, 由文献 [10; 推论 2.3], 有

$$m_j^{(1)}=\sum_{i=0}^{j}\frac{F_j^{(i)}V(i)}{q_{i,i+1}}=\frac{1}{q_{j,j+1}}\Big(V(j)+\sum_{i=0}^{j-1}q_j^{(i)}m_i^{(1)}\Big),\qquad 0\leqslant j<n.$$

用 Cramer 法则直接解方程组 (15) 式, 得

$$y_k = \frac{\overline{D}_n^{(k+1)}(0)}{D_n(0)}, \qquad 0 \leqslant k < n,$$

其中 $\overline{D}_n^{(k)}(0)$ 是以列向量 $-\ell(V(0)\mathsf{E}_0\xi_n^{\ell-1}, V(1)\mathsf{E}_1\xi_n^{\ell-1}, \cdots, V(n-1)\mathsf{E}_{n-1}\xi_n^{\ell-1})^{\mathsf{T}}$ 代替 $D_n(0)$ 中第 k 列所得的行列式 $(1 \leqslant k \leqslant n)$. 展开这两个行列式同样得到定理 11 的结论.

由定理 11 知, ξ_n 的高阶矩可以通过低阶矩递归地显式表示. 当 $V(i) \equiv 1$ 时, $\xi_n = \tau_n$, $m_i^{(1)} = m_i$, 故

$$\mathsf{E}_k\tau_n = \sum_{i=k}^{n-1} m_i^{(1)} = \sum_{i=k}^{n-1} m_i, \qquad 0 \leqslant k < n.$$

下面研究 ξ 的各阶矩. 参看文献 [4].

定理 12 (i) $\mathsf{E}_k\xi^\ell = \sum\limits_{j=k}^{\infty} \overline{m}_j^{(\ell)}$, 其中

$$\overline{m}_j^{(\ell)} = \ell \sum_{i=0}^{j} \frac{F_j^{(i)} V(i) \mathsf{E}_i \xi^{\ell-1}}{q_{i,i+1}}, \qquad j \geqslant 0, \tag{16}$$

等价地,

$$\overline{m}_j^{(\ell)} = \frac{1}{q_{j,j+1}} \Big(\ell V(j)\mathsf{E}_j\xi^{\ell-1} + \sum_{i=0}^{j-1} q_j^{(i)} \overline{m}_i^{(\ell)}\Big), \qquad j \geqslant 0. \tag{17}$$

(ii) 各阶矩 $\mathsf{E}_k\xi^\ell$ $(k \geqslant 0, \ell \geqslant 1)$ 或者同时有限, 或者同时无穷.

证明: (i) 由单调收敛定理, 得 $\mathsf{E}_k\xi^\ell = \lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{E}_k\xi_n^\ell$. 令

$$\overline{m}_j^{(\ell)} = \lim_{n\to\infty} m_j^{(\ell)} = \ell \sum_{i=0}^{j} \frac{F_j^{(i)} V(i) \mathsf{E}_i \xi^{\ell-1}}{q_{i,i+1}}.$$

由定理 11 和以上两式, 得证定理的结论 (i).

(ii) 由结论 (i) 得 $\mathsf{E}_k\xi = \sum\limits_{j=k}^{\infty} \overline{m}_j^{(1)}$. 若 $\mathsf{E}_0\xi < \infty$, 因为 $\mathsf{E}_0\xi \geqslant \mathsf{E}_1\xi \geqslant \mathsf{E}_2\xi \geqslant \cdots$, 故由结论 (i) 及 (16) 式得

$$\overline{m}_j^{(2)} \leqslant 2\mathsf{E}_0\xi \cdot \overline{m}_j^{(1)}, \qquad j \geqslant 0,$$

进而

$$\mathsf{E}_k\xi^2 \leqslant 2\mathsf{E}_0\xi \sum_{j=k}^{\infty} \overline{m}_j^{(1)} \leqslant 2!(\mathsf{E}_0\xi)^2, \qquad k \geqslant 0.$$

假设直至 $\ell - 1$, 有 $\mathsf{E}_k\xi^{\ell-1} \leqslant (\ell-1)!(\mathsf{E}_0\xi)^{\ell-1}$ $(k \geqslant 0)$. 则由结论 (i) 及 (16) 式得

$$\overline{m}_j^{(\ell)} \leqslant \ell\mathsf{E}_0\xi^{\ell-1} \cdot \overline{m}_j^{(1)}, \qquad j \geqslant 0,$$

进而

$$\mathsf{E}_k\xi^\ell \leqslant \ell\mathsf{E}_0\xi^{\ell-1} \sum_{j=k}^{\infty} \overline{m}_j^{(1)} \leqslant \ell!(\mathsf{E}_0\xi)^\ell, \qquad k \geqslant 0.$$

由此得证一切 $\mathsf{E}_k\xi^\ell < \infty$ $(k \geqslant 0,\ \ell \geqslant 1)$. 若 $\mathsf{E}_0\xi = \infty$, 由结论 (i) 知, $\mathsf{E}_k\xi = \infty$ $(k > 0)$. 由 V 不恒为 0 知, 存在 $k \geqslant 0$, $V(k) > 0$, 此时, 由 (17) 式得 $\overline{m}_k^{(2)} = \infty$, 再由结论 (i) 知, $\mathsf{E}_j\xi^2 = \infty$ $(0 \leqslant j \leqslant k)$, 而由不可约性知, 存在 $i > k \geqslant j$ 使得 $q_{ij} > 0$, 故 $q_i^{(k)} > 0$, 进而 $\overline{m}_i^{(2)} = \infty$, 再由结论 (i) 知, $\mathsf{E}_j\xi^2 = \infty$ $(0 \leqslant j \leqslant i)$. 故同理利用不可约性可得 $\mathsf{E}_j\xi^2 = \infty$ $(j \geqslant 0)$. 同理, 可得对一切 $\mathsf{E}_k\xi^\ell = \infty$ $(k \geqslant 0,\ \ell \geqslant 1)$. 结论 (ii) 证毕. □

特别地, 由文献 [10; 推论 2.3], 知

$$\overline{m}_j^{(1)} = \sum_{i=0}^{j} \frac{F_j^{(i)} V(i)}{q_{i,i+1}} = \frac{1}{q_{j,j+1}}\Big(V(j) + \sum_{i=0}^{j-1} q_j^{(i)} \overline{m}_i^{(1)}\Big), \qquad j \geqslant 0.$$

当 $V(i) \equiv 1$ 时, $\overline{m}_j^{(1)} = m_j$, $\mathsf{E}_0\xi = R$.

$\mathsf{E}_0\xi < \infty$, 不仅蕴含一切 $\mathsf{E}_k\xi^n < \infty$ $(k \geqslant 0,\ n \geqslant 1)$, 还蕴含 $\xi < \infty$ (P_k-a.s., $k \geqslant 0$). 具体描述见下面结论. 参看文献 [4; 定理 2.3].

定理 13 对一切非负整数 k, 以下结论成立:

(i) $\mathsf{P}_k(\xi = \infty) = 1$ 当且仅当 $\mathsf{E}_0\xi = \sum_{i=0}^{\infty} \overline{m}_i^{(1)} = \infty$;

(ii) $\mathsf{P}_k(\xi < \infty) = 1$ 当且仅当 $\mathsf{E}_0\xi = \sum_{i=0}^{\infty} \overline{m}_i^{(1)} < \infty$; 此时, 对任意 $\lambda > 0$,

$$\varphi_k(\lambda) := \mathsf{E}_k \exp(-\lambda\xi) = \lim_{n\to\infty} \frac{D_n^{(k+1)}(\lambda)}{D_n(\lambda)}, \qquad k \geqslant 0, \tag{18}$$

除差一常数因子外, 是下列方程组的唯一非平凡有界解:

$$\sum_{j=0}^{k-1} q_{kj} g_j - (\lambda V(k) + q_k) g_k + q_{k,k+1} g_{k+1} = 0, \qquad k \geqslant 0. \tag{19}$$

$(\varphi_k(\lambda),\ k \geqslant 0)$ 还可表示为

$$\varphi_k(\lambda) = \varphi_0(\lambda)\Big(1 + \lambda \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=0}^{j} \frac{\widetilde{F}_j^{(i)} V(i)}{q_{i,i+1}}\Big), \qquad k \geqslant 0.$$

证明: 若 $\mathsf{E}_0\xi = \sum_{i=0}^{\infty} \overline{m}_i^{(1)} < \infty$, 因 $\mathsf{E}_k\xi \leqslant \mathsf{E}_0\xi$, 则 $\mathsf{P}_k(\xi < \infty) = 1$. 由于 $\lambda > 0$, $0 \leqslant \varphi_k(\lambda) \leqslant 1$, 故由控制收敛定理及定理 9, 即得 (18) 式.

