应用概率统计 第 36 卷
第 4 期 2020 年 8 月

Chinese Journal of Applied Probability and Statistics
Aug., 2020, Vol. 36, No. 4, pp. 393-414
doi: 10.3969/j.issn.1001-4268.2020.04.006

单死过程的向下积分型泛函 *

王 婧[1,2] 张余辉[2*]

([1]伊犁师范大学数学与统计学院, 伊犁, 835000; [2]北京师范大学数学科学学院, 北京, 100875)

摘 要: 本文对有限状态空间上单死过程, 研究其向下积分型泛函的分布之 Laplace 变换和矩以及停留时间的分布. 应用这些结果, 给出可数状态空间上单死过程首中时高阶矩显式表示的一个新证明, 同时, 得到了强遍历收敛速率的上下界估计.

关键词: 单死过程; 积分型泛函; 首中时; 停留时间

中图分类号: O211.62

英文引用格式: WANG J, ZHANG Y H. Integral-type functionals downward of single death processes [J]. Chinese J Appl Probab Statist, 2020, 36(4): 393–414. (in Chinese)

§1. 引 言

在文献 [1] 中王梓坤对生灭过程研究了积分型泛函的分布和矩的计算, 他在文献 [2] 中区分为生灭过程的向上积分型泛函和向下积分型泛函. 文献 [3] 和 [4] 分别对较一般和一般的齐次可列马氏过程研究了此问题, 得到若干中间结果. 文献 [5] 则在此基础上应用非负线性方程组的最小非负解理论完全解决了此问题. 对于特定的随机过程和特定的积分型泛函, 自然是希望能够得到进一步的显式的结果, 如同生灭过程. 文献 [6] 和 [7] 对单生过程的积分型泛函进行了进一步的研究, 得到了向上积分型泛函的分布和矩的计算. 本文考虑单死过程的向下积分型泛函. 不同于单生过程的至多单流出, 单死过程可能无穷流出, 这样难度加大. 我们的方法是先研究有限状态空间单死过程, 再用极限方法来解决可数状态空间单死过程的相应问题.

设 $X=\{X(t),\, t\geqslant 0\}$ 是定义在概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$ 上的右连续齐次马氏过程, 状态空间为可数状态空间 $E=\{0,1,2,\cdots\}$, 其转移概率矩阵为 $P(t)=(p_{ij}(t))$, 转移速率矩阵 $Q=(q_{ij})$. 本文考虑的过程 X 是单死过程, 即其转移速率矩阵 $Q=(q_{ij})$ 满足:

$$q_{i,i-1}>0,\quad i\geqslant 1;\qquad q_{i,i-j}=0,\quad i\geqslant j\geqslant 2.$$

本文假定转移速率矩阵 $Q=(q_{ij})$ 均为全稳定保守 (即 $q_i:=-q_{ii}=\sum\limits_{j\neq i}q_{ij}<\infty$ $(i\geqslant 0)$) 且是不可约的.

*国家自然科学基金项目 (批准号: 11571043、11771047、11871008) 资助.

*通讯作者, E-mail: zhangyh@bnu.edu.cn.

本文 2019 年 9 月 9 日收到, 2019 年 12 月 3 日收到修改稿.

设 V 是定义在 E 上的非负有限值且不恒为零的函数. 定义单死过程 X 的状态 i 首中时为 $\tau_i=\inf\{t>0:X(t)=i\}$. 考虑单死过程的向下积分型泛函

$$\xi=\int_0^{\tau_0}V(X(t))\mathrm{d}t \tag{1}$$

的分布和矩. 当 $V\equiv 1$ 时, $\xi=\tau_0$, 故 ξ 的各阶矩即为状态 0 首中时的各阶矩. 文献 [8] 和 [9] 分别对单死过程状态 0 首中时的一阶矩及高阶矩作了研究, 得到了高阶矩的递推表达, 但其证明比较复杂, 本文将借助积分型泛函给出一个相对简洁的证明.

令 $\mathsf{P}_k(\cdot)=\mathsf{P}(\cdot\,|\,X(0)=k)$, $\mathsf{E}_k(\cdot)=\mathsf{E}(\cdot\,|\,X(0)=k)$. 再记积分型泛函 ξ 的分布函数为 $F_k(x)=\mathsf{P}_k(\xi\leqslant x)$, 其 Laplace 变换记为

$$\varphi_k(\lambda)=\mathsf{E}_k\mathrm{e}^{-\lambda\xi}=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}F_k(x). \tag{2}$$

考虑有限状态空间 $E_N=\{0,1,2,\cdots,N\}$ 上单死过程 $X^{(N)}=\{X^{(N)}(t),\,t\geqslant 0\}$, 其转移速率矩阵 $Q^{(N)}=(q_{ij},\,0\leqslant i,j\leqslant N)$ 为 $N+1$ 阶矩阵, 状态 N 是反射壁, 即

$$Q^{(N)}=\begin{pmatrix}-q_0 & q_{01} & \cdots & q_{0,N-1} & q_{0,N}\\ q_{10} & -q_1 & \cdots & q_{1,N-1} & q_{1,N}\\ 0 & q_{21} & \cdots & q_{2,N-1} & q_{2,N}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & q_{N,N-1} & -q_N\end{pmatrix}. \tag{3}$$

类似定义 $X^{(N)}$ 的向下积分型泛函 $\xi^{(N)}$ 及其分布的 Laplace 变换 $\varphi_k^{(N)}(\lambda)$. 则我们有下列结果.

定理 1 设 E_N 上单死过程 $X^{(N)}$ 的转移速率矩阵 $Q^{(N)}$ 为全稳定保守不可约的.

(i) 则其向下积分型泛函的 Laplace 变换为

$$\varphi_0^{(N)}(\lambda)=1,\qquad \varphi_k^{(N)}(\lambda)=\frac{\Delta_N^{(k)}(\lambda)}{\Delta_N(\lambda)},\quad k=1,2,3,\cdots,N, \tag{4}$$

其中

$$\Delta_N(\lambda)=\begin{vmatrix}W_1 & q_{12} & \cdots & q_{1,N-1} & q_{1,N}\\ q_{21} & W_2 & \cdots & q_{2,N-1} & q_{2,N}\\ 0 & q_{32} & \cdots & q_{3,N-1} & q_{3,N}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & q_{N,N-1} & W_N\end{vmatrix},\qquad W_i=-(\lambda V(i)+q_i),\ \ 1\leqslant i\leqslant N,$$

而 $\Delta_N^{(k)}(\lambda)$ 是以列向量 $(-q_{10},0,\cdots,0)^{\mathsf{T}}$ 代替 $\Delta_N(\lambda)$ 中第 k 列所得的行列式 $(1\leqslant k\leqslant N)$.

(ii) 定义 $q_k^{(i)}=\sum\limits_{j\geqslant i}q_{kj}$ $(i>k\geqslant 0)$. 令 $m_k^{(N,n)}=\mathsf{E}_k(\xi^{(N)})^n$. 则

$$\begin{cases} m_k^{(N,n)}=\sum\limits_{i=1}^{k}\varepsilon_i^{(N,n)}, & 1\leqslant k\leqslant N;\\ m_0^{(N,n)}=0, \end{cases}\tag{5}$$

其中

$$\begin{cases} \varepsilon_k^{(N,n)}=\dfrac{1}{q_{k,k-1}}\Big(nV(k)m_k^{(N,n-1)}+\sum\limits_{k+1\leqslant i\leqslant N}q_k^{(i)}\varepsilon_i^{(N,n)}\Big), & 1\leqslant k\leqslant N-1;\\ \varepsilon_N^{(N,n)}=\dfrac{nV(N)m_N^{(N,n-1)}}{q_{N,N-1}}. \end{cases}\tag{6}$$

定义数列 $\{G_k^{(\ell)}\}$ 如下:

$$G_j^{(j)}=1,\qquad G_k^{(j)}=\frac{1}{q_{k,k-1}}\sum_{k+1\leqslant i\leqslant j}q_k^{(i)}G_i^{(j)},\qquad 1\leqslant k<j\leqslant N.\tag{7}$$

则由文献 [8; 推论 2.3] 及 (7) 可知, 定理 1 中的 $\varepsilon_k^{(N,n)}$ 还可表示为

$$\varepsilon_k^{(N,n)}=n\sum_{i=k}^{N}\frac{G_k^{(i)}V(i)m_i^{(N,n-1)}}{q_{i,i-1}},\qquad 1\leqslant k\leqslant N.\tag{8}$$

由此结合定理 1 立刻得到下面结论.

推论 2 在定理 1 的条件下, 有

$$\begin{cases} m_k^{(N,n)}=n\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{\ell=i}^{N}\dfrac{G_i^{(\ell)}V(\ell)m_\ell^{(N,n-1)}}{q_{\ell,\ell-1}}, & 1\leqslant k\leqslant N;\\ m_0^{(N,n)}=0. \end{cases}\tag{9}$$

因此, 在有限状态空间, 单死过程向下积分型泛函高阶矩可通过低阶矩显式表示. 我们关心的是, 在可数状态空间, 此结论是否依然成立? 在 $V(i)\equiv 1$ 时, 文献 [9] 证明了结论正确. 为陈述此结果, 需要用到 (7) 定义的数列 $\{G_k^{(\ell)}\}$, 只是此时没有 "$k,\ell\leqslant N$" 的要求. 文献 [9; 定理 1.1] 陈述如下.

定理 3 假设可数状态空间 E 上单死过程 X 是常返的. 则

$$\mathsf{E}_k\tau_i^n=n\sum_{i+1\leqslant j\leqslant k}\sum_{\ell\geqslant j}\frac{G_j^{(\ell)}\mathsf{E}_\ell\tau_i^{n-1}}{q_{\ell,\ell-1}},\qquad k\geqslant i\geqslant 0,\ \ n\geqslant 1.$$

在文献 [9] 中, 关于定理 3 的最终证明非常复杂. 本文中, 我们在文献 [9] 的一些工作基础上, 将数学归纳法和文献 [9] 中所使用的极限逼近法相结合, 利用定理 1 的结论, 给出一个相对简洁的新证明.

本文后面的内容安排如下: 在第二节将详细证明定理 1 和 3, 同时给出可数状态空间单死过程强遍历收敛速率的上下界估计. 在第三节, 应用文献 [2] 中的想法, 继续讨论有限状态空间上单死过程向下积分型泛函的分布, 并应用其研究两类特殊停留时间的分布.

§2. 主要结果的证明

为证明本文的主要结果, 先给出一个引理及其证明.

引理 4 可数状态空间 E 上单死过程 X 向下积分型泛函 ξ 的分布函数之 Laplace 变换 $\varphi_k(\lambda)$ 满足以下差分方程组:

$$\begin{cases} q_{k,k-1}\varphi_{k-1}(\lambda)-(\lambda V(k)+q_k)\varphi_k(\lambda)+\sum\limits_{i\geqslant k+1}q_{ki}\varphi_i(\lambda)=0, \quad k\geqslant 1; \\ \varphi_0(\lambda)=1. \end{cases} \tag{10}$$

证明: 记单死过程的首次跳时刻为 η_1, 即 $\eta_1=\inf\{t>0: X(t)\neq X(0)\}$, 令 $F(x)=\mathsf{P}_k(\eta_1\leqslant x)$. 则由跳过程的性质知, $F(x)=1-\mathrm{e}^{-q_kx}$. 进而,

$$\mathsf{E}_k\mathrm{e}^{-\lambda V(k)\eta_1}=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda V(k)x}\mathrm{d}F(x)=\frac{q_k}{\lambda V(k)+q_k}, \tag{11}$$

以下采用记号 $\int_u^v\equiv\int_u^v V(X(t))\mathrm{d}t$. 对于 $k\geqslant 1$, 则由强马氏性以及 η_1 与 $X(\eta_1)$ 独立的性质, 有

$$\begin{aligned} \varphi_k(\lambda)&=\mathsf{E}_k\mathrm{e}^{-\lambda\int_0^{\tau_0}}=\mathsf{E}_k\big[\mathsf{E}_k\big(\mathrm{e}^{-\lambda\int_0^{\tau_0}}\mid\mathscr{F}_{\eta_1}\big)\big] \\ &=\mathsf{E}_k\big[\mathsf{E}_k\big(\mathrm{e}^{-\lambda\int_0^{\eta_1}}\cdot\mathrm{e}^{-\lambda\int_{\eta_1}^{\tau_0}}\mid\mathscr{F}_{\eta_1}\big)\big] \\ &=\mathsf{E}_k\big(\mathrm{e}^{-\lambda V(k)\eta_1}\mathsf{E}_{X(\eta_1)}\mathrm{e}^{-\lambda\int_0^{\tau_0}}\big) \\ &=\mathsf{E}_k\mathrm{e}^{-\lambda V(k)\eta_1}\cdot\mathsf{E}_k\big(\mathsf{E}_{X(\eta_1)}\mathrm{e}^{-\lambda\int_0^{\tau_0}}\big). \end{aligned}$$

再利用 (11), 跳过程的如下性质:

$$\mathsf{P}_k(X(\eta_1)=i)=\frac{q_{ki}}{q_k}, \qquad i\neq k,$$

以及单死性质, 得到

$$\varphi_k(\lambda)=\frac{q_k}{\lambda V(k)+q_k}\Big(\frac{q_{k,k-1}}{q_k}\varphi_{k-1}(\lambda)+\sum_{i\geqslant k+1}\frac{q_{ki}}{q_k}\varphi_i(\lambda)\Big),$$

由此得证 (10) 的第一式. 当 $k=0$ 时, 因 $\mathsf{P}_0(\tau_0=0)=1$, 故 $\varphi_0(\lambda)=\mathsf{E}_0 1=1$. (10) 的第二式得证. □

定理 1 的证明: 似引理 4 和 (10), 可以得到 $\varphi_k^{(N)}(\lambda)$ 满足下式

$$\begin{cases} q_{k,k-1}\varphi_{k-1}^{(N)}(\lambda)-(\lambda V(k)+q_k)\varphi_k^{(N)}(\lambda)+\sum\limits_{k+1\leqslant i\leqslant N}q_{ki}\varphi_i^{(N)}(\lambda)=0, \quad 1\leqslant k\leqslant N; \\ \varphi_0^{(N)}(\lambda)=1. \end{cases} \tag{12}$$

由 Cramer 法则解线性方程组 (12), 得到解为 (4). 定理 1 (i) 得证.

为求 $m_k^{(N,n)}$, 注意到

$$m_k^{(N,n)} = (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\lambda^n} \varphi_k^{(N)}(\lambda)\Big|_{\lambda=0},$$

把 (12) 两边对 λ 求导 n 次, 令 $\lambda = 0$, 再乘以 $(-1)^n$, 即得

$$\begin{cases} q_{k,k-1} m_{k-1}^{(N,n)} - q_k m_k^{(N,n)} + \sum\limits_{k+1 \leqslant i \leqslant N} q_{ki} m_i^{(N,n)} + nV(k) m_k^{(N,n-1)} = 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant N; \\ m_0^{(N,n)} = 0. \end{cases} \tag{13}$$

记

$$\varepsilon_i^{(N,n)} = m_i^{(N,n)} - m_{i-1}^{(N,n)}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant N.$$

由 (13) 可以得到

$$q_{k,k-1} \varepsilon_k^{(N,n)} = nV(k) m_k^{(N,n-1)} + \sum_{k+1 \leqslant \ell \leqslant N} q_k^{(\ell)} \varepsilon_\ell^{(N,n)}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant N-1$$

和

$$q_{N,N-1} \varepsilon_N^{(N,n)} = nV(N) m_N^{(N,n-1)}.$$

由此得到 (6). 再由 $m_0^{(N,n)} = 0$, 推出

$$m_k^{(N,n)} = \sum_{i=1}^k (m_i^{(N,n)} - m_{i-1}^{(N,n)}) + m_0^{(N,n)} = \sum_{i=1}^k \varepsilon_i^{(N,n)}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant N.$$

从而得证 (5). 因此我们完成了定理 1 (ii) 的证明. 定理结论证毕. □

在证明定理 3 之前, 我们先证明一个引理.

引理 5　假设可数状态空间 E 上单死过程 X 是常返的. 则

$$\mathsf{E}_k \tau_i^n \leqslant n \sum_{i+1 \leqslant j \leqslant k} \sum_{\ell \geqslant j} \frac{G_j^{(\ell)} \mathsf{E}_\ell \tau_i^{n-1}}{q_{\ell,\ell-1}}, \qquad k \geqslant i \geqslant 0,\ \ n \geqslant 1.$$

证明:　固定 i, 熟知 $(\mathsf{E}_k \tau_i^n,\ k \geqslant 0)$ 是以下方程的最小非负解:

$$x_i = 0, \qquad x_k = \sum_{j \neq k} \frac{q_{kj}}{q_k} \cdot x_j + \frac{n}{q_k} \mathsf{E}_k \tau_i^{n-1}, \qquad k \neq i.$$

由局部化定理 (参看文献 [10; 定理 2.13]) 和单死性质, 得出: $(\mathsf{E}_k \tau_i^n,\ k \geqslant i)$ 是以下方程的最小非负解:

$$x_i = 0, \qquad x_k = \sum_{j > i, j \neq k} \frac{q_{kj}}{q_k} \cdot x_j + \frac{n}{q_k} \mathsf{E}_k \tau_i^{n-1}, \qquad k > i. \tag{14}$$

上面方程重新写为

$$\begin{cases} x_i = 0, \qquad x_{i+1} = \sum\limits_{j > i+1} \dfrac{q_{i+1,j}}{q_{i+1}} \cdot x_j + \dfrac{n}{q_{i+1}} \mathsf{E}_{i+1} \tau_i^{n-1}, \\ x_s = \dfrac{q_{s,s-1}}{q_s} \cdot x_{s-1} + \sum\limits_{j > s} \dfrac{q_{sj}}{q_s} \cdot x_j + \dfrac{n}{q_s} \mathsf{E}_s \tau_i^{n-1}, \qquad s > i+1. \end{cases}$$

定义

$$y_k = n \sum_{i+1 \leqslant j \leqslant k} \sum_{\ell \geqslant j} \frac{G_j^{(\ell)} \mathsf{E}_\ell \tau_i^{n-1}}{q_{\ell,\ell-1}}, \qquad k \geqslant i.$$

则

$$\begin{aligned}
\sum_{j>i+1} \frac{q_{i+1,j}}{q_{i+1}} \cdot y_j &= n \sum_{j>i+1} \frac{q_{i+1,j}}{q_{i+1}} \sum_{i+1 \leqslant k \leqslant j} \sum_{\ell \geqslant k} \frac{G_k^{(\ell)} \mathsf{E}_\ell \tau_i^{n-1}}{q_{\ell,\ell-1}} \\
&= n \sum_{j>i+1} \frac{q_{i+1,j}}{q_{i+1}} \Big(\sum_{\ell \geqslant i+1} \frac{G_{i+1}^{(\ell)} \mathsf{E}_\ell \tau_i^{n-1}}{q_{\ell,\ell-1}} + \sum_{i+1<k \leqslant j} \sum_{\ell \geqslant k} \frac{G_k^{(\ell)} \mathsf{E}_\ell \tau_i^{n-1}}{q_{\ell,\ell-1}} \Big) \\
&= \frac{n q_{i+1}^{(i+2)}}{q_{i+1}} \sum_{\ell \geqslant i+1} \frac{G_{i+1}^{(\ell)} \mathsf{E}_\ell \tau_i^{n-1}}{q_{\ell,\ell-1}} + \frac{n}{q_{i+1}} \sum_{k>i+1} q_{i+1}^{(k)} \sum_{\ell \geqslant k} \frac{G_k^{(\ell)} \mathsf{E}_\ell \tau_i^{n-1}}{q_{\ell,\ell-1}} \\
&= \frac{n q_{i+1}^{(i+2)}}{q_{i+1}} \sum_{\ell \geqslant i+1} \frac{G_{i+1}^{(\ell)} \mathsf{E}_\ell \tau_i^{n-1}}{q_{\ell,\ell-1}} + \frac{n}{q_{i+1}} \sum_{\ell>i+1} \frac{\mathsf{E}_\ell \tau_i^{n-1}}{q_{\ell,\ell-1}} \sum_{i+2 \leqslant k \leqslant \ell} q_{i+1}^{(k)} G_k^{(\ell)} \\
&= \frac{n q_{i+1}^{(i+2)}}{q_{i+1}} \sum_{\ell \geqslant i+1} \frac{G_{i+1}^{(\ell)} \mathsf{E}_\ell \tau_i^{n-1}}{q_{\ell,\ell-1}} + \frac{n q_{i+1,i}}{q_{i+1}} \sum_{\ell>i+1} \frac{G_{i+1}^{(\ell)} \mathsf{E}_\ell \tau_i^{n-1}}{q_{\ell,\ell-1}},
\end{aligned}$$

进而,

$$\begin{aligned}
\sum_{j>i+1} \frac{q_{i+1,j}}{q_{i+1}} \cdot y_j + \frac{n}{q_{i+1}} \mathsf{E}_{i+1} \tau_i^{n-1} &= \frac{n q_{i+1}^{(i+2)}}{q_{i+1}} \sum_{\ell \geqslant i+1} \frac{G_{i+1}^{(\ell)} \mathsf{E}_\ell \tau_i^{n-1}}{q_{\ell,\ell-1}} + \frac{n q_{i+1,i}}{q_{i+1}} \sum_{\ell \geqslant i+1} \frac{G_{i+1}^{(\ell)} \mathsf{E}_\ell \tau_i^{n-1}}{q_{\ell,\ell-1}} \\
&= n \sum_{\ell \geqslant i+1} \frac{G_{i+1}^{(\ell)} \mathsf{E}_\ell \tau_i^{n-1}}{q_{\ell,\ell-1}} \\
&= y_{i+1}.
\end{aligned}$$