由文献 [3; §15.3 定理 2] 知, $(\varphi_k(\lambda))$ 满足方程组 (19) 式. 此方程组, 除了平凡解外, 非平凡解只有一个线性独立解, 但可能无界. 改写方程组 (19) 式为

$$(Qg - \lambda V g)_k = 0, \qquad k \geqslant 0.$$

应用文献 [10; 定理 1.1], 此时, 该定理的 $f \equiv 0$, $c = -\lambda V$, 得到

$$g_k = g_0\Big(1 + \lambda \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=0}^{j} \frac{\widetilde{F}_j^{(i)} V(i)}{q_{i,i+1}}\Big), \qquad k \geqslant 0.$$

因此, 方程组 (19) 式的解有界, 当且仅当 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\sum\limits_{i=0}^{j}(\widetilde{F}_j^{(i)}V(i)/q_{i,i+1})<\infty$.

记 $\widetilde{m}_j=\sum\limits_{i=0}^{j}(\widetilde{F}_j^{(i)}V(i)/q_{i,i+1})$ $(j\geqslant 0)$. 由文献 [10; 推论 2.3] 得到

$$\widetilde{m}_j=\frac{1}{q_{j,j+1}}\Big(V(j)+\sum_{i=0}^{j-1}\widetilde{q}_j^{(i)}\widetilde{m}_i\Big),\qquad j\geqslant 0.$$

假设 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\widetilde{m}_j=\infty$. 若 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\overline{m}_j^{(1)}<\infty$, 则存在充分大的 N 使得对所有 $k\geqslant N$, 有

$$\widetilde{M}_k:=\sum_{j=0}^{k}\widetilde{m}_j>1,\qquad K:=(1+\lambda)\sum_{j=N+1}^{\infty}\overline{m}_j^{(1)}<1.$$

下面证明, 对所有 $k>N$, 有

$$\widetilde{m}_j\leqslant(1+\lambda)\overline{m}_j^{(1)}\widetilde{M}_{k-1},\qquad 0\leqslant j\leqslant k.$$

因为 $\widetilde{m}_0=V(0)/q_{01}=\overline{m}_0^{(1)}$ 和 $\widetilde{M}_{k-1}>1$, 所以上式在 $j=0$ 时成立. 假定直至 $j=\ell-1<k$ 该式都成立. 则

$$\begin{aligned}\widetilde{m}_\ell&=\frac{1}{q_{\ell,\ell+1}}\Big(V(\ell)+\sum_{i=0}^{\ell-1}q_\ell^{(i)}\widetilde{m}_i+\lambda V(\ell)\sum_{i=0}^{\ell-1}\widetilde{m}_i\Big)\\&\leqslant\frac{1}{q_{\ell,\ell+1}}\Big[V(\ell)+\sum_{i=0}^{\ell-1}q_\ell^{(i)}(1+\lambda)\overline{m}_i^{(1)}\widetilde{M}_{k-1}+\lambda V(\ell)\widetilde{M}_{\ell-1}\Big]\\&\leqslant\frac{1}{q_{\ell,\ell+1}}\Big(V(\ell)+\sum_{i=0}^{\ell-1}q_\ell^{(i)}\overline{m}_i^{(1)}\Big)(1+\lambda)\widetilde{M}_{k-1}\\&=(1+\lambda)\overline{m}_\ell^{(1)}\widetilde{M}_{k-1}.\end{aligned}$$

故该式对 $j=\ell$ 成立. 由归纳法知, 对所有 $0\leqslant j\leqslant k$, 该式成立. 对每个 $k>N$, 有

$$\widetilde{M}_k=\widetilde{M}_N+\sum_{j=N+1}^{k}\widetilde{m}_j\leqslant\widetilde{M}_N+\sum_{j=N+1}^{k}(1+\lambda)\overline{m}_j^{(1)}\widetilde{M}_{k-1}\leqslant\widetilde{M}_N+K\widetilde{M}_{k-1}.$$

进而

$$\widetilde{M}_k\leqslant\widetilde{M}_N(1+K+\cdots+K^{k-N-1})+K^{k-N}\widetilde{M}_N=\frac{\widetilde{M}_N(1-K^{k-N})}{1-K}+K^{k-N}\widetilde{M}_N.$$

因此, 当 $k\to\infty$, 得到 $\infty\leqslant\widetilde{M}_N/(1-K)$, 矛盾. 因此, 当 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\widetilde{m}_j=\infty$ 时, 必有 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\overline{m}_j^{(1)}=\infty$.

注意到 $\overline{m}_j^{(1)}\leqslant\widetilde{m}_j$ $(j\geqslant 0)$. 事实上, $\overline{m}_0^{(1)}=\widetilde{m}_0$, 若直至 $j=\ell-1$ 都有该不等式成立. 则

$$\overline{m}_\ell^{(1)}=\frac{1}{q_{\ell,\ell+1}}\Big(V(\ell)+\sum_{i=0}^{\ell-1}q_\ell^{(i)}\overline{m}_i^{(1)}\Big)\leqslant\frac{1}{q_{\ell,\ell+1}}\Big(V(\ell)+\sum_{i=0}^{\ell-1}\widetilde{q}_\ell^{(i)}\widetilde{m}_i\Big)=\widetilde{m}_\ell.$$

故该不等式对 $j=\ell$ 成立. 由归纳法知, 对所有 $j\geqslant 0$, 该不等式成立. 因此, 反之, 若 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\overline{m}_j^{(1)}=\infty$, 则必有 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\widetilde{m}_j=\infty$.

由以上讨论知, $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\widetilde{m}_j=\infty$, 当且仅当 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\overline{m}_j^{(1)}=\infty$. 进而方程组 (19) 式的解有界, 当且仅当 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\overline{m}_j^{(1)}<\infty$.

若 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\overline{m}_j^{(1)}=\infty$, 方程组 (19) 式的非平凡解无界, 而 $(\varphi_k(\lambda))$ 是有界解, 故为平凡解即 $\varphi_k(\lambda)\equiv 0$ $(k\geqslant 0,\ \lambda>0)$, 进而 $\mathsf{P}_k(\xi=\infty)=1$. 反之, 若 $\mathsf{P}_k(\xi=\infty)=1$, 显然有 $\mathsf{E}_k\xi=\sum\limits_{i=k}^{\infty}\overline{m}_i^{(1)}=\infty$. 结论 (i) 得证.

若 $\mathsf{P}_k(\xi<\infty)=1$, 则必有 $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\overline{m}_i^{(1)}<\infty$, 否则 $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\overline{m}_i^{(1)}=\infty$, 由结论 (i) 知, $\mathsf{P}_k(\xi=\infty)$ $=1$, 进而 $\mathsf{P}_k(\xi<\infty)=0$, 矛盾. 反之, 若 $\mathsf{E}_0\xi=\sum\limits_{i=0}^{\infty}\overline{m}_i^{(1)}<\infty$, 显然有 $\mathsf{P}_k(\xi<\infty)=1$. 结论 (ii) 得证.

若 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\overline{m}_j^{(1)}<\infty$, 方程组 (19) 式的非平凡解有界, 则 $(\varphi_k(\lambda))$ 不是平凡解, 否则推出 $\mathsf{P}_k(\xi=\infty)=1$, 从而 $\mathsf{E}_k\xi=\sum\limits_{i=k}^{\infty}\overline{m}_i^{(1)}=\infty$, 矛盾. 因此, $(\varphi_k(\lambda))$ 是方程组 (19) 式的唯一非平凡解有界解. 定理结论得证. □

推论 14 对一切非负整数 k, 或者 $\mathsf{P}_k(\eta=\infty)=1$, 或者 $\mathsf{P}_k(\eta<\infty)=1$, 分别取决于 $R\,(=\mathsf{E}_0\eta)=\infty$ 或者 $R<\infty$. 此时单生过程唯一当且仅当 $R=\infty$.

证明: 取 $V\equiv 1$, 则定理 13 中的 ξ 和 $\mathsf{E}_0\xi$ 分别为 η 和 $\mathsf{E}_0\eta=R$, 因此由定理 13 得证前一结论. 由此及文献 [3; §13.3 定理 4(ii)] 即得后一结论. □

推论 15 ξ 的分布函数 $F_k(x)=\mathsf{P}_k(\xi\leqslant x)$ 由 ξ 的矩 $\mathsf{E}_k\xi^\ell$ $(\ell\geqslant 0)$ 所唯一决定.