对于 $u > i+1$, 则有

$$\begin{aligned}
&\sum_{j>u} \frac{q_{uj}}{q_u} \cdot y_j + \frac{n}{q_u} \mathsf{E}_u \tau_i^{n-1} \\
&= n \sum_{j>u} \frac{q_{uj}}{q_u} \sum_{i+1 \leqslant k \leqslant j} \sum_{\ell \geqslant k} \frac{G_k^{(\ell)} \mathsf{E}_\ell \tau_i^{n-1}}{q_{\ell,\ell-1}} + \frac{n}{q_u} \mathsf{E}_u \tau_i^{n-1} \\
&= n \sum_{j>u} \frac{q_{uj}}{q_u} \sum_{u<k \leqslant j} \sum_{\ell \geqslant k} \frac{G_k^{(\ell)} \mathsf{E}_\ell \tau_i^{n-1}}{q_{\ell,\ell-1}} + n \sum_{j>u} \frac{q_{uj}}{q_u} \sum_{i+1 \leqslant k \leqslant u} \sum_{\ell \geqslant k} \frac{G_k^{(\ell)} \mathsf{E}_\ell \tau_i^{n-1}}{q_{\ell,\ell-1}} + \frac{n}{q_u} \mathsf{E}_u \tau_i^{n-1} \\
&= \frac{n}{q_u} \sum_{k>u} q_u^{(k)} \sum_{\ell \geqslant k} \frac{G_k^{(\ell)} \mathsf{E}_\ell \tau_i^{n-1}}{q_{\ell,\ell-1}} + \frac{n q_u^{(u+1)}}{q_u} \sum_{i+1 \leqslant k \leqslant u} \sum_{\ell \geqslant k} \frac{G_k^{(\ell)} \mathsf{E}_\ell \tau_i^{n-1}}{q_{\ell,\ell-1}} + \frac{n}{q_u} \mathsf{E}_u \tau_i^{n-1} \\
&= \frac{n}{q_u} \sum_{\ell>u} \frac{\mathsf{E}_\ell \tau_i^{n-1}}{q_{\ell,\ell-1}} \sum_{u+1 \leqslant k \leqslant \ell} q_u^{(k)} G_k^{(\ell)} + \frac{n q_u^{(u+1)}}{q_u} \sum_{i+1 \leqslant k \leqslant u} \sum_{\ell \geqslant k} \frac{G_k^{(\ell)} \mathsf{E}_\ell \tau_i^{n-1}}{q_{\ell,\ell-1}} + \frac{n}{q_u} \mathsf{E}_s \tau_i^{n-1} \\
&= \frac{n q_{u,u-1}}{q_u} \sum_{\ell>u} \frac{G_u^{(\ell)} \mathsf{E}_\ell \tau_i^{n-1}}{q_{\ell,\ell-1}} + \frac{n q_u^{(u+1)}}{q_u} \sum_{i+1 \leqslant k \leqslant u} \sum_{\ell \geqslant k} \frac{G_k^{(\ell)} \mathsf{E}_\ell \tau_i^{n-1}}{q_{\ell,\ell-1}} + \frac{n}{q_u} \mathsf{E}_u \tau_i^{n-1}
\end{aligned}$$

$$= \frac{nq_{u,u-1}}{q_u}\sum_{\ell\geqslant u}\frac{G_u^{(\ell)}\mathsf{E}_\ell\tau_i^{n-1}}{q_{\ell,\ell-1}}+\frac{nq_u^{(u+1)}}{q_u}\sum_{i+1\leqslant k\leqslant u}\sum_{\ell\geqslant k}\frac{G_k^{(\ell)}\mathsf{E}_\ell\tau_i^{n-1}}{q_{\ell,\ell-1}},$$

进而,

$$\begin{aligned}
&\frac{q_{u,u-1}}{q_u}\cdot y_{u-1}+\sum_{j>u}\frac{q_{uj}}{q_u}\cdot y_j+\frac{n}{q_u}\mathsf{E}_u\tau_i^{n-1}\\
&=\frac{nq_{u,u-1}}{q_u}\sum_{i+1\leqslant k\leqslant u-1}\sum_{\ell\geqslant k}\frac{G_k^{(\ell)}\mathsf{E}_\ell\tau_i^{n-1}}{q_{\ell,\ell-1}}+\frac{nq_{u,u-1}}{q_u}\sum_{\ell\geqslant u}\frac{G_u^{(\ell)}\mathsf{E}_\ell\tau_i^{n-1}}{q_{\ell,\ell-1}}\\
&\quad+\frac{nq_u^{(u+1)}}{q_u}\sum_{i+1\leqslant k\leqslant u}\sum_{\ell\geqslant k}\frac{G_k^{(\ell)}\mathsf{E}_\ell\tau_i^{n-1}}{q_{\ell,\ell-1}}\\
&=\frac{nq_{u,u-1}}{q_u}\sum_{i+1\leqslant k\leqslant u}\sum_{\ell\geqslant k}\frac{G_k^{(\ell)}\mathsf{E}_\ell\tau_i^{n-1}}{q_{\ell,\ell-1}}+\frac{nq_u^{(u+1)}}{q_u}\sum_{i+1\leqslant k\leqslant u}\sum_{\ell\geqslant k}\frac{G_k^{(\ell)}\mathsf{E}_\ell\tau_i^{n-1}}{q_{\ell,\ell-1}}\\
&=n\sum_{i+1\leqslant k\leqslant u}\sum_{\ell\geqslant k}\frac{G_k^{(\ell)}\mathsf{E}_\ell\tau_i^{n-1}}{q_{\ell,\ell-1}}\\
&=y_u.
\end{aligned}$$

因此, 我们验证了 $(y_k,\, k\geqslant i)$ 是方程 (14) 的一个非负解. 再由解的最小性质, 立刻得出: $\mathsf{E}_k\tau_i^n\leqslant y_k$ $(k\geqslant i)$. 引理结论证毕. $\square$

定理 3 的证明: 此时, 是单死过程向下积分型泛函在 $V(i)\equiv 1$ 的特殊情形. 我们采用数学归纳法与极限逼近法相结合. 为此固定 $n\geqslant 1$ 和 $N\geqslant 2$. 完全仿造文献 [9; 引理 2.5] 证明中的逼近构造, 在有限状态空间 E_N 上定义转移速率矩阵 $Q^{(N)}=(q_{ij}^{(N)},\, 0\leqslant i,j\leqslant N)$ 如下:

$$q_{ij}^{(N)}=\begin{cases}q_{ij}, & 当\ i<N,\ j<N;\\ q_i^{(N)}, & 当\ i<N,\ j=N;\\ (q_N\vee N)(1+nG^{(N)}a_N), & 当\ i=N,\ j=N-1;\\ -(q_N\vee N)(1+nG^{(N)}a_N), & 当\ i=N,\ j=N;\\ 0, & 当\ i=N,\ j<N-1,\end{cases}$$

其中

$$G^{(N)}=\max_{1\leqslant i\leqslant N}G_i^{(N)},\qquad a_N=\begin{cases}M_N^{(n-1)}, & 当\ M_N^{(n-1)}<\infty;\\ 1, & 当\ M_N^{(n-1)}=\infty,\end{cases}$$

$$M_i^{(n-1)}=\mathsf{E}_i\tau_{i-1}^{n-1}+\frac{1}{n}\sum_{k\geqslant i+1}q_{ik}M_{ik}^{(n-1)},\qquad i,n\geqslant 1,$$

和

$$M_{ik}^{(n-1)}=\sum_{i+1\leqslant\ell\leqslant k}\sum_{1\leqslant s\leqslant n-1}\binom{n}{s}\mathsf{E}_\ell\tau_{\ell-1}^{n-s}\mathsf{E}_{\ell-1}\tau_{i-1}^{s},\qquad i,k\geqslant 1.$$

定义

$$q_k^{(N,i)}=\sum_{j=i}^{N}q_{kj}^{(N)},\qquad 0\leqslant k<i\leqslant N$$

和

$$G_j^{(N,j)}=1,\qquad G_k^{(N,j)}=\frac{1}{q_{k,k-1}^{(N)}}\sum_{k+1\leqslant i\leqslant j}q_k^{(N,i)}G_i^{(N,j)},\qquad 1\leqslant k<j\leqslant N. \tag{15}$$

注意到

$$q_{kk}^{(N)}=q_{kk},\quad 0\leqslant i<N;\qquad q_k^{(N,i)}=q_k^{(i)},\quad 0\leqslant k<i\leqslant N.$$

因此, 结合以上和 (7) 以及 (15), 立刻得到

$$G_k^{(N,j)}=G_k^{(j)},\qquad 1\leqslant k\leqslant j\leqslant N. \tag{16}$$

此时由推论 2 或 (9), 有

$$\begin{cases} m_k^{(N,n)}=n\sum_{i=1}^{k}\sum_{\ell=i}^{N}\dfrac{G_i^{(N,\ell)}m_\ell^{(N,n-1)}}{q_{\ell,\ell-1}^{(N)}},\quad 1\leqslant k\leqslant N;\\ m_0^{(N,n)}=0. \end{cases} \tag{17}$$

定义

$$\tau_i^{(N)}=\inf\{t>0:X^{(N)}(t)=i\}.$$

任意给定 $k>i$ 和 $n\geqslant 1$. 由 (17) 和单死性质 (把 i 视作 0) 得到:

$$\mathsf{E}_k(\tau_i^{(N)})^n=n\sum_{i+1\leqslant j\leqslant k}\sum_{j\leqslant\ell\leqslant N}\frac{G_j^{(N,\ell)}\mathsf{E}_\ell(\tau_i^{(N)})^{n-1}}{q_{\ell,\ell-1}^{(N)}},\qquad N\geqslant k. \tag{18}$$

我们下面证明: 当 $N\uparrow\infty$ 时, 有

$$\mathsf{E}_k(\tau_i^{(N)})^n\ \Big\uparrow\ n\sum_{i+1\leqslant j\leqslant k}\sum_{\ell\geqslant j}\frac{G_j^{(\ell)}\mathsf{E}_\ell\tau_i^{n-1}}{q_{\ell,\ell-1}}=\mathsf{E}_k\tau_i^n. \tag{19}$$

首先, 当 $n=1$ 时, 由 (18) 得到:

$$\mathsf{E}_k\tau_i^{(N)}=\sum_{i+1\leqslant j\leqslant k}\sum_{j\leqslant\ell\leqslant N}\frac{G_j^{(N,\ell)}}{q_{\ell,\ell-1}^{(N)}}=:\sum_{i+1\leqslant j\leqslant k}h_j^{(N)}.$$

在定理假设下, 由文献 [8; 引理 2.6] 的证明知,

$$h_j^{(N)}\ \Big\uparrow\ \sum_{\ell\geqslant j}\frac{G_j^{(\ell)}}{q_{\ell,\ell-1}},\qquad \text{当 } N\uparrow\infty,$$

进而推出: 当 $N\uparrow\infty$ 时, 有

$$\mathsf{E}_k\tau_i^{(N)}\ \Big\uparrow\ \sum_{i+1\leqslant j\leqslant k}\sum_{\ell\geqslant j}\frac{G_j^{(\ell)}}{q_{\ell,\ell-1}}=\mathsf{E}_k\tau_i$$

成立, 此处最后一个等号成立是由于文献 [8; 定理 1.1]. 因此, (19) 对于 $n=1$ 成立.

假设 (19) 直到 $n-1$ 都成立. 记

$$\nu_{ik}^{(n)}:=n\sum_{i+1\leqslant j\leqslant k}\sum_{\ell\geqslant j}\frac{G_j^{(\ell)}\mathsf{E}_\ell\tau_i^{n-1}}{q_{\ell,\ell-1}}.$$

对于固定的 $\ell>i$, 考察数列

$$\bigg\{\frac{G_k^{(N,\ell)}\mathsf{E}_\ell(\tau_i^{(N)})^{n-1}}{q_{\ell,\ell-1}^{(N)}}\cdot\mathbf{1}_{\{\ell\leqslant N\}}\bigg\}_{N\geqslant 2}. \tag{20}$$

由 (16) 和 $Q^{(N+1)}$ 的构造以及前面的假设知

$$\begin{aligned}&\frac{G_k^{(N+1,\ell)}\mathsf{E}_\ell(\tau_i^{(N+1)})^{n-1}}{q_{\ell,\ell-1}^{(N+1)}}\cdot\mathbf{1}_{\{\ell\leqslant N+1\}}\\ &=\frac{G_k^{(\ell)}\mathsf{E}_\ell(\tau_i^{(N+1)})^{n-1}}{q_{\ell,\ell-1}^{(N+1)}}\cdot\mathbf{1}_{\{\ell\leqslant N+1\}}\geqslant\frac{G_k^{(\ell)}\mathsf{E}_\ell(\tau_i^{(N)})^{n-1}}{q_{\ell,\ell-1}^{(N+1)}}\cdot\mathbf{1}_{\{\ell\leqslant N+1\}}\\ &\geqslant\frac{G_k^{(\ell)}\mathsf{E}_\ell(\tau_i^{(N)})^{n-1}}{q_{\ell,\ell-1}^{(N+1)}}\cdot\mathbf{1}_{\{\ell\leqslant N\}}=\frac{G_k^{(N,\ell)}\mathsf{E}_\ell(\tau_i^{(N)})^{n-1}}{q_{\ell,\ell-1}}\cdot\mathbf{1}_{\{\ell\leqslant N\}}.\end{aligned}$$

由于

$$q_{N,N-1}^{(N)}\geqslant q_N\geqslant q_{N,N-1},\qquad q_{\ell,\ell-1}^{(N)}=q_{\ell,\ell-1},\quad 1\leqslant\ell\leqslant N-1,$$

因此

$$q_{\ell,\ell-1}^{(N)}\geqslant q_{\ell,\ell-1},\qquad 1\leqslant\ell\leqslant N.$$

进而由上述讨论推出

$$\frac{G_k^{(N+1,\ell)}\mathsf{E}_\ell(\tau_i^{(N+1)})^{n-1}}{q_{\ell,\ell-1}^{(N+1)}}\cdot\mathbf{1}_{\{\ell\leqslant N+1\}}\geqslant\frac{G_k^{(N,\ell)}\mathsf{E}_\ell(\tau_i^{(N)})^{n-1}}{q_{\ell,\ell-1}^{(N)}}\cdot\mathbf{1}_{\{\ell\leqslant N\}}.$$

因此, 结合前面的假设得到:

$$\frac{G_k^{(N,\ell)}\mathsf{E}_\ell(\tau_i^{(N)})^{n-1}}{q_{\ell,\ell-1}^{(N)}}\cdot\mathbf{1}_{\{\ell\leqslant N\}}\ \Big\uparrow\ \frac{G_k^{(\ell)}\mathsf{E}_\ell\tau_i^{n-1}}{q_{\ell,\ell-1}},\qquad \text{当 } N\uparrow\infty.$$

进而由以上讨论和非负函数的单调收敛定理以及 (18) 得到: 当 $N\uparrow\infty$ 时,

$$\mathsf{E}_k(\tau_i^{(N)})^n=n\sum_{i+1\leqslant j\leqslant k}\sum_{\ell\geqslant j}\frac{G_j^{(N,\ell)}\mathsf{E}_\ell(\tau_i^{(N)})^{n-1}}{q_{\ell,\ell-1}^{(N)}}\cdot\mathbf{1}_{\{\ell\leqslant N\}}\ \Big\uparrow\ n\sum_{i+1\leqslant j\leqslant k}\sum_{\ell\geqslant j}\frac{G_j^{(\ell)}\mathsf{E}_\ell\tau_i^{n-1}}{q_{\ell,\ell-1}}=\nu_{ik}^{(n)}.$$

剩下需要证明: $\mathsf{E}_k\tau_i^n=\nu_{ik}^{(n)}$. 而由引理 5 得到, $\mathsf{E}_k\tau_i^n\leqslant\nu_{ik}^{(n)}$. 故只需要证明反向不等式.

为此, 我们假设 $\mathsf{E}_k\tau_i^n<\infty$. 否则, 如果 $\mathsf{E}_k\tau_i^n=\infty$, 这个反向不等式自然成立. 在有限状态空间 E_N 上直接应用文献 [9; 引理 2.6], 得到:

$$\mathsf{E}_k(\tau_i^{(N)})^n\leqslant n\sum_{i+1\leqslant j\leqslant k}\sum_{j\leqslant\ell\leqslant N}\frac{G_j^{(\ell)}M_\ell^{(N,n-1)}}{q_{\ell,\ell-1}^{(N)}}+M_{i+1,k}^{(N,n-1)},\qquad i\leqslant k\leqslant N,\tag{21}$$

其中

$$\begin{aligned}M_{\ell k}^{(N,n-1)}&=\sum_{\ell+1\leqslant u\leqslant k}\sum_{1\leqslant s\leqslant n-1}\binom{n}{s}\mathsf{E}_u(\tau_{u-1}^{(N)})^{n-s}\mathsf{E}_{u-1}(\tau_{\ell-1}^{(N)})^s,\qquad \ell\geqslant 1,\\ M_\ell^{(N,n-1)}&=\mathsf{E}_\ell(\tau_{\ell-1}^{(N)})^{n-1}+\frac{1}{n}\sum_{\ell+1\leqslant k\leqslant N}q_{\ell k}^{(N)}M_{\ell k}^{(N,n-1)},\qquad \ell\geqslant 1.\end{aligned}$$

在前面的假设下, 我们知道: 对于任意 $u\geqslant j\geqslant 0$ 和 $1\leqslant s\leqslant n-1$, 当 $N\uparrow\infty$ 时, 有

$$\mathsf{E}_u(\tau_j^{(N)})^s\ \uparrow\ \mathsf{E}_u\tau_j^s$$

成立, 继而

$$M_{\ell k}^{(N,n-1)}\ \uparrow\ \sum_{\ell+1\leqslant u\leqslant k}\sum_{1\leqslant s\leqslant n-1}\binom{n}{s}\mathsf{E}_u\tau_{u-1}^{n-s}\mathsf{E}_{u-1}\tau_{\ell-1}^s=M_{\ell k}^{(n-1)}$$

成立.

由于

$$\infty>\mathsf{E}_k\tau_i^n=n\sum_{i+1\leqslant j\leqslant k}\sum_{\ell\geqslant j}\frac{G_j^{(\ell)}M_\ell^{(n-1)}}{q_{\ell,\ell-1}}+M_{i+1,k}^{(n-1)},$$

上式等号是由文献 [9; 命题 2.2 和定理 2.3] 立刻得到, 进而由以上假设对所有 $k\geqslant i+1$ 得到

$$\begin{aligned}\sum_{k\geqslant\ell+1}q_{\ell k}^{(N)}M_{\ell k}^{(N,n-1)}\cdot\mathbf{1}_{\{k\leqslant N\}}&=\sum_{k\geqslant\ell+1}q_{\ell k}^{(N)}M_{\ell k}^{(N,n-1)}\cdot\mathbf{1}_{\{k<N\}}+q_{\ell N}^{(N)}M_{\ell N}^{(N,n-1)}\\&\leqslant\sum_{k\geqslant\ell+1}q_{\ell k}M_{\ell k}^{(N,n-1)}\cdot\mathbf{1}_{\{k<N\}}+\sum_{k\geqslant N}q_{\ell k}M_{\ell k}^{(N,n-1)}\\&\leqslant\sum_{k\geqslant\ell+1}q_{\ell k}M_{\ell k}^{(n-1)}<\infty\end{aligned}$$

和

$$M_\ell^{(N,n-1)}\leqslant\mathsf{E}_\ell\tau_{\ell-1}^{n-1}+\frac{1}{n}\sum_{k\geqslant\ell+1}q_{\ell k}M_{\ell k}^{(n-1)}=M_\ell^{(n-1)}.$$

故由控制收敛定理推出

$$\lim_{N\to\infty}M_\ell^{(N,n-1)}=\lim_{N\to\infty}\mathsf{E}_\ell(\tau_{\ell-1}^{(N)})^{n-1}+\lim_{N\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k\geqslant\ell+1}q_{\ell k}^{(N)}M_{\ell k}^{(N,n-1)}\mathbf{1}_{\{k\leqslant N\}}$$

$$=\mathsf{E}_\ell\tau_{\ell-1}^{n-1}+\frac{1}{n}\sum_{k\geqslant\ell+1}q_{\ell k}M_{\ell k}^{(n-1)}=M_\ell^{(n-1)}.$$

由于 $\mathsf{E}_k\tau_i<\infty$, 当 $N\uparrow\infty$ 时有

$$\sum_{\ell\geqslant j}\frac{G_j^{(\ell)}M_\ell^{(N,n-1)}}{q_{\ell,\ell-1}^{(N)}}\cdot\mathbf{1}_{\{\ell\leqslant N\}}\leqslant\sum_{\ell\geqslant j}\frac{G_j^{(\ell)}M_\ell^{(n-1)}}{q_{\ell,\ell-1}^{(N)}}\cdot\mathbf{1}_{\{\ell\leqslant N\}}\ \Big\uparrow\ \sum_{\ell\geqslant j}\frac{G_j^{(\ell)}M_\ell^{(n-1)}}{q_{\ell,\ell-1}}<\infty.$$

数列 $\{\mathbf{1}_{\{\ell\leqslant N\}}/q_{\ell,\ell-1}^{(N)}\}$ 单增性的证明类似于 (20).