证明: 若 $\mathsf{E}_k\xi<\infty$ (等价地, $\mathsf{E}_0\xi<\infty$), 由前一定理的证明知, 当 $\lambda<1/\mathsf{E}_0\xi$ 时, 有

$$\mathsf{E}_k\mathrm{e}^{\lambda\xi}=\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{\lambda^\ell}{\ell!}\mathsf{E}_k\xi^\ell\leqslant\sum_{\ell=0}^{\infty}(\lambda\mathsf{E}_0\xi)^\ell<\infty,$$

故由矩问题中一熟知定理 (参看文献 [14; §15.4 第 170 页]) 知, 所述结论正确. 若 $\mathsf{E}_k\xi=\infty$, 定理 13 (i) 知, $\mathsf{P}_k(\xi=\infty)=1$, 因而, $F_k(x)\equiv 0$ $(-\infty<x<\infty)$. 结论得证. □

上面的唯一性判别准则, 概率方法的证明由文献 [4] 得到, 分析方法的证明见文献 [7]. 定理 11、定理 12 和定理 13 的内容, 参见文献 [4], 我们这里的证明与之有差别, 主要运用文献 [10] 的方法.

我们已对 ξ_n 和 ξ 的分布和各阶矩研究清楚, 所用方法是解差分方程组 (7) 式和 (19) 式, 但在实际应用中, 为计算方便, 需要考虑下面的另一方法: 递推法. 参见文献 [8]. 先介绍两个引理.

引理 16 $\varphi_{kn}(\lambda)=\prod_{i=k}^{n-1}h_i(\lambda)$, $k<n$, 其中

$$h_0(\lambda)=\frac{q_{01}}{\lambda V(0)+q_0},\qquad h_k(\lambda)=q_{k,k+1}\Big/\Big(\lambda V(k)+q_k-\sum_{j=0}^{k-1}q_{kj}\prod_{i=j}^{k-1}h_i(\lambda)\Big),\qquad k\geqslant 1.$$

引理 17 $\varphi_{kn}(\lambda)=[L_k(\lambda)/L_n(\lambda)]\prod_{i=k}^{n-1}q_{i,i+1}$, $k<n$, 其中 $(L_k(\lambda),\ k\geqslant 0)$ 的定义见 (8) 式.

显然, $L_n(\lambda)$ 最高次项 n 次项的系数为 $\prod_{i=0}^{n-1}V(i)$, 常数项为 $L_n(0)=\prod_{i=0}^{n-1}q_{i,i+1}$. 有时考虑下列多项式更方便:

$$\mathscr{L}_n(\lambda)=\frac{L_n(\lambda)}{L_n(0)}=\frac{1}{\varphi_{0n}(\lambda)}.$$

$\mathscr{L}_n(\lambda)$ 最高次项 n 次项的系数为 $\prod_{i=0}^{n-1}(V(i)/q_{i,i+1})$, 常数项为 1. 由引理 8 知, $L_n(\lambda)$ 没有非负根, 与 $\mathscr{L}_n(\lambda)$ 同根, 因此 $\mathscr{L}_n(\lambda)$ 也没有非负根. 假定

$$\mathscr{L}_n(\lambda)=c_{n0}+c_{n1}\lambda+\cdots+c_{nn}\lambda^n.$$

则 $c_{n0}=1$, $c_{nn}=\prod_{i=0}^{n-1}(V(i)/q_{i,i+1})$. 另外, 还有下面的结论.

推论 18 $c_{nm}=\sum_{\ell=0}^{m-1}(-1)^{m-\ell-1}[\mathsf{E}_0\xi_n^{m-\ell}/(m-\ell)!]c_{n\ell}$, $1\leqslant m\leqslant n$; $c_{nm}=(-1)^{[n/2]}D_m$, $1\leqslant m\leqslant n$, 其中 D_m 是以 $(\mathsf{E}_0\xi_n,\mathsf{E}_0\xi_n^2/2!,\cdots,\mathsf{E}_0\xi_n^n/n!)^{\mathsf{T}}$ 代替下列 n 阶行列式的第 m 列得到的行列式:

$$D:=\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0\\ \mathsf{E}_0\xi_n&-1&0&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \mathsf{E}_0\xi_n^{n-1}/(n-1)!&-\mathsf{E}_0\xi_n^{n-2}/(n-2)!&\mathsf{E}_0\xi_n^{n-3}/(n-3)!&\cdots&(-1)^{n-1}\end{vmatrix}.$$

注意, 此时, $(\mathscr{L}_k(\lambda),\ k\geqslant 0)$ 满足 (参看 (11) 式): $\mathscr{L}_0(\lambda)\equiv 1$,

$$\mathscr{L}_k(\lambda)=\frac{\lambda V(k-1)+q_{k-1}}{q_{k-1,k}}\mathscr{L}_{k-1}(\lambda)-\frac{1}{q_{k-1,k}}\sum_{j=0}^{k-2}q_{k-1,j}\mathscr{L}_j(\lambda),\qquad k\geqslant 1.$$

由此及文献 [10; 推论 2.3] 可以得到下面结论.

命题 19 $\mathscr{L}_{k+1}(\lambda)-\mathscr{L}_k(\lambda)=\lambda\sum_{j=0}^{k}(F_k^{(j)}V(j)\mathscr{L}_j(\lambda)/q_{j,j+1})$, $k\geqslant 0$. $\mathscr{L}_{k+1}(\lambda)-\mathscr{L}_k(\lambda)$ $=\lambda\sum_{j=0}^{k}(\widetilde{F}_k^{(j)}V(j)/q_{j,j+1})$, $k\geqslant 0$.

比较同次幂的系数, 还可以得到:

命题 20 约定 $c_{\ell-1,\ell}=0$. 则不同阶的多项式 $\mathscr{L}_n(\lambda)$ 同次项系数满足:

$$c_{k+1,\ell}-c_{k\ell}=\sum_{j=\ell-1}^{k}\frac{F_k^{(j)}V(j)c_{j,\ell-1}}{q_{j,j+1}},\qquad k\geqslant \ell-1\geqslant 0.$$

文献 [15] 统一处理了单生过程的向上和向下积分型泛函, 得到其高阶矩和分布 Laplace 的显式表达, 为节省篇幅, 我们不再详细介绍.

§4. 停留时的分布

这节我们考虑三种情形下的停留时间.

第一种情形: 固定 $k\geqslant 0$, 取 $V(k)=1$, $V(i)=0$ $(i\neq k)$. 此时 ξ_n 是首达状态 n 以前在状态 k 的总停留时间, ξ 是在第一个飞跃时以前在状态 k 的总停留时间 (若 $\eta=\infty$, 则 ξ 是在状态 k 的总停留时间), 分别记为 $\xi_n^{(k)}$ 和 $\xi^{(k)}$. 关于其分布有如下结果 (参见文献 [8; 定理 1.1]).

定理 21 对 $0\leqslant i\leqslant k<n$, 有

$$\mathsf{P}_i(\xi_n^{(k)}\leqslant x)=\begin{cases}1-\exp\Big(-\dfrac{q_{k,k+1}}{Z_{k,n}}x\Big), & x\geqslant 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

当 $Z_0<\infty$ 时, 对 $0\leqslant i\leqslant k$, 有

$$\mathsf{P}_i(\xi^{(k)}\leqslant x)=\begin{cases}1-\exp\Big(-\dfrac{q_{k,k+1}}{Z_k}x\Big), & x\geqslant 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

第二种情形: 设 $V(0)=V(1)=1$, $V(k)=0$ $(k>1)$. 则有

$$\mathscr{L}_k(\lambda)=\Big(\frac{1}{q_{01}q_{12}}\sum_{i=1}^{k-1}F_i^{(1)}\Big)\lambda^2+\Big(\frac{1}{q_{01}}\sum_{i=0}^{k-1}F_i^{(0)}+\frac{1}{q_{01}q_{12}}\sum_{i=1}^{k-1}F_i^{(1)}\Big)\lambda+1,\qquad k\geqslant 0. \tag{20}$$

事实上, 由 $\mathscr{L}_0(\lambda)=1$, $\mathscr{L}_1(\lambda)=\lambda/q_{01}+1$ 知, 上式对 $k=0,1$ 成立. 假设直至 $k-1$ 时 (20) 式均成立. 则

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_k(\lambda)&=\frac{1}{q_{01}q_{12}q_{k-1,k}}\Big(q_{k-1}\sum_{i=1}^{k-2}F_i^{(1)}-\sum_{j=0}^{k-2}q_{k-1,j}\sum_{i=1}^{j-1}F_i^{(1)}\Big)(\lambda^2+\lambda)\\&\quad+\frac{1}{q_{01}q_{k-1,k}}\Big(q_{k-1}\sum_{i=0}^{k-2}F_i^{(0)}-\sum_{j=0}^{k-2}q_{k-1,j}\sum_{i=0}^{j-1}F_i^{(0)}\Big)\lambda+1\\&=\frac{1}{q_{01}q_{12}q_{k-1,k}}\Big[q_{k-1}\sum_{i=1}^{k-2}F_i^{(1)}-\sum_{i=1}^{k-3}\big(q_{k-1}^{(k-2)}-q_{k-1}^{(i)}\big)F_i^{(1)}\Big](\lambda^2+\lambda)\\&\quad+\frac{1}{q_{01}q_{k-1,k}}\Big[q_{k-1}\sum_{i=0}^{k-2}F_i^{(0)}-\sum_{i=0}^{k-3}\big(q_{k-1}^{(k-2)}-q_{k-1}^{(i)}\big)F_i^{(0)}\Big]\lambda+1\end{aligned}$$

$$= \Big(\frac{1}{q_{01}q_{12}}\sum_{i=1}^{k-1}F_i^{(1)}\Big)(\lambda^2+\lambda)+\Big(\frac{1}{q_{01}}\sum_{i=0}^{k-1}F_i^{(0)}\Big)\lambda+1.$$