故在 (21) 两边取极限, 由以上讨论和控制收敛定理, 得到

$$\nu_{ik}^{(n)}\leqslant n\sum_{i+1\leqslant j\leqslant k}\sum_{\ell\geqslant j}\frac{G_j^{(\ell)}M_\ell^{(n-1)}}{q_{\ell,\ell-1}}+M_{i+1,k}^{(n-1)}=\mathsf{E}_k\tau_i^n,$$

因此得到反向不等式成立. 故我们得证 $\mathsf{E}_k\tau_i^n=\nu_{ik}^{(n)}$, 进而 (19) 关于 n 成立.

由数学归纳法知, 对一切 $n\geqslant 1$, 都有 (19) 成立, 进而, $\mathsf{E}_k\tau_i^n=\nu_{ik}^{(n)}$. 定理证毕. □

下面来看一个简单的推论.

推论 6 在定理 3 的条件下, 定义

$$\mathsf{E}_\infty\tau_i^n=\lim_{k\to\infty}\mathsf{E}_k\tau_i^n,\qquad i\geqslant 0.$$

则对一切 $\mathsf{E}_\infty\tau_i^n$ ($i\geqslant 0$, $n\geqslant 1$), 或者同时都有限, 或者同时都无穷.

证明: 由定理 3 知,

$$\mathsf{E}_\infty\tau_i^n=n\sum_{j\geqslant i+1}\sum_{\ell\geqslant j}\frac{G_j^{(\ell)}\mathsf{E}_\ell\tau_i^{n-1}}{q_{\ell,\ell-1}},\qquad i\geqslant 0. \tag{22}$$

故

$$\mathsf{E}_\infty\tau_i=\sum_{j\geqslant i+1}\sum_{\ell\geqslant j}\frac{G_j^{(\ell)}}{q_{\ell,\ell-1}},\qquad i\geqslant 0. \tag{23}$$

若 $\mathsf{E}_\infty\tau_0<\infty$, 由单死性质知, 对于任意 $0\leqslant i<\ell$, 都有 $\infty>\mathsf{E}_\infty\tau_0\geqslant\mathsf{E}_\infty\tau_i\geqslant\mathsf{E}_\ell\tau_i$, 故再由 (22) 和 (23) 知,

$$\mathsf{E}_\infty\tau_i^2\leqslant 2\mathsf{E}_\infty\tau_i\sum_{j\geqslant i+1}\sum_{\ell\geqslant j}\frac{G_j^{(\ell)}}{q_{\ell,\ell-1}}=2!(\mathsf{E}_\infty\tau_i)^2\leqslant 2!(\mathsf{E}_\infty\tau_0)^2,\qquad i\geqslant 0.$$

假设至 $n-1$, 都有 $\mathsf{E}_\infty\tau_i^{n-1}\leqslant(n-1)!(\mathsf{E}_\infty\tau_i)^{n-1}$ ($i\geqslant 0$). 对于任意 $0\leqslant i<\ell$, 都有 $\mathsf{E}_\infty\tau_i^{n-1}\geqslant\mathsf{E}_\ell\tau_i^{n-1}$. 则由 (22) 和 (23) 以及假设得

$$\mathsf{E}_\infty\tau_i^n\leqslant n\mathsf{E}_\infty\tau_i^{n-1}\sum_{j\geqslant i+1}\sum_{\ell\geqslant j}\frac{G_j^{(\ell)}}{q_{\ell,\ell-1}}\leqslant n!(\mathsf{E}_\infty\tau_i)^n\leqslant n!(\mathsf{E}_\infty\tau_0)^n,\qquad i\geqslant 0.$$

由归纳法得证一切 $\mathsf{E}_\infty\tau_i^n < \infty$ $(i \geqslant 0,\ n \geqslant 1)$. 若 $\mathsf{E}_\infty\tau_0 = \infty$, 则由 (23) 知, $\mathsf{E}_\infty\tau_i = \infty$ $(i \geqslant 0)$, 进而一切 $\mathsf{E}_\infty\tau_i^n = \infty$ $(i \geqslant 0,\ n \geqslant 1)$. □

由定理 3 和 (23), 注意到

$$S := \sup_{k\geqslant 0} \mathsf{E}_k\tau_0 = \mathsf{E}_\infty\tau_0 = \sum_{j\geqslant 1}\sum_{\ell\geqslant j}\frac{G_j^{(\ell)}}{q_{\ell,\ell-1}}.$$

文献 [8] 证明了单死过程强遍历当且仅当 $S < \infty$. 定义

$$\mu_0 = 1, \qquad \mu_i = \frac{1}{q_{i,i-1}}\sum_{k=0}^{i-1} q_k^{(i)}\mu_k, \quad i \geqslant 1; \qquad \mu := \sum_{i\geqslant 0}\mu_i.$$

由文献 [11] 知, 单死过程遍历当且仅当 $\mu < \infty$, 平稳分布 (π_i) 为: $\pi_i = \mu_i/\mu$ $(i \geqslant 0)$.

文献 [12] 中给出了生灭过程强遍历收敛速率的显式上下界估计, 我们完全仿造其证明, 同样得到下面单死过程强遍历的收敛速率估计.

对 $\gamma \geqslant 2$, 定义

$$\alpha(\gamma) = \sup\Big\{\epsilon \geqslant 0 : \sup_{i\geqslant 0}\|p_{i\cdot}(t) - \pi\|_{\mathrm{Var}} \leqslant \gamma \mathrm{e}^{-\epsilon t},\ \forall\, t \geqslant 0\Big\},$$

其中 $\|\cdot\|$ 是全变差范数. 进而, 定义 $\alpha = \alpha(\infty) = \lim\limits_{\gamma\to\infty}\alpha(\gamma)$.

定理 7 假设可数状态空间 E 上单死过程 X 是强遍历的. 则有下面的估计:

$$\alpha(\gamma) \leqslant \frac{2\mu\ln(\gamma\mu)}{S}, \qquad \gamma \geqslant 2.$$

若此单死过程还是随机单调的, 则

$$\alpha(\gamma) \geqslant \frac{1 - 2/\gamma}{S}, \qquad \gamma > 2.$$

进而, $\alpha \geqslant 1/S$.

证明: 由文献 [12; 定理 2.2] 直接得到上界. 为证明下界, 注意到, 此时假设此单死过程是随机单调的, 则由文献 [10; 定理 5.43] 或者文献 [13] 知, 必存在此单死过程的两个复制的保序耦合过程 $(X_1(t), X_2(t))$. 定义函数

$$g(i_2) = \sum_{1\leqslant k\leqslant i_2}\sum_{\ell\geqslant k}\frac{G_k^{(\ell)}}{q_{\ell,\ell-1}}, \qquad i_2 \geqslant 0$$

和

$$\tau_0^{(2)} := \inf\{t \geqslant 0 : X_2(t) = 0\}.$$

由文献 [8] 知, $g(i_2) = \mathsf{E}_{i_2}\tau_0^{(2)}$. 此时, 有 $\Omega_2 g(i_2) = -1$ $(i_2 \geqslant 1)$. 取定函数 $f(i_1, i_2) = g(i_2)$, 由耦合的边缘性, 得到

$$\widetilde{\Omega}_c f(i_1, i_2) = \Omega_2 g(i_2) = -1, \qquad i_1 \geqslant 0,\ \ i_2 \geqslant 1.$$

由于是保序耦合过程, 故耦合时 $T:=\inf\{t\geqslant 0: X_1(t)=X_2(t)\}$ 和 $\tau_0^{(2)}$ 满足以下关系:

$$T\leqslant \tau_0^{(2)}, \qquad \mathsf{P}_{i_1,i_2}\text{-a.s.}, \ \ i_1\leqslant i_2.$$

因此, 有

$$\begin{aligned}\mathsf{E}_{i_1,i_2}f(X_1(t\wedge T),X_2(t\wedge T))&=f(i_1,i_2)+\mathsf{E}_{i_1,i_2}\int_0^{t\wedge T}\widetilde{\Omega}_c f(X_1(s),X_2(s))\mathrm{d}s\\&\leqslant S-\mathsf{E}_{i_1,i_2}(t\wedge T), \qquad i_1\leqslant i_2.\end{aligned}$$

令 $t\to\infty$, 得到 $\sup\limits_{i_1\leqslant i_2}\mathsf{E}_{i_1,i_2}T\leqslant S$. 由于保序, 对称地, 同理可得 $\sup\limits_{i_1\geqslant i_2}\mathsf{E}_{i_1,i_2}T\leqslant S$. 因此, 我们有

$$M:=\sup_{i_1,i_2\geqslant 0}\mathsf{E}_{i_1,i_2}T\leqslant S.$$

由此及 [12; 定理 4.2] 立刻得证: 对任意 $\gamma>2$, $\alpha(\gamma)\geqslant(1-2/\gamma)/M\geqslant(1-2/\gamma)/S$, 进而, $\alpha\geqslant 1/M\geqslant 1/S$. 下界得证. □

以上结论和证明, 适用于可数状态空间 E 上一般的跳过程.

§3. 停留时间的分布

本节将继续讨论有限状态空间 E_N 上单死过程 $X^{(N)}$ 向下积分型泛函 $\xi^{(N)}$ 的分布, 并应用其研究停留时间的分布. 总假定其转移速率矩阵 $Q^{(N)}$ 全稳定保守且不可约. 分别省略 $\tau_i^{(N)}$ 和 $\eta_1^{(N)}$ 的上标.

首先考虑的第一类停留时间如下.

固定 $1\leqslant i\leqslant N$. 令 $V(i)=1$, $V(j)=0$ $(j\neq i)$. 此时, $\xi^{(N)}=\int_0^{\tau_0}V(X^N)(t))\mathrm{d}t$ 是过程 $X^{(N)}$ 在灭绝之前停留在状态 i 的总时间. 则

(i) 当 $i\leqslant k\leqslant N$, 有

$$\mathsf{P}_k(\xi^{(N)}\leqslant x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-q_{i,i-1}x\Big/\sum\limits_{j=1}^{i}G_j^{(i)}}, & x\geqslant 0;\\ 0, & x<0;\end{cases}$$

(ii) 当 $1\leqslant k<i$, 有

$$\mathsf{P}_k(\xi^{(N)}\leqslant x)=\begin{cases}\dfrac{\sum\limits_{j=k+1}^{i}G_j^{(i)}}{\sum\limits_{j=1}^{i}G_j^{(i)}}+\dfrac{\sum\limits_{j=1}^{k}G_j^{(i)}}{\sum\limits_{j=1}^{i}G_j^{(i)}}\Big(1-\mathrm{e}^{-q_{i,i-1}x\Big/\sum\limits_{j=1}^{i}G_j^{(i)}}\Big), & x\geqslant 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

实际上, 由 (8) 计算得到:

$$\varepsilon_k^{(N,n)}=\begin{cases}0, & i+1\leqslant k\leqslant N;\\ n\cdot\dfrac{G_k^{(i)}m_i^{(N,n-1)}}{q_{i,i-1}}, & 1\leqslant k\leqslant i.\end{cases}$$

再由推论 2 得到

$$m_k^{(N,n)}=\begin{cases}n\cdot\dfrac{\sum\limits_{j=1}^{i}G_j^{(i)}}{q_{i,i-1}}\cdot m_i^{(N,n-1)}, & i\leqslant k\leqslant N;\\ n\cdot\dfrac{\sum\limits_{j=1}^{k}G_j^{(i)}}{q_{i,i-1}}\cdot m_i^{(N,n-1)}, & 1\leqslant k< i.\end{cases}$$

当 $i\leqslant k\leqslant N$ 时, 由上式, 递推地得到:

$$m_k^{(N,n)}=n\cdot\frac{\sum\limits_{j=1}^{i}G_j^{(i)}}{q_{i,i-1}}\cdot m_i^{(N,n-1)}=\cdots=n!\left(\frac{\sum\limits_{j=1}^{i}G_j^{(i)}}{q_{i,i-1}}\right)^n,\qquad n\geqslant 1,$$

进而

$$\varphi_k^{(N)}(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^n m_k^{(N,n)}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\lambda\frac{\sum\limits_{j=1}^{i}G_j^{(i)}}{q_{i,i-1}}\right)^n=\frac{q_{i,i-1}}{q_{i,i-1}+\lambda\sum\limits_{j=1}^{i}G_j^{(i)}}.$$

由 Laplace 反变换, 立即得到结论 (i).

当 $1\leqslant k<i$ 时, 由前面的讨论知,

$$m_k^{(N,n)}=n\cdot\frac{\sum\limits_{j=1}^{k}G_j^{(i)}}{q_{i,i-1}}\cdot m_i^{(N,n-1)}=n!\frac{\sum\limits_{j=1}^{k}G_j^{(i)}}{q_{i,i-1}}\left(\frac{\sum\limits_{j=1}^{i}G_j^{(i)}}{q_{i,i-1}}\right)^{n-1},\qquad n\geqslant 1,$$

进而

$$\varphi_k^{(N)}(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^n m_k^{(N,n)}}{n!}=\frac{\sum\limits_{j=1}^{k}G_j^{(i)}}{\sum\limits_{j=1}^{i}G_j^{(i)}}\cdot\frac{q_{i,i-1}}{q_{i,i-1}+\lambda\sum\limits_{j=1}^{i}G_j^{(i)}}.$$

由 Laplace 反变换, 立即得到结论 (ii).

回顾前两节的内容, 我们已经对 $\xi^{(N)}$ 的分布和矩研究清楚, 所用方法是分别解差分方程组 (12) 和 (13), 但在实际应用中, 为计算方便, 还可以考虑以下的递推法 (其思想源于文献 [2]).

命题 8　对 $\xi^{(N)}$ 的分布, 有下式成立:

$$\varphi_k^{(N)}(\lambda)=\prod_{j=1}^k g_j(\lambda),\qquad 1\leqslant k\leqslant N, \tag{24}$$

其中

$$\begin{cases} g_k(\lambda)=\dfrac{q_{k,k-1}}{\lambda V(k)+q_k-\sum\limits_{i=k+1}^N q_{ki}\prod\limits_{j=k+1}^i g_j(\lambda)}, & 1\leqslant k<N; \\ g_N(\lambda)=\dfrac{q_{N,N-1}}{\lambda V(N)+q_N}. \end{cases} \tag{25}$$

证明:　简记 $\int_u^v V(X^{(N)}(t))\mathrm{d}t$ 为 $\int_u^v$. 令 $g_k(\lambda)=\mathsf{E}_k\exp(-\lambda\int_0^{\tau_{k-1}})$. 则由强马氏性, 推出: 对于 $0\leqslant i<k\leqslant N$,

$$\begin{aligned} \mathsf{E}_k\mathrm{e}^{-\lambda\int_0^{\tau_i}} &= \mathsf{E}_k\big[\mathsf{E}_k\big(\mathrm{e}^{-\lambda\int_0^{\tau_{k-1}}}\cdot\mathrm{e}^{-\lambda\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_i}}\,\big|\,\mathscr{F}_{\tau_{k-1}}\big)\big] \\ &= \mathsf{E}_k\big(\mathrm{e}^{-\lambda\int_0^{\tau_{k-1}}}\mathsf{E}_{X^{(N)}(\tau_{k-1})}\mathrm{e}^{-\lambda\int_0^{\tau_i}}\big) \\ &= \mathsf{E}_k\mathrm{e}^{-\lambda\int_0^{\tau_{k-1}}}\cdot\mathsf{E}_{k-1}\mathrm{e}^{-\lambda\int_0^{\tau_i}} \\ &= g_k(\lambda)\mathsf{E}_{k-1}\mathrm{e}^{-\lambda\int_0^{\tau_i}} \\ &= \cdots=\prod_{j=i+1}^k g_j(\lambda), \end{aligned}$$

在上式中取 $i=0$, 即得 (24). 再由强马氏性和 η_1 与 $X^{(N)}(\eta_1)$ 独立的性质, 推出: 对于 $1\leqslant k<N$, 有

$$\begin{aligned} g_k(\lambda) &= \mathsf{E}_k\big[\mathsf{E}_k\big(\mathrm{e}^{-\lambda\int_0^{\eta_1}}\cdot\mathrm{e}^{-\lambda\int_{\eta_1}^{\tau_{k-1}}}\,\big|\,\mathscr{F}_{\eta_1}\big)\big] \\ &= \mathsf{E}_k\big(\mathrm{e}^{-\lambda\int_0^{\eta_1}}\mathsf{E}_{X^{(N)}(\eta_1)}\mathrm{e}^{-\lambda\int_0^{\tau_{k-1}}}\big) \\ &= \mathsf{E}_k\mathrm{e}^{-\lambda\int_0^{\eta_1}}\cdot\mathsf{E}_k\big(\mathsf{E}_{X^{(N)}(\eta_1)}\mathrm{e}^{-\lambda\int_0^{\tau_{k-1}}}\big) \\ &= \frac{q_k}{\lambda V(k)+q_k}\Big(\frac{q_{k,k-1}}{q_k}+\sum_{i=k+1}^N\frac{q_{ki}}{q_k}\mathsf{E}_i\mathrm{e}^{-\lambda\int_0^{\tau_{k-1}}}\Big) \\ &= \frac{q_{k,k-1}}{\lambda V(k)+q_k}+\frac{1}{\lambda V(k)+q_k}\sum_{i=k+1}^N q_{ki}\prod_{j=k}^i g_j(\lambda), \end{aligned}$$

以及

$$g_N(\lambda)=\mathsf{E}_N\mathrm{e}^{-\lambda V(N)\eta_1}=\frac{q_N}{\lambda V(N)+q_N}=\frac{q_{N,N-1}}{\lambda V(N)+q_N}.$$

由此得证 (25). 引理结论证毕.　□

为进一步研究单死过程向下积分型泛函的分布, 递归地定义多项式:

$$\begin{cases} L_{N+1}(\lambda)\equiv 1, \qquad L_N(\lambda)=\lambda V(N)+q_N, \\ L_k(\lambda)=(\lambda V(k)+q_k)L_{k+1}(\lambda)-\sum\limits_{i=k+1}^N q_{ki}\prod\limits_{j=k+1}^i q_{j,j-1}L_{i+1}(\lambda), \quad 1\leqslant k<N. \end{cases} \tag{26}$$

可以验证

$$g_k(\lambda)=\frac{q_{k,k-1}L_{k+1}(\lambda)}{L_k(\lambda)},\qquad 1\leqslant k\leqslant N \tag{27}$$

和

$$L_k(0)=\prod_{j=k}^{N}q_{j,j-1},\qquad 1\leqslant k\leqslant N,$$

上式是多项式 $L_k(\lambda)$ 的常数项, $L_k(\lambda)$ 最高次项 $N+1-k$ 项的系数为 $\prod\limits_{i=k}^{N}V(k)$.

有时考虑以下多项式更方便:

$$\mathscr{L}_k(\lambda)=\frac{L_k(\lambda)}{L_k(0)},\qquad 1\leqslant k\leqslant N+1. \tag{28}$$

由 (26) 和 (28), 显然有

$$\begin{cases}\mathscr{L}_{N+1}(\lambda)\equiv 1,\qquad \mathscr{L}_N(\lambda)=\dfrac{\lambda V(N)}{q_{N,N-1}}+1,\\ \mathscr{L}_k(\lambda)=\dfrac{\lambda V(k)+q_k}{q_{k,k-1}}\mathscr{L}_{k+1}(\lambda)-\dfrac{1}{q_{k,k-1}}\sum\limits_{i=k+1}^{N}q_{ki}\mathscr{L}_{i+1}(\lambda),\quad 1\leqslant k<N.\end{cases} \tag{29}$$

由命题 8, (26) 至 (29) 直接推得下面结论.

命题 9 对 $\xi^{(N)}$ 的分布与由 (26) 及 (28) 定义的多项式有下列关系:

$$\varphi_k^{(N)}(\lambda)=\prod_{j=1}^{k}q_{j,j-1}\cdot\frac{L_{k+1}(\lambda)}{L_1(\lambda)}=\frac{\mathscr{L}_{k+1}(\lambda)}{\mathscr{L}_1(\lambda)},\qquad 1\leqslant k\leqslant N.$$

固定 $\lambda\geqslant 0$, 则 $\{\mathscr{L}_k(\lambda)\}_{1\leqslant k\leqslant N+1}$ 关于 k 单调减. 事实上, 显然, $\mathscr{L}_N(\lambda)\geqslant\mathscr{L}_{N+1}(\lambda)$. 假设直至 $k+1$ 单调性成立. 结合 (29) 推出

$$\mathscr{L}_k(\lambda)\geqslant\frac{q_k}{q_{k,k-1}}\mathscr{L}_{k+1}(\lambda)-\frac{1}{q_{k,k-1}}\sum_{i=k+1}^{N}q_{ki}\mathscr{L}_{k+1}(\lambda)=\mathscr{L}_{k+1}(\lambda).$$

因此, 单调性对 k 依然成立. 由归纳法知, 单调性总成立. 进而, 对于任意 $\lambda\geqslant 0$ 和 $1\leqslant k\leqslant N+1$, 总有 $\mathscr{L}_k(\lambda)\geqslant\mathscr{L}_{N+1}(\lambda)=1$, 由此知, 对多项式 $\mathscr{L}_k(\lambda)$ (等价地, 对 $L_k(\lambda)$) 而言, 只有负根.

多项式 $\mathscr{L}_k(\lambda)$ 的常数项 $\mathscr{L}_k(0)=1$, 而 $\mathscr{L}_k(\lambda)$ (可能的) 最高次项次数为 $N+1-k$. 令

$$\mathscr{L}_k(\lambda)=c_{k0}+c_{k1}\lambda+c_{k2}\lambda^2+\cdots+c_{k,N+1-k}\lambda^{N+1-k},\qquad 1\leqslant k\leqslant N+1, \tag{30}$$

此时, $c_{k0}=1$ $(1\leqslant k\leqslant N+1)$, $c_{k,N+1-k}=\prod\limits_{j=k}^{N}V(j)/q_{j,j-1}$ $(1\leqslant k\leqslant N)$. 由 (29) 给定的多项式 $\mathscr{L}_k(\lambda)$ 满足下面性质.