所以 (20) 式对 k 亦成立. 由数学归纳法得证 (20) 式总成立. 注意此时 ξ_n 是首达状态 n 以前停留在状态 0 和 1 的总时间. 由 $\mathsf{E}_0\mathrm{e}^{-\lambda\xi_n}=\varphi_{0n}(\lambda)=1/\mathscr{L}_n(\lambda)$ 及 (20) 式得

$$\mathsf{E}_0\xi_n=-\varphi'_{0n}(0)=\frac{1}{q_{01}}\sum_{i=0}^{k-1}F_i^{(0)}+\frac{1}{q_{01}q_{12}}\sum_{i=1}^{k-1}F_i^{(1)},$$

$$\mathscr{L}_n\Big(\frac{\lambda}{\mathsf{E}_0\xi_n}\Big)=\Big[\Big(q_{01}q_{12}\sum_{i=1}^{n-1}F_i^{(1)}\Big)\Big/\Big(q_{12}\sum_{i=0}^{n-1}F_i^{(0)}+\sum_{i=1}^{n-1}F_i^{(1)}\Big)^2\Big]\lambda^2+\lambda+1.$$

显然, $\mathscr{L}_n(\lambda/\mathsf{E}_0\xi_n)$ 只有负零点. 当 $4q_{01}q_{12}\sum\limits_{i=1}^{n-1}F_i^{(1)}\neq\big(q_{12}\sum\limits_{i=0}^{n-1}F_i^{(0)}+\sum\limits_{i=1}^{n-1}F_i^{(1)}\big)^2$ 时, $\mathscr{L}_n(\lambda/\mathsf{E}_0\xi_n)$ 有两个不相等的负零点, 记为 $-1/\beta_1,-1/\beta_2$ $(\beta_2>\beta_1>0)$, 则

$$\mathsf{E}_0\mathrm{e}^{-\lambda\xi_n/\mathsf{E}_0\xi_n}=\varphi_{0n}\Big(\frac{\lambda}{\mathsf{E}_0\xi_n}\Big)=\frac{1}{\mathscr{L}_n(\lambda/\mathsf{E}_0\xi_n)}=\frac{1}{(\beta_1\lambda+1)(\beta_2\lambda+1)}.$$

因此, $\xi_n/\mathsf{E}_0\xi_n$ 服从双指数分布:

$$\mathsf{P}_0\Big(\frac{\xi_n}{\mathsf{E}_0\xi_n}\leqslant x\Big)=\int_0^x\frac{\mathrm{e}^{-t/\beta_1}-\mathrm{e}^{-t/\beta_2}}{\beta_1-\beta_2}\mathrm{d}t.$$

当 $4q_{01}q_{12}\sum\limits_{i=1}^{n-1}F_i^{(1)}=\big(q_{12}\sum\limits_{i=0}^{n-1}F_i^{(0)}+\sum\limits_{i=1}^{n-1}F_i^{(1)}\big)^2$ 时, $\mathscr{L}_n(\lambda/\mathsf{E}_0\xi_n)$ 有两个相等的负零点 -2, 故 $\mathsf{E}_0\mathrm{e}^{-\lambda\xi_n/\mathsf{E}_0\xi_n}=1/(\lambda/2+1)^2$. 因此, $\xi_n/\mathsf{E}_0\xi_n$ 服从参数为 2 和 2 的 Γ 分布 $\Gamma(2,2)$.

考虑 $n\to\infty$ 的极限分布. 当 $\sum\limits_{i=0}^{\infty}F_i^{(0)}=\infty$ 时, $\mathscr{L}_n(\lambda/\mathsf{E}_0\xi_n)\to\lambda+1$, $\mathsf{E}_0\mathrm{e}^{-\lambda\xi_n/\mathsf{E}_0\xi_n}\to 1/(\lambda+1)$ 当 $n\to\infty$ 时. 因此,

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}_0\Big(\frac{\xi_n}{\mathsf{E}_0\xi_n}\leqslant x\Big)=1-\mathrm{e}^{-x},\qquad x\geqslant 0,$$

即当过程常返时, $\xi_n/\mathsf{E}_0\xi_n$ 有参数为 1 的渐近指数分布.

当 $Z_0=\sum\limits_{i=0}^{\infty}F_i^{(0)}<\infty$ 时, $Z_1=\sum\limits_{i=1}^{\infty}F_i^{(1)}<\infty$. 当 $4q_{01}q_{12}Z_1\neq(q_{12}Z_0+Z_1)^2$ 时, $\xi_n/\mathsf{E}_0\xi_n$ 有渐近双指数分布, 即

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}_0\Big(\frac{\xi_n}{\mathsf{E}_0\xi_n}\leqslant x\Big)=\int_0^x\frac{\mathrm{e}^{-t/\alpha_1}-\mathrm{e}^{-t/\alpha_2}}{\alpha_1-\alpha_2}\mathrm{d}t,$$

其中 $-1/\alpha_1,-1/\alpha_2$ $(\alpha_2>\alpha_1>0)$ 是二次多项式 $[q_{01}q_{12}Z_1/(q_{12}Z_0+Z_1)^2]\lambda^2+\lambda+1$ 的两个负零点. 当 $4q_{01}q_{12}Z_1=(q_{12}Z_0+Z_1)^2$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}\mathsf{E}_0\mathrm{e}^{-\lambda\xi^{(n)}/\mathsf{E}_0\xi^{(n)}}=1/(\lambda/2+1)^2$, 故 $\xi_n/\mathsf{E}_0\xi_n$ 有参数为 2 和 2 的渐近 Γ 分布 $\Gamma(2,2)$, 即

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}_0\Big(\frac{\xi_n}{\mathsf{E}_0\xi_n}\leqslant x\Big)=\int_0^x 4t\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t.$$

第三种情形: 设 $V(i)=1\ (0\leqslant i<n)$; $V(i)=0\ (i\geqslant n)$. 此时 $\xi_{n+k}=\int_0^{\tau_{n+k}}V(X(t))\mathrm{d}t$ 是在首达状态 $n+k$ 之前, 在 $\{0,1,\cdots,n-1\}$ 中总共逗留的时间. 显然, 以 P_k 概率 1 有 $\xi_n=\tau_n\ (0\leqslant k\leqslant n)$.

固定 $0\leqslant i<n$. 定义

$$F_j^{(i)}(n)=\frac{1}{q_{j,j+1}}\Big(q_j^{(i)}+\sum_{\ell=n}^{j-1}q_j^{(\ell)}F_\ell^{(i)}(n)\Big),\qquad j\geqslant n.$$

由文献 [10; 推论 2.3] 知, 等价地, 有

$$F_j^{(i)}(n)=\sum_{\ell=n}^{j}\frac{F_j^{(\ell)}q_\ell^{(i)}}{q_{\ell,\ell+1}},\qquad j\geqslant n;$$

此时, $F_j^{(i)}(n)\leqslant F_j^{(n-1)}(n)=F_j^{(n-1)}\ (j\geqslant n)$. 再定义

$$Z_{n,m}(i)=\sum_{j=n}^{m-1}F_j^{(i)}(n),\qquad m\geqslant n;\qquad Z_n(i)=\lim_{m\to\infty}Z_{n,m}(i)=\sum_{j=n}^{\infty}F_j^{(i)}(n).$$

则有

$$Z_{n,m}(i)\leqslant Z_{n,m}(n-1)=\sum_{j=n}^{m-1}F_j^{(n-1)}=Z_{n-1,m}-1,$$
$$Z_n(i)\leqslant Z_n(n-1)=\sum_{j=n}^{\infty}F_j^{(n-1)}=Z_{n-1}-1.$$

定义

$$c_{nj}(k)=c_{nj}+\sum_{i=j-1}^{n-1}Z_{n,n+k}(i)(c_{i+1,j}-c_{ij}),\qquad 1\leqslant j\leqslant n$$

和

$$c_{nj}(\infty)=\lim_{k\to\infty}c_{nj}(k)=c_{nj}+\sum_{i=j-1}^{n-1}Z_n(i)(c_{i+1,j}-c_{ij}),\qquad 1\leqslant j\leqslant n.$$

下面结果参见文献 [8; 定理 1.2].

定理 22 对于 $0\leqslant i<n$, 以下结论成立:

(i) 当 $Z_0=\infty$ 时, 则

$$\lim_{k\to\infty}\mathsf{P}_i\Big(\frac{\xi_{n+k}}{\mathsf{E}_i\xi_{n+k}}\leqslant t\Big)=1-\mathrm{e}^{-t},$$

其中 $\mathsf{E}_i\xi_{n+k}=\sum_{\ell=0}^{n-1}\sum_{j=i\vee\ell}^{n+k-1}(F_j^{(\ell)}/q_{\ell,\ell+1})$;

(ii) 当 $Z_0<\infty$ 时, 若多项式 $\mathscr{L}(\lambda)=1+\sum_{j=1}^{n}c_{nj}(\infty)\lambda^j$ 有 n 个相异的负根 $-\lambda_j^{(n)}$, $j=1,2,\cdots,n$, 则

$$\lim_{k\to\infty}\mathsf{P}_i\Big(\frac{\xi_{n+k}}{\mathsf{E}_i\xi_{n+k}}\leqslant x\Big)=\int_0^x\sum_{j=1}^{n}\frac{B_{in}\mathscr{L}_i(-\lambda_j^{(n)})}{Q'_{in}(-b_{in}\lambda_j^{(n)})}\mathrm{e}^{-b_{in}\lambda_j^{(n)}t}\mathrm{d}t,$$

其中 $b_{in}=c_{n1}(\infty)-c_{i1}$, $B_{in}=b_{in}^n/(c_{nn}Z_{n-1})$, $Q_{in}(\lambda)=B_{in}\mathscr{L}(\lambda/b_{in})$.

§5. 首达时的分布

我们先看一个例子. 设 $V(0)=V(1)=1$, $V(k)=0\ (k>1)$. 则 $\mathscr{L}_0(\lambda)\equiv 1$, $\mathscr{L}_1(\lambda)=\lambda/q_{01}+1$,

$$\mathscr{L}_2(\lambda)=\frac{\lambda+q_1}{q_{12}}\mathscr{L}_1(\lambda)-\frac{1}{q_{12}}q_{10}\mathscr{L}_0(\lambda)=\frac{1}{q_{01}q_{12}}[\lambda^2+(q_{01}+q_1)\lambda+q_{01}q_{12}].$$

因为 $\mathscr{L}_2(\lambda)$ 是连续函数且 $\mathscr{L}_2(0)=1>0$, $\mathscr{L}(-\infty)>0$, $\mathscr{L}_2(-q_{01})=-q_1/q_{12}+1\leqslant 0$, 所以当 $q_{10}>0$ 时, $\mathscr{L}_2(-q_{01})<0$, 进而 $\mathscr{L}_2(\lambda)$ 有两个不相等的负零点, 记为 $-1/\alpha_1,-1/\alpha_2$ $(\alpha_2>\alpha_1>0)$, 即

$$\mathscr{L}_2(\lambda)=(\alpha_1\lambda+1)(\alpha_2\lambda+1).$$

故

$$\mathsf{E}_0\exp\Big(-\lambda\int_0^{\tau_2}V(X(t))\mathrm{d}t\Big)=\mathsf{E}_0\mathrm{e}^{-\lambda\tau_2}=\frac{1}{(\alpha_1\lambda+1)(\alpha_2\lambda+1)},$$

取反 Laplace 变换, 可得自状态 0 出发, 首达状态 2 的时刻 τ_2 服从双指数分布:

$$\mathsf{P}_0(\tau_2\leqslant x)=\int_0^x\frac{\mathrm{e}^{-t/\alpha_1}-\mathrm{e}^{-t/\alpha_2}}{\alpha_1-\alpha_2}\mathrm{d}t.$$

当 $q_{10}=0$ 时, $\mathscr{L}_2(-q_{01})=0$, 如果 $q_{01}\neq q_{12}$, 则 $\mathscr{L}_2(\lambda)$ 依然有两个不相等的负零点: $-q_{01}$, $-q_{12}$, 此时自状态 0 出发, 首达状态 2 的时刻 τ_2 服从双指数分布:

$$\mathsf{P}_0(\tau_2\leqslant x)=\int_0^x\frac{\mathrm{e}^{-q_{01}t}-\mathrm{e}^{-q_{12}t}}{1/q_{01}-1/q_{12}}\mathrm{d}t.$$

当 $q_{10}=0$ 且 $q_{01}=q_{12}$ 时, $\mathscr{L}_2(-q_{01})=0$, $\mathscr{L}_2(\lambda)$ 有两个相等的负零点: $-q_{01}$, 故 $\mathsf{E}_0\mathrm{e}^{-\lambda\tau_2}=1/(\lambda/q_{01}+1)^2$. 取反 Laplace 变换, 可得自状态 0 出发, 首达状态 2 的时刻 τ_2 服从参数为 q_{01} 和 2 的 Γ 分布 $\Gamma(q_{01},2)$:

$$\mathsf{P}_0(\tau_2\leqslant x)=\int_0^x q_{01}^2t\mathrm{e}^{-q_{01}t}\mathrm{d}t.$$

再研究 $V(i)\equiv 1$ 的特殊情形, 此时, $\xi_n=\tau_n$, 即为首达状态 n 的时刻, (8) 式化为

$$L_0(\lambda)\equiv 1,\qquad L_k(\lambda)=(\lambda+q_{k-1})L_{k-1}(\lambda)-\sum_{i=0}^{k-2}q_{k-1,i}\prod_{j=i}^{k-2}q_{j,j+1}L_i(\lambda),\qquad k\geqslant 1.\quad(21)$$

多项式 $L_n(\lambda)$ 有如下性质.

命题 23 (i) $L_n(\lambda)$ 的最高次项 n 次项系数为 1, 常数项为 $\prod\limits_{i=0}^{n-1}q_{i,i+1}$;

(ii) $L_n(\lambda)$ 的 $n-1$ 次项系数为 $\sum\limits_{i=0}^{n-1}q_i$ $\big($进而 $L_n(\lambda)=0$ 的诸根之和为 $-\sum\limits_{i=0}^{n-1}q_i\big)$;

(iii) $L_n(\lambda)$ 的一次项系数为 $\prod\limits_{i=0}^{n-1}q_{i,i+1}\mathsf{E}_0\tau_n$;

(iv) $L_n(\lambda)=0$ 没有非负根; 记 $L_n(\lambda)=\prod\limits_{i=1}^{n}(\lambda-\lambda_i^{(n)})$. 则 $0>\lambda_1^{(2)}>\lambda_1^{(1)}>\lambda_2^{(2)}$.

证明: 记 $L_n(\lambda) = d_{n0} + d_{n1}\lambda + \cdots + d_{nn}\lambda^n$. 由上一节知, $d_{nn} = 1$, $d_{n0} = L_n(0) = \prod_{i=0}^{n-1} q_{i,i+1}$, 结论 (i) 成立.

而由 (21) 式得到 $d_{n,n-1} = q_{n-1} + d_{n-1,n-2} = \cdots = q_{n-1} + q_{n-2} + \cdots + q_1 + d_{10} = \sum_{i=0}^{n-1} q_i$. 结论 (ii) 得证.

一方面, 由引理 17 知

$$\varphi_{0n}(\lambda) = \frac{1}{L_n(\lambda)} \prod_{i=0}^{n-1} q_{i,i+1}.$$

另一方面, $\varphi_{0n}(\lambda) = \mathsf{E}_0 \mathrm{e}^{-\lambda\tau_n}$. 因此, 结合结论 (i), 得到

$$\mathsf{E}_0\tau_n = -\varphi_{0n}'(0) = \frac{L_n'(0)}{L_n^2(0)} \prod_{i=0}^{n-1} q_{i,i+1} = L_n'(0) \Big/ \Big(\prod_{i=0}^{n-1} q_{i,i+1}\Big).$$

进而, $L_n'(0) = \prod_{i=0}^{n-1} q_{i,i+1} \mathsf{E}_0\tau_n$, 即 $d_{n1} = \prod_{i=0}^{n-1} q_{i,i+1} \mathsf{E}_0\tau_n$. 结论 (iii) 得证.