命题 10 对由 (28) 定义的多项式, 有下式成立:

$$\mathscr{L}_k(\lambda)-\mathscr{L}_{k+1}(\lambda)=\lambda\sum_{j=k}^{N}\frac{G_k^{(j)}V(j)\mathscr{L}_{j+1}(\lambda)}{q_{j,j-1}},\qquad 1\leqslant k\leqslant N.\tag{31}$$

进而

$$\mathscr{L}_k(\lambda)=1+\lambda\sum_{i=k}^{N}\sum_{j=i}^{N}\frac{G_i^{(j)}V(j)\mathscr{L}_{j+1}(\lambda)}{q_{j,j-1}},\qquad 1\leqslant k\leqslant N.\tag{32}$$

证明: 由 (29), 推得: 对于 $1\leqslant k\leqslant N$, 有

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_k(\lambda)-\mathscr{L}_{k+1}(\lambda)&=\frac{1}{q_{k,k-1}}\sum_{i=k+1}^{N}q_{ki}(\mathscr{L}_{k+1}(\lambda)-\mathscr{L}_{i+1}(\lambda))+\frac{\lambda V(k)}{q_{k,k-1}}\mathscr{L}_{k+1}(\lambda)\\&=\frac{1}{q_{k,k-1}}\Big[\sum_{j=k+1}^{N}q_k^{(j)}(\mathscr{L}_j(\lambda)-\mathscr{L}_{j+1}(\lambda))+\lambda V(k)\mathscr{L}_{k+1}(\lambda)\Big].\end{aligned}$$

再由文献 [8; 推论 2.3] 直接得到 (31). 进而

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_k(\lambda)&=\mathscr{L}_{N+1}(\lambda)+\sum_{i=k}^{N}(\mathscr{L}_i(\lambda)-\mathscr{L}_{i+1}(\lambda))\\&=1+\lambda\sum_{i=k}^{N}\sum_{j=i}^{N}\frac{G_i^{(j)}V(j)\mathscr{L}_{j+1}(\lambda)}{q_{j,j-1}},\qquad 1\leqslant k\leqslant N.\end{aligned}$$

得证 (32). □

比较 $\mathscr{L}_k(\lambda)$ 同次项的系数, 得到下面的结果.

命题 11 由 (28) 定义的多项式系数 (见 (30)) 满足下列关系:

$$c_{k\ell}-c_{k+1,\ell}=\sum_{j=k}^{N+1-\ell}\frac{G_k^{(j)}V(j)c_{j+1,\ell-1}}{q_{j,j-1}},\qquad 1\leqslant k\leqslant N,\ \ 1\leqslant\ell\leqslant N+1-k,\tag{33}$$

其中约定 $c_{N+2-\ell,\ell}=0$. 进而所有 $c_{k\ell}\geqslant 0$, 且 $c_{k\ell}\geqslant c_{k+1,\ell}$ $(1\leqslant k\leqslant N,\ 1\leqslant\ell\leqslant N+1-k)$.

证明: 对 $1\leqslant k\leqslant N$, 由命题 10 得到

$$\begin{aligned}&\sum_{\ell=1}^{N-k}(c_{k\ell}-c_{k+1,\ell})\lambda^{\ell}+c_{k,N+1-k}\lambda^{N+1-k}\\&=\sum_{j=k}^{N}\sum_{\ell=0}^{N-j}\frac{G_k^{(j)}V(j)c_{j+1,\ell}}{q_{j,j-1}}\lambda^{\ell+1}=\sum_{\ell=0}^{N-k}\sum_{j=k}^{N-\ell}\frac{G_k^{(j)}V(j)c_{j+1,\ell}}{q_{j,j-1}}\lambda^{\ell+1}\\&=\sum_{\ell=1}^{N+1-k}\sum_{j=k}^{N+1-\ell}\frac{G_k^{(j)}V(j)c_{j+1,\ell-1}}{q_{j,j-1}}\lambda^{\ell}\\&=\sum_{\ell=1}^{N-k}\sum_{j=k}^{N+1-\ell}\frac{G_k^{(j)}V(j)c_{j+1,\ell-1}}{q_{j,j-1}}\lambda^{\ell}+\frac{V(k)c_{k+1,N-k}}{q_{k,k-1}}\lambda^{N+1-k}.\end{aligned}$$

比较同次项系数, 得证 (33).

由 $c_{i0}=1$ 和 (33), 推出 $c_{k1}\geqslant c_{k+1,1}$, 进而 $c_{k1}\geqslant c_{N1}=V(N)/q_{N,N-1}\geqslant 0$ $(1\leqslant k\leqslant N)$. 再反复利用 (33) 和 $c_{k,N+1-k}=\prod\limits_{j=k}^{N}V(j)/q_{j,j-1}\geqslant 0$ $(1\leqslant k\leqslant N)$, 容易推出 $c_{k\ell}\geqslant 0$, 且 $c_{k\ell}\geqslant c_{k+1,\ell}$ $(1\leqslant k\leqslant N,\ 1\leqslant \ell\leqslant N+1-k)$. □

现在取特定的函数 V 来研究如下的第二类停留时间.

固定 $1\leqslant j<i\leqslant N$. 令 $V(i)=V(j)=1$, $V(k)=0$ $(k\neq i,j)$. 此时, $\xi^{(N)}=\int_0^{\tau_0}V(X^{(N)}(t))\mathrm{d}t$ 是过程 $X^{(N)}$ 在灭绝之前停留在状态 i 与 j 的总时间. 我们研究 $\xi^{(N)}/\mathsf{E}_k\xi^{(N)}$ 的分布.

由(32), 得到: 当 $i+1\leqslant k\leqslant N+1$ 时, $\mathscr{L}_k(\lambda)=1$; 当 $j+1\leqslant k\leqslant i$ 时,

$$\mathscr{L}_k(\lambda)=1+\left(\frac{\sum\limits_{\ell=k}^{i}G_k^{(i)}}{q_{i,i-1}}\right)\lambda;$$

当 $1\leqslant k\leqslant j$ 时,

$$\mathscr{L}_k(\lambda)=1+\left(\frac{\sum\limits_{\ell=k}^{i}G_\ell^{(i)}}{q_{i,i-1}}+\frac{\sum\limits_{\ell=k}^{j}G_\ell^{(j)}}{q_{j,j-1}}\right)\lambda+\left(\frac{\sum\limits_{\ell=k}^{i}G_\ell^{(i)}}{q_{i,i-1}}\right)\left(\frac{\sum\limits_{\ell=k}^{j}G_\ell^{(j)}}{q_{j,j-1}}\right)\lambda^2.$$

记

$$a=\frac{\sum\limits_{\ell=1}^{i}G_\ell^{(i)}}{q_{i,i-1}},\qquad b=\frac{\sum\limits_{\ell=1}^{j}G_\ell^{(j)}}{q_{j,j-1}},\qquad a\wedge b=\min\{a,b\},\qquad a\vee b=\max\{a,b\}.$$

(i) 当 $i\leqslant k\leqslant N$ 时, $\mathscr{L}_{k+1}(\lambda)=1$, 进而由命题 9 知,

$$\varphi_k^{(N)}(\lambda)=\frac{\mathscr{L}_{k+1}(\lambda)}{\mathscr{L}_1(\lambda)}=\frac{1}{\mathscr{L}_1(\lambda)},$$

故

$$\mathsf{E}_k\xi^{(N)}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\varphi_k^{(N)}(\lambda)\Big|_{\lambda=0}=a+b.$$

因此, $\xi^{(N)}/\mathsf{E}_k\xi^{(N)}$ 分布的 Laplace 变换为

$$\varphi_k^{(N)}\Big(\frac{\lambda}{\mathsf{E}_k\xi^{(N)}}\Big)=\mathscr{L}_1\Big(\frac{\lambda}{\mathsf{E}_k\xi^{(N)}}\Big)^{-1}=\Big[1+\lambda+\frac{ab}{(a+b)^2}\lambda^2\Big]^{-1}.$$

考察多项式 $\mathscr{L}_1(\lambda/\mathsf{E}_k\xi^{(N)})$. 由前面的讨论知, 其只有负根.

当 $a\neq b$ 时, $\mathscr{L}_1(\lambda/\mathsf{E}_k\xi^{(N)})$ 有两个不相等的负根, 记为 $-1/\alpha_1$, $-1/\alpha_2$ $(\alpha_1>\alpha_2>0)$, 故

$$\varphi_k^{(N)}\Big(\frac{\lambda}{\mathsf{E}_k\xi^{(N)}}\Big)=\frac{1}{(\alpha_1\lambda+1)(\alpha_2\lambda+1)}.$$

取 Laplace 反变换知 $\xi^{(N)}/\mathsf{E}_k\xi^{(N)}$ 服从双指数分布:

$$\mathsf{P}_k\Big(\frac{\xi^{(N)}}{\mathsf{E}_k\xi^{(N)}}\leqslant x\Big)=\int_0^x\frac{\mathrm{e}^{-t/\alpha_1}-\mathrm{e}^{-t/\alpha_2}}{\alpha_1-\alpha_2}\mathrm{d}t,\qquad x\geqslant 0.$$

经过计算知,

$$\alpha_1=\frac{ab}{ab+(a\wedge b)^2},\qquad \alpha_2=\frac{ab}{ab+(a\vee b)^2}.$$

当 $a=b$ 时, $\mathscr{L}_1(\lambda/\mathsf{E}_k\xi^{(N)})$ 有两个相等的负根 -2, 故

$$\varphi_k^{(N)}\Big(\frac{\lambda}{\mathsf{E}_k\xi^{(N)}}\Big)=\frac{1}{(\lambda/2+1)^2}.$$

取 Laplace 反变换知 $\xi^{(N)}/\mathsf{E}_k\xi^{(N)}$ 服从以 2 和 2 为参数的 Γ 分布 $\Gamma(2,2)$:

$$\mathsf{P}_k\Big(\frac{\xi^{(N)}}{\mathsf{E}_k\xi^{(N)}}\leqslant x\Big)=\int_0^x 4t\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t,\qquad x\geqslant 0.$$

(ii) 当 $j\leqslant k\leqslant i-1$ 时, 记

$$c=\frac{\sum\limits_{\ell=1}^{k}G_\ell^{(i)}}{q_{i,i-1}},\qquad d=\frac{\sum\limits_{\ell=1}^{k}G_\ell^{(j)}}{q_{j,j-1}}.\tag{34}$$

由命题 9 知,

$$\varphi_k^{(N)}(\lambda)=\frac{\mathscr{L}_{k+1}(\lambda)}{\mathscr{L}_1(\lambda)}=\frac{1+(a-c)\lambda}{1+(a+b)\lambda+ab\lambda^2},$$

故

$$\mathsf{E}_k\xi^{(N)}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\varphi_k^{(N)}(\lambda)\Big|_{\lambda=0}=c+b.$$

则

$$\varphi_k^{(N)}\Big(\frac{\lambda}{\mathsf{E}_k\xi^{(N)}}\Big)=\frac{A_1(\lambda)}{B_1(\lambda)},$$

其中

$$A_1(\lambda)=(c+b)^2+(c+b)(a-c)\lambda,\qquad B(\lambda)=(c+b)^2+(c+b)(a+b)\lambda+ab\lambda^2.$$

当 $a\neq b$ 时, $B_1(\lambda)$ 有两个不相等的负根, 记为 $-\beta_1$, $-\beta_2$ $(\beta_1>\beta_2>0)$. 则

$$\varphi_k^{(N)}\Big(\frac{\lambda}{\mathsf{E}_k\xi^{(N)}}\Big)=\frac{\alpha_1}{\lambda+\beta_1}+\frac{\alpha_2}{\lambda+\beta_2},$$

由 Laplace 反变换知 $\xi^{(N)}/\mathsf{E}_k\xi^{(N)}$ 服从下面分布:

$$\mathsf{P}_k\Big(\frac{\xi^{(N)}}{\mathsf{E}_k\xi^{(N)}}\leqslant x\Big)=\int_0^x(\alpha_1\mathrm{e}^{-\beta_1 t}+\alpha_2\mathrm{e}^{-\beta_2 t})\mathrm{d}t,\qquad x\geqslant 0.$$

经过计算知,

$$\beta_1=\frac{(c+b)(a\vee b)}{ab},\qquad \beta_2=\frac{(c+b)(a\wedge b)}{ab},$$
$$\alpha_1=\frac{(a-c)\beta_1-c-b}{|a-b|},\qquad \alpha_2=\frac{c+b-(a-c)\beta_2}{|a-b|}.$$

当 $a=b$ 时, $B_2(\lambda)$ 有两个相等的负根, 记为 $-\beta$ $(\beta>0)$. 则

$$\varphi_k^{(N)}\Big(\frac{\lambda}{\mathsf{E}_k\xi^{(N)}}\Big)=\frac{\nu_1}{\lambda+\beta}+\frac{\nu_2}{(\lambda+\beta)^2},$$

由 Laplace 反变换知 $\xi^{(N)}/\mathsf{E}_k\xi^{(N)}$ 服从下面分布:

$$\mathsf{P}_k\Big(\frac{\xi^{(N)}}{\mathsf{E}_k\xi^{(N)}}\leqslant x\Big)=\int_0^x(\nu_1\mathrm{e}^{-\beta t}+\nu_2 t\mathrm{e}^{-\beta t})\mathrm{d}t,\qquad x\geqslant 0.$$

经过计算知,

$$\beta=\frac{c+b}{a},\qquad \nu_1=\frac{(a-c)(c+b)}{a^2},\qquad \nu_2=\frac{(c+b)^2}{a^2}-\nu_1\beta=\frac{(c+b)^2c}{a^3}.$$

(iii) 当 $1\leqslant k\leqslant j-1$ 时, 还按 (34) 定义 c 和 d. 注意到

$$\frac{\sum\limits_{\ell=k+1}^{i}G_\ell^{(N,i)}}{q_{i,i-1}}=a-c,\qquad \frac{\sum\limits_{\ell=k+1}^{j}G_\ell^{(N,j)}}{q_{j,j-1}}=b-d.$$

由命题 9 知,

$$\varphi_k^{(N)}(\lambda)=\frac{1+(a-c+b-d)\lambda+(a-c)(b-d)\lambda^2}{1+(a+b)\lambda+ab\lambda^2},$$

故

$$\mathsf{E}_k\xi^{(N)}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\varphi_k^{(N)}(\lambda)\Big|_{\lambda=0}=c+d.$$

则

$$\varphi_k^{(N)}\Big(\frac{\lambda}{\mathsf{E}_k\xi^{(N)}}\Big)=\frac{A_2(\lambda)}{B_2(\lambda)},$$

其中

$$A_2(\lambda)=(c+d)^2+(c+d)(a-c+b-d)\lambda+(a-c)(b-d)\lambda^2,$$
$$B_2(\lambda)=(c+d)^2+(c+d)(a+b)\lambda+ab\lambda^2.$$

当 $a\neq b$ 时, $B_2(\lambda)$ 有两个不相等的负根, 记为 $-\gamma_1$, $-\gamma_2$ $(\gamma_1>\gamma_2>0)$. 则

$$\varphi_k^{(N)}\Big(\frac{\lambda}{\mathsf{E}_k\xi^{(N)}}\Big)=\zeta_0+\frac{\zeta_1}{\lambda+\gamma_1}+\frac{\zeta_2}{\lambda+\gamma_2},$$

由 Laplace 反变换知 $\xi^{(N)}/\mathsf{E}_k\xi^{(N)}$ 服从下面分布:

$$\mathsf{P}_k\Big(\frac{\xi^{(N)}}{\mathsf{E}_k\xi^{(N)}}\leqslant x\Big)=\zeta_0+\int_0^x(\zeta_1\mathrm{e}^{-\gamma_1 t}+\zeta_2\mathrm{e}^{-\gamma_2 t})\mathrm{d}t,\qquad x\geqslant 0.$$

记上式左边分布函数为 $F(x)$. 则

$$\mathrm{d}F(x)=\zeta_0\delta_0(\mathrm{d}x)+(\zeta_1\mathrm{e}^{-\gamma_1 x}+\zeta_2\mathrm{e}^{-\gamma_2 x})\mathrm{d}x,$$

其中 $\delta_0(\mathrm{d}x)$ 为单点 0 的 Dirac 测度, 即 $\delta_0(A)=1$, 当 $0\in A$; $\delta_0(A)=0$, 当 $0\notin A$. 经过计算知,

$$\begin{aligned}
&\gamma_1=\frac{(c+d)(a\vee b)}{ab},\qquad \gamma_2=\frac{(c+d)(a\wedge b)}{ab},\qquad \zeta_0=\frac{(a-c)(b-d)}{ab},\\
&\zeta_1=\gamma_1\cdot\frac{a-c+b-d-\zeta_0(a\vee b)-a\wedge b}{|a-b|},\\
&\zeta_2=\gamma_2\cdot\frac{a\vee b+\zeta_0(a\wedge b)-a+c-b+d}{|a-b|}.
\end{aligned}$$

当 $a=b$ 时, $B_2(\lambda)$ 有两个相等的负根, 记为 $-\gamma$ $(\gamma>0)$. 则

$$\varphi_k^{(N)}\Big(\frac{\lambda}{\mathsf{E}_k\xi^{(N)}}\Big)=\mu_0+\frac{\mu_1}{\lambda+\gamma}+\frac{\mu_2}{(\lambda+\gamma)^2},$$

由 Laplace 反变换知 $\xi^{(N)}/\mathsf{E}_k\xi^{(N)}$ 服从下面分布:

$$\mathsf{P}_k\Big(\frac{\xi^{(N)}}{\mathsf{E}_k\xi^{(N)}}\leqslant x\Big)=\mu_0+\int_0^x(\mu_1\mathrm{e}^{-\gamma t}+\mu_2 t\mathrm{e}^{-\gamma t})\mathrm{d}t,\qquad x\geqslant 0.$$

经过计算知,

$$\begin{aligned}
&\gamma=\frac{c+d}{a},\qquad \mu_0=\frac{(a-c)(b-d)}{a^2},\\
&\mu_1=\Big(\frac{a-c+b-d}{a}-2\mu_0\Big)\gamma,\qquad \mu_2=(1-\mu_0)\gamma^2-\mu_1\gamma.
\end{aligned}$$

参 考 文 献

[1] WANG Z K. On distributions of functionals of birth and death processes and their applications in the theory of queues [J]. *Sci Sinica*, 1961, **10(2)**: 160–170.

[2] 王梓坤. 随机过程通论 (下卷) [M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2010.

[3] 吴立德. 齐次可数马尔可夫过程积分型泛函的分布 [J]. 数学学报, 1963, **13(1)**: 86–93.

[4] 杨超群. 可列马氏过程的积分型泛函和双边生灭过程的边界性质 [J]. 数学进展, 1964, **7(4)**: 397–424.

[5] 侯振挺, 郭青峰. 齐次可列马尔可夫过程 [M]. 北京: 科学出版社, 1978.

[6] ZHANG J K. On the generalized birth and death processes (I) — the numeral introduction, the functional of integral type and the distributions of runs and passage times [J]. *Acta Math Sci*, 1984, **4(2)**: 191–209.

[7] ZHANG J K. On the generalized birth and death processes (II) — the stay time, limit theorem and ergodic property [J]. *Acta Math Sci*, 1986, **6(1)**: 1–13.

[8] ZHANG Y H. Criteria on ergodicity and strong ergodicity of single death processes [J]. *Front Math China*, 2018, **13(5)**: 1215–1243.

[9] ZHANG Y H, ZHOU X F. High order moments of first hitting times for single death processes [J]. *Front Math China*, 2019, **14(5)**: 1037–1061.

[10] CHEN M F. *From Markov Chains to Non-Equilibrium Particle Systems* [M]. 2nd ed. New Jersey: World Scientific, 2004.

[11] 张余辉. 单死过程的稳定性 [J]. 中国科学: 数学, 2020, **50(1)**: 211–230.

[12] MAO Y H. Convergence rates in strong ergodicity for Markov processes [J]. *Stochastic Process Appl*, 2006, **116(12)**: 1964–1976.

[13] 张余辉. 一维马氏链保序耦合的构造 [J]. 应用概率统计, 1996, **12(4)**: 376–382.

[14] MAO Y H. Ergodic degrees for continuous-time Markov chains [J]. *Sci China Math*, 2004, **47(2)**: 161–174.

[15] 王梓坤. 生灭过程停留时间与首达时间的分布 [J]. 中国科学, 1980, **10(2)**: 109–117.

Integral-Type Functionals Downward of Single Death Processes

WANG Jing[1,2] ZHANG Yuhui[2]

([1] *School of Mathematics and Statistics, Yili Normal University, Yili, 835000, China*)

([2] *School of Mathematical Sciences, Beijing Normal University, Beijing, 100875, China*)

Abstract: In this paper we consider the integral-type functional downward of single death processes in the finite state space, including the Laplace transformation of its distribution and its polynomial moments as well as the distribution of staying times. As applications, a new proof for the recursive and explicit representation of high order moments of the first hitting times in the denumerable state space is presented; meanwhile, the estimates on the lower bound and the upper one of convergence rate in strong ergodicity are obtained.

Keywords: single death process; integral-type functional; first hitting time; staying time

2010 Mathematics Subject Classification: 60J60