由第二节知, $L_n(\lambda) = 0$ 没有非负根, 故根为负数或复数. 注意 $L_n(0) > 0$. 首先, $L_1(\lambda) = \lambda + q_0$, 只有一个负根 $\lambda_1^{(1)} = -q_0$. 而

$$L_2(\lambda) = (\lambda + q_1)L_1(\lambda) - q_{10}q_{01}L_0(\lambda) = (\lambda + q_1)(\lambda + q_0) - q_{10}q_{01},$$

则 $L_2(0) = q_{01}q_{12} > 0$, $L_2(-q_0) = -q_{10}q_{01} < 0$, $L_2(-\infty) > 0$, 故有 $0 > \lambda_1^{(2)} > \lambda_1^{(1)} = -q_0 > \lambda_2^{(2)}$. 结论 (iv) 得证. □

定理 24 假设 $L_n(\lambda) = 0$ 有 n 个单负根 $\lambda_i^{(n)} = -\mu_i^{(n)}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$. 则自状态 0 出发, 首达状态 n 的时刻 τ_n 有分布密度

$$f_{0n}(t) = \prod_{i=0}^{n-1} q_{i,i+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{L_n'(-\mu_k^{(n)})} \mathrm{e}^{-\mu_k^{(n)} t}, \tag{22}$$

其中

$$L_n'(-\mu_k^{(n)}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} L_n(\lambda)\Big|_{\lambda = -\mu_k^{(n)}} = \prod_{i=1, i\neq k}^{n} \big(\mu_i^{(n)} - \mu_k^{(n)}\big).$$

证明: 由假设知

$$L_n(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \big(\lambda + \mu_i^{(n)}\big).$$

故

$$\varphi_{0n}(\lambda) = \mathsf{E}_0 \mathrm{e}^{-\lambda\tau_n} = \Big(\prod_{i=0}^{n-1} q_{i,i+1}\Big) \Big/ \Big[\prod_{i=1}^{n} \big(\lambda + \mu_i^{(n)}\big)\Big].$$

取反 Laplace 变换即得 (22) 式. 结论证毕. □

对于 $m < n$, 由引理 17 知

$$\mathsf{E}_m \mathrm{e}^{-\lambda\tau_n} = \varphi_{mn}(\lambda) = \prod_{i=m}^{n-1} q_{i,i+1} \frac{L_m(\lambda)}{L_n(\lambda)}.$$

故类似得到下面的结论.

定理 25 假设 $L_n(\lambda)=0$ 有 n 个单负根 $\lambda_i^{(n)}=-\mu_i^{(n)}$ $(i=1,2,\cdots,n)$. 对于 $m<n$, 则自状态 m 出发, 首达状态 n 的时刻 τ_n 有分布密度

$$f_{mn}(t)=\prod_{i=m}^{n-1}q_{i,i+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{L_m(-\mu_k^{(n)})}{L_n'(-\mu_k^{(n)})}\mathrm{e}^{-\mu_k^{(n)}t}.$$

现在来研究当 $n\to\infty$ 时 τ_n 的渐近分布. 为此, 考虑多项式 $\mathscr{L}_n(\lambda)=L_n(\lambda)/\big(\prod\limits_{i=0}^{n-1}q_{i,i+1}\big)$. 记

$$\mathscr{L}_n(\lambda)=c_{n0}+c_{n1}\lambda+c_{n2}\lambda^2+\cdots+c_{nn}\lambda^n.$$

由命题 23 知, $c_{n0}=1$, $c_{n1}=\mathsf{E}_0\tau_n$, $c_{n,n-1}=\big(\sum\limits_{i=0}^{n-1}q_i\big)/\big(\prod\limits_{i=0}^{n-1}q_{i,i+1}\big)$, $c_{nn}=1/\big(\prod\limits_{i=0}^{n-1}q_{i,i+1}\big)$. 由命题 19 知,

$$\mathscr{L}_{n+1}(\lambda)-\mathscr{L}_n(\lambda)=\lambda\sum_{j=0}^{n}\frac{F_n^{(j)}\mathscr{L}_j(\lambda)}{q_{j,j+1}}.$$

考虑多项式 $\mathscr{L}_n(\lambda)$ 的系数.

引理 26 诸系数 $c_{n\ell}$ 间有下列关系:

(i) $c_{k0}=1$, 且 $c_{n+1,\ell}-c_{n\ell}=\sum\limits_{j=\ell-1}^{n}(F_n^{(j)}c_{j,\ell-1}/q_{j,j+1})$, $n\geqslant\ell-1\geqslant0$;

(ii) 一切 $c_{n\ell}>0$ $(n\geqslant\ell\geqslant0)$ 且 $c_{n+1,\ell}>c_{n\ell}$ $(n\geqslant\ell\geqslant1)$;

(iii) $c_{n\ell}<c_{n,\ell-1}c_{n1}$ $(n\geqslant\ell\geqslant1)$;

(iv) $c_{n\ell}\leqslant c_{n1}^{\ell}/\ell!$ $(n\geqslant\ell\geqslant1)$.

证明: 由命题 20 知, 结论 (i) 成立.

注意 $c_{n0}=1>0$ $(n\geqslant0)$. 对于 $\ell\geqslant1$, 由结论 (i) 知, $c_{n\ell}\geqslant c_{n-1,\ell}\geqslant\cdots\geqslant c_{\ell\ell}=1/\big(\prod\limits_{j=0}^{\ell-1}q_{j,j+1}\big)>0$, 故 $c_{n\ell}>0$ 对一切 $n\geqslant\ell\geqslant0$ 都成立; 再结合结论 (i) 知,

$$c_{n+1,\ell}-c_{n\ell}\geqslant\frac{c_{n,\ell-1}}{q_{n,n+1}}>0,\qquad n\geqslant\ell\geqslant1,$$

所以, $c_{n+1,\ell}>c_{n\ell}$ $(n\geqslant\ell\geqslant1)$. 故结论 (ii) 成立.

由结论 (i) 和 (ii) 得到

$$\begin{aligned}c_{n+1,\ell}-c_{n\ell}&\leqslant c_{n,\ell-1}\sum_{j=\ell-1}^{n}\frac{F_n^{(j)}}{q_{j,j+1}}=c_{n,\ell-1}\sum_{j=\ell-1}^{n}\frac{F_n^{(j)}c_{j0}}{q_{j,j+1}}\\&\leqslant c_{n,\ell-1}\sum_{j=0}^{n}\frac{F_n^{(j)}c_{j0}}{q_{j,j+1}}=c_{n,\ell-1}(c_{n+1,1}-c_{n1})\\&\leqslant c_{n+1,\ell-1}c_{n+1,1}-c_{n,\ell-1}c_{n1},\qquad n\geqslant\ell-1\geqslant0.\end{aligned}$$

因此, $c_{n\ell}=\sum\limits_{j=\ell-1}^{n-1}(c_{j+1,\ell}-c_{j\ell})\leqslant c_{n,\ell-1}c_{n1}-c_{\ell-1,\ell-1}c_{\ell-1,1}<c_{n,\ell-1}c_{n1}$ $(n\geqslant\ell\geqslant1)$. 得证结论 (iii).

注意

$$a^\ell(b-a)\leqslant\int_a^b x^\ell \mathrm{d}x=\frac{b^{\ell+1}-a^{\ell+1}}{\ell+1}.$$

显然, 当 $\ell=1$ 时结论 (iv) 成立. 假设直至 ℓ 结论 (iv) 都成立. 则由前面的证明和上式得到

$$c_{n+1,\ell+1}-c_{n,\ell+1}\leqslant c_{n\ell}(c_{n+1,1}-c_{n1})\leqslant\frac{c_{n1}^\ell}{\ell!}(c_{n+1,1}-c_{n1})\leqslant\frac{c_{n+1,1}^{\ell+1}-c_{n1}^{\ell+1}}{(\ell+1)!},\qquad n\geqslant\ell\geqslant1.$$

因此

$$c_{n,\ell+1}=\sum_{j=\ell}^{n-1}(c_{j+1,\ell+1}-c_{j,\ell+1})\leqslant\frac{c_{n1}^{\ell+1}-c_{\ell1}^{\ell+1}}{(\ell+1)!}\leqslant\frac{c_{n1}^{\ell+1}}{(\ell+1)!}.$$

故结论 (iv) 对 $\ell+1$ 亦成立. 由数学归纳法知, 结论 (iv) 对一切 $\ell\geqslant1$ 都成立.

至此命题结论证毕. □

注意 $\mathsf{E}_0\tau_n=c_{n1}$. 考虑多项式

$$\mathscr{L}_n\Big(\frac{\lambda}{\mathsf{E}_0\tau_n}\Big)=\mathscr{L}_n\Big(\frac{\lambda}{c_{n1}}\Big)=1+d_{n1}\lambda+d_{n2}\lambda^2+\cdots+d_{nn}\lambda^n. \tag{23}$$

显然, $d_{n1}=1$, $d_{n\ell}=c_{n\ell}/c_{n1}^\ell$ $(n\geqslant\ell\geqslant1)$. 由引理 26, 得到

$$d_{n\ell}\leqslant d_{n,\ell-1},\qquad d_{n\ell}\leqslant\frac{1}{\ell!},\qquad n\geqslant\ell\geqslant1. \tag{24}$$

现在来叙述所得到的渐近分布的结果.

定理 27　为使

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}_0\Big(\frac{\tau_n}{\mathsf{E}_0\tau_n}\leqslant t\Big)=1-\mathrm{e}^{-t}, \tag{25}$$

当且仅当以下三条件之一成立:

(i)

$$\lim_{n\to\infty}d_{n2}=0; \tag{26}$$

(ii)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathsf{E}_0\tau_n^2}{(\mathsf{E}_0\tau_n)^2}=2; \tag{27}$$

(iii)

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{j}\frac{F_j^{(i)}\mathsf{E}_i\tau_n}{q_{i,i+1}}\Big)\Big/\Big(\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{j}\frac{F_j^{(i)}}{q_{i,i+1}}\Big)^2=1, \tag{28}$$

其中

$$\mathsf{E}_i\tau_n=\sum_{j=i}^{n-1}\sum_{k=0}^{j}\frac{F_j^{(k)}}{q_{k,k+1}}.$$

证明: 注意 (25) 式右边分布的 Laplace 变换为 $1/(1+\lambda)$, 而

$$\mathsf{E}_0\mathrm{e}^{-\lambda\tau_n/\mathsf{E}_0\tau_n}=\varphi_{0n}\Big(\frac{\lambda}{\mathsf{E}_0\tau_n}\Big)=\frac{1}{\mathscr{L}_n(\lambda/\mathsf{E}_0\tau_n)}.$$

故 (25) 式等价于: 对任意有限区域中的 λ, 一致地有

$$\lim_{n\to\infty}\mathscr{L}_n\Big(\frac{\lambda}{\mathsf{E}_0\tau_n}\Big)=1+\lambda. \tag{29}$$

因此, 由 (23) 式知, (26) 式的必要性显然. 反之, 设 (26) 式成立. 考虑复平面上任一有限区域 Λ, 记 $R:=\sup\limits_{\lambda\in\Lambda}|\lambda|$. 对于任意 $\varepsilon>0$, 存在充分大的 ℓ_0, 使得 $\sum\limits_{\ell>\ell_0}(R^\ell/\ell!)<\varepsilon/2$; 进而存在充分大的 n_0, 使得当 $n>n_0$ 时, $d_{n2}<\varepsilon/\big(2\sum\limits_{\ell=2}^{\ell_0}R^\ell\big)$; 故结合 (24) 得到, 当 $n>n_0$ 且 $\lambda\in\Lambda$ 时, 有

$$\Big|\mathscr{L}_n\Big(\frac{\lambda}{\mathsf{E}_0\tau_n}\Big)-1-\lambda\Big|\leqslant\sum_{\ell=2}^{\ell_0}d_{n\ell}R^\ell+\sum_{\ell=\ell_0+1}^{n}d_{n\ell}R^\ell\leqslant d_{n2}\sum_{\ell=2}^{\ell_0}R^\ell+\sum_{\ell>\ell_0}\frac{R^\ell}{\ell!}<\varepsilon.$$

这说明对于 $\lambda\in\Lambda$, (29) 式一致地成立. 进而, (25) 式成立.

由于

$$\mathsf{E}_0\mathrm{e}^{-\lambda\tau_n/\mathsf{E}_0\tau_n}=\varphi_{0n}\Big(\frac{\lambda}{\mathsf{E}_0\tau_n}\Big)=\frac{1}{\mathscr{L}_n(\lambda/\mathsf{E}_0\tau_n)}=\frac{1}{1+\lambda+d_{n2}\lambda^2+\cdots+d_{nn}\lambda^n},$$

记 $\widetilde{\varphi}_{0n}(\lambda)=\varphi_{0n}(\lambda/\mathsf{E}_0\tau_n)$, 则

$$\frac{\mathsf{E}_0\tau_n^2}{(\mathsf{E}_0\tau_n)^2}=\mathsf{E}_0\Big(\frac{\tau_n}{\mathsf{E}_0\tau_n}\Big)^2=\widetilde{\varphi}_{0n}''(\lambda)\big|_{\lambda=0}=2-2d_{n2},$$

故 (26) 式与 (27) 式等价. 顺便指出, (25) 式右边指数分布的二阶矩也是 2, 故 (27) 式意味着 $\tau_n/\mathsf{E}_0\tau_n$ 的二阶矩趋于极限分布的二阶矩.

由定理 11 及 (13) 式, 立刻可知 (27) 式与 (28) 式等价. 定理结论证毕. □

下面给出一个简单的充分条件.

定理 28 *若 $R=\infty$, $B:=\sum\limits_{j=1}^{\infty}d_j<\infty$, 则 (25) 式成立.*

证明: 注意当 $n\to\infty$ 时, $c_{n1}=\mathsf{E}_0\tau_n$ 单调增趋于 R. 由引理 26, 得到

$$c_{n2}=\sum_{j=1}^{n-1}(c_{j+1,2}-c_{j2})=\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{j}\frac{F_j^{(k)}c_{k1}}{q_{k,k+1}}\leqslant c_{n-1,1}\sum_{j=1}^{n-1}d_j,$$

故

$$d_{n2}=\frac{c_{n2}}{c_{n1}^2}\leqslant\frac{c_{n-1,1}}{c_{n1}^2}\sum_{j=1}^{n-1}d_j\leqslant\frac{1}{c_{n1}}\sum_{j=1}^{n-1}d_j\to\frac{B}{R}=0,\qquad n\to\infty.$$

因此, (26) 式成立, 进而 (25) 式成立. □

由于 $R=\sum\limits_{j=0}^{\infty}m_j=\sum\limits_{j=0}^{\infty}d_j+q_{01}^{-1}\sum\limits_{j=0}^{\infty}F_j^{(0)}=B+Z_0/q_{01}$, 因此在上面定理的条件下, 必有 $Z_0=\infty$, 即过程常返; 实际上, 此时因为

$$\lim_{n\to\infty}\Big[\Big(\sum_{j=0}^{n}d_j\Big)\Big/\Big(\sum_{j=0}^{n}F_j^{(0)}\Big)\Big]=\frac{B}{Z_0}=0,$$

故 $d<\infty$, 由文献 [7] 知, 过程是遍历的.

记自状态 k 出发, 首达状态 n 的时刻为 τ_{kn}. 此时 $\mathsf{E}\tau_{kn}=\mathsf{E}_k\tau_n$.

推论 29 若 $R=\infty$, $B:=\sum\limits_{j=1}^{\infty}d_j<\infty$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}_k\Big(\frac{\tau_{kn}}{\mathsf{E}\tau_{kn}}\leqslant t\Big)=1-\mathrm{e}^{-t}.$$

证明: 由于 $R=\infty$, $\mathsf{P}_0(\tau_n\to\infty)=1$, 且 $\mathsf{E}_0\tau_n\to R=\infty\ (n\to\infty)$. 则结合定理 28, 得到

$$\begin{aligned}\mathsf{P}_k\Big(\frac{\tau_{kn}}{\mathsf{E}\tau_{kn}}\leqslant t\Big)&=\mathsf{P}_0\Big(\frac{\tau_{kn}}{\mathsf{E}_k\tau_n}\leqslant t\Big)=\mathsf{P}_0\Big(\frac{\tau_{0n}-\tau_{0k}}{\mathsf{E}_0\tau_n-\mathsf{E}_0\tau_k}\leqslant t\Big)\\&=\mathsf{P}_0\Big(\frac{\tau_n-\tau_k}{\mathsf{E}_0\tau_n-\mathsf{E}_0\tau_k}\leqslant t\Big)=\mathsf{P}_0\Big(\frac{\tau_n}{\mathsf{E}_0\tau_n}\cdot\frac{1-\tau_k/\tau_n}{1-\mathsf{E}_0\tau_k/\mathsf{E}_0\tau_n}\leqslant t\Big)\\&\to 1-\mathrm{e}^{-t}.\end{aligned}$$

结论证毕. □

§6. 末离时的分布

这节考虑末离时的分布. 内容完全取自文献 [4; § 3], 因此只介绍结果, 省略证明.

假设 A 是 $\mathbb{Z}_+$ 的非空子集, 其末离时定义为

$$\varsigma_A=\sup\{t>0: X(t)\in A\}.$$

简记 $\varsigma_{\{i\}}$ 为 ς_i. 当 $Z_0=\infty$ 时, 过程是常返的, 则 $\mathsf{P}_k(\varsigma_n=\infty)=1\ (k,n\geqslant 0)$, 故只需考虑 $Z_0<\infty$ 且 $R=\infty$ 即过程唯一但非常返的情形, 此时 $\mathsf{P}_k(\eta=\infty)=1$, $\mathsf{P}_k(\varsigma_n<\infty)=1\ (k,n\geqslant 0)$. 以下第一个结果参见文献 [4; 定理 3.1].

定理 30 假设 $Z_0<\infty$ 且 $R=\infty$. 则对 $k,n\in\mathbb{Z}_+$,

$$\mathsf{P}_k(\varsigma_n\leqslant 0)=\begin{cases}0, & k\leqslant n;\\ \dfrac{Z_{n,k}}{Z_n}, & k>n.\end{cases}$$

$$\mathsf{P}_k(\varsigma_n\leqslant t)=\sum_{j=n+1}^{\infty}p_{kj}(t)\cdot\frac{Z_{n,j}}{Z_n},\qquad t>0.$$

定义

$$r_n = \max_{0\leqslant t\leqslant \varsigma_n} X(t), \qquad \ell_n = \min_{0\leqslant t\leqslant \varsigma_n} X(t).$$

这里 r_n 是轨道在末离时 ς_n 之前过程能够到达的最大状态, 称为最大游程; ℓ_n 是轨道在末离时 ς_n 之前过程能够到达的最小状态, 称为最小游程. 则有下面两个定理 (参见文献 [4; 定理 3.2, 定理 3.3]).

定理 31 假设 $Z_0 < \infty$ 且 $R = \infty$. 则对 $k, n, r \in \mathbb{Z}_+$,

$$\mathsf{P}_k(r_n \leqslant r) = \begin{cases} 0, & r \leqslant n \vee (k-1); \\ \dfrac{Z_{n,r+1}}{Z_n}, & r > n \vee (k-1). \end{cases}$$

定理 32 假设 $Z_0 < \infty$ 且 $R = \infty$. 则对 $k, n, \ell \in \mathbb{Z}_+$,

$$\mathsf{P}_k(\ell_n \leqslant \ell) = \begin{cases} 1 - \dfrac{Z_{n\wedge\ell,k}}{Z_{n\wedge\ell}}, & \ell < k; \\ 1, & \ell \geqslant k. \end{cases}$$

下面考虑 ℓ_n 和 r_n 的联合分布. 参见文献 [4; 定理 3.4].

定理 33 假设 $Z_0 < \infty$ 且 $R = \infty$. 则对 $k, n, \ell, r \in \mathbb{Z}_+$,

(i) 当 $k \leqslant n$ 时,

$$\mathsf{P}_k(\ell_n \leqslant \ell, r_n \leqslant r) = \begin{cases} 0, & r \leqslant n; \\ \mathsf{P}_k(r_n \leqslant r), & \ell \geqslant k; \\ \Big(1 - \dfrac{Z_{\ell,k}}{Z_{\ell,r+1}}\Big)\dfrac{Z_{n,r+1}}{Z_n}, & \ell < k,\ r > n. \end{cases}$$

(ii) 当 $k > n$ 时,

$$\mathsf{P}_k(\ell_n \leqslant \ell, r_n \leqslant r) = \begin{cases} 0, & r < k; \\ \mathsf{P}_k(r_n \leqslant r), & \ell \geqslant k; \\ 1 - \dfrac{Z_{n,k}}{Z_n}, & n \leqslant \ell < k \leqslant r; \\ \Big(1 - \dfrac{Z_{\ell,k}}{Z_{\ell,r+1}}\Big)\dfrac{Z_{n,r+1}}{Z_n}, & \ell < n < k \leqslant r. \end{cases}$$

如果只存在 $2k$ 个时间点 $0 \leqslant s_1 < t_1 < s_2 < t_2 < \cdots < s_k < t_k \leqslant \varsigma_m$, 使得 $X(s_i) = n$, $X(t_i) = m$, $i = 1, 2, \cdots, k$, 则称轨道在末离时 ς_m 之前从 n 到 m 的次数为 k. 记轨道在末离时 ς_m 之前从 n 到 m 的次数为 ζ. 下面结果参见文献 [4; 定理 3.5].

定理 34 假设 $Z_0<\infty$ 且 $R=\infty$. 对 $m,n\in\mathbb{Z}_+$, $m>n$, 则

(i) 当 $i\leqslant n$ 时,

$$\mathsf{P}_i(\zeta=0)=0,\qquad \mathsf{P}_i(\zeta=k)=\frac{Z_{n,m}}{Z_n}\Big(1-\frac{Z_{n,m}}{Z_n}\Big)^{k-1},\qquad k\geqslant 1;$$

(ii) 当 $i>n$ 时,

$$\mathsf{P}_i(\zeta=0)=\frac{Z_{n,i}}{Z_n},\qquad \mathsf{P}_i(\zeta=k)=\Big(1-\frac{Z_{n,i}}{Z_n}\Big)\frac{Z_{n,m}}{Z_n}\Big(1-\frac{Z_{n,m}}{Z_n}\Big)^{k-1},\qquad k\geqslant 1.$$

如果只存在 $2k-1$ 个时间点 $0\leqslant s_1<t_1<s_2<t_2<\cdots<t_{k-1}<s_k\leqslant\varsigma_n$, 使得 $X(s_i)=n$, $X(t_i)\neq n$, $i=1,2,\cdots,k-1$, $X(s_k)=n$, 则称轨道在末离时 ς_n 之前在 n 逗留的次数为 k. 记轨道在末离时 ς_n 之前在 n 逗留的次数为 $\widetilde{\zeta}$. 下面结果参见文献 [4; 定理 3.6].

定理 35 假设 $Z_0<\infty$ 且 $R=\infty$. 对 $n\in\mathbb{Z}_+$, 则

(i) 当 $i\leqslant n$ 时,

$$\mathsf{P}_i(\widetilde{\zeta}=0)=0,\qquad \mathsf{P}_i(\widetilde{\zeta}=k)=\frac{q_{n,n+1}}{q_nZ_n}\Big(1-\frac{q_{n,n+1}}{q_nZ_n}\Big)^{k-1},\qquad k\geqslant 1;$$

(ii) 当 $i>n$ 时,

$$\mathsf{P}_i(\zeta=0)=\frac{Z_{n,i}}{Z_n},\qquad \mathsf{P}_i(\zeta=k)=\Big(1-\frac{Z_{n,i}}{Z_n}\Big)\frac{q_{n,n+1}}{q_nZ_n}\Big(1-\frac{q_{n,n+1}}{q_nZ_n}\Big)^{k-1},\qquad k\geqslant 1.$$

从定理 34 和定理 35 可以看出, 定理 34 的结论在 $m=n$ 时依然成立, 此时到达的次数即为逗留次数.

致谢 感谢审稿人的宝贵意见和建议.

参 考 文 献

[1] 张余辉. 单生过程的研究进展 [J]. 中国科学: 数学, 2019, **49(3)**: 621–642.

[2] 张余辉. 单死过程的稳定性 [J]. 中国科学: 数学, 2020, **50(1)**: 211–230.

[3] 王梓坤. 随机过程通论 (下卷) [M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2010.

[4] ZHANG J K. On the generalized birth and death processes (I) – the numeral introduction, the functional of integral type and the distributions of runs and passage times [J]. *Acta Math Sci* (*English Ed*), 1984, **4(2)**: 191–209.

[5] LIAO Z W, WANG L D, ZHANG Y H. Probabilistic meanings of numerical characteristics for single birth processes [J]. *Chinese J Appl Probab Statist*, 2016, **32(5)**: 452–462.

[6] 李培森, 张余辉. 最小单生过程平均占位时的显式表示 [J]. 北京师范大学学报 (自然科学版), 2017, **53(3)**: 258–262.

[7] YAN S J, CHEN M F. Multidimensional Q-processes [J]. *Chinese Ann Math Ser B*, 1986, **7(1)**: 90–110.

[8] ZHANG J K. On the generalized birth and death processes (II) – the stay time, limit theorem and ergodic property [J]. *Acta Math Sci* (*English Ed*), 1986, **6(1)**: 1–13.

[9] 张余辉. 单生过程首中时的各阶矩 [J]. 北京师范大学学报 (自然科学版), 2003, **39(4)**: 430–434.

[10] CHEN M F, ZHANG Y H. Unified representation of formulas for single birth processes [J]. *Front Math China*, 2014, **9(4)**: 761–796.

[11] 张余辉. 单生过程击中时与平稳分布 [J]. 北京师范大学学报 (自然科学版), 2004, **40(2)**: 157–161.

[12] MAO Y H. Convergence rates in strong ergodicity for Markov processes [J]. *Stochastic Process Appl*, 2006, **116(12)**: 1964–1976.

[13] 王婧, 张余辉. 单死过程的向下积分型泛函 [J]. 应用概率统计, 2020, **36(4)**: 393–414.

[14] CRAMÉR H (著). 魏宗舒, 郑朴, 吴锦 (译). 统计学数学方法 [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1966.

[15] 王婧, 张余辉. 单生过程积分型泛函的矩和分布 [J]. 北京师范大学学报 (自然科学版), 2020, **56(4)**: 493–499.

Some Basic Theory of Single Birth Processes

WANG Jing[1,2] YAN Yanyan[2] ZHANG Yuhui[2]

([1]*School of Mathematics and Statistics, Yili Normal University, Yili, 835000, China*)

([2]*School of Mathematical Sciences, Beijing Normal University, Laboratory of Mathematics and Complex Systems, Ministry of Education, Beijing, 100875, China*)

Abstract: In this summary report, we introduce some basic theory of single birth processes as the supplement of [1], including the probabilistic meaning of some numerical characteristics, the distributions and moments of the integral-type functional of single birth processes, as well as the distributions of the staying times, the first hitting time and the last exit times etc.

Keywords: single birth process; integral-type functional; first hitting time; staying time; last exit time

2020 Mathematics Subject Classification: 60J60