单生过程积分型泛函的矩和分布 *

王　婧[1,2)]　张余辉[2)†]
(1)伊犁师范大学数学与统计学院, 835000, 新疆伊犁;
2)北京师范大学数学科学学院, 数学与复杂系统教育部重点实验室, 100875, 北京)

摘要　给出了单生过程积分型泛函的矩和分布 Laplace 变换的显式递推表示.

关键词　单生过程; 积分型泛函; 矩; Laplace 变换
中图分类号　O211.62　　**DOI:** 10.12202/j.0476-0301.2019257

0　引言

国内对积分型泛函的研究开始于 20 世纪 60 年代, 王梓坤[1] 对生灭过程研究了积分型泛函的分布和矩的计算, 随后文献 [2] 和 [3] 分别对较一般和一般的齐次可列马氏过程研究了此问题, 得到若干中间结果, 文献 [4] 在此基础上, 应用非负线性方程组的最小非负解理论完全解决了此问题. 对于特定的随机过程和特定的积分型泛函, 希望能够得到进一步的显式的结果, 如同生灭过程. 文献 [5] 和 [6] 对单生过程的向上积分型泛函进行了研究, 得到了向上积分型泛函的分布和矩的计算. 本文的目标是统一处理单生过程的向上和向下积分型泛函.

可数状态空间$E:=\{0,1,2,\cdots\}$上连续时间马氏链$X=\{X(t)\}_{t\geqslant 0}$, 如果其转移速率矩阵$\boldsymbol{Q}=(q_{ij})$满足$q_{i,i+1}>0(i\geqslant 0)$, $q_{ij}=0(j>i+1)$, 则称为单生过程. 本文假定单生转移速率矩阵$\boldsymbol{Q}=(q_{ij})$均为全稳定保守(即$q_i:=-q_{ii}=\sum\limits_{j\neq i}q_{ij}<\infty(i\geqslant 0)$)且是不可约的.

记单生过程第一次跳时刻为η_1, 即

$$\eta_1=\inf\{t>0:X(t)\neq X(0)\}.$$

设V是定义在E上的非负有限值且不恒为 0 的函数. 定义单生过程X的状态i回返时为

$$\sigma_i=\inf\{t>\eta_1:X(t)=i\}.$$

考虑单生过程的积分型随机泛函$\xi_i=\int_0^{\sigma_i}V(X(t))\mathrm{d}t$的分布和矩. 当$V\equiv 1$时, $\xi_i=\sigma_i$, 故ξ_i的各阶矩即为状态i回返时的各阶矩. 文献 [7] 对单生过程回返时的矩作了研究, 得到了回返时矩的递推表达. 本文得到ξ_i矩的递推表达. 为陈述结果, 引入一些符号.

给定在E上定义的一个函数c. 定义

$$\widetilde{F}_i^{(i)}=1,\qquad \widetilde{F}_n^{(i)}=\frac{1}{q_{n,n+1}}\sum_{k=i}^{n-1}\tilde{q}_n^{(k)}\widetilde{F}_k^{(i)},\qquad 0\leqslant i<n,\tag{1}$$

$$\tilde{q}_n^{(k)}=q_n^{(k)}-c_n=\sum_{j=0}^{k}q_{nj}-c_n,\qquad 0\leqslant k<n.\tag{2}$$

等价地, 也可以定义为文献 [7] 的推论 2.3:

* 国家自然科学基金资助项目(11571043, 11771047, 11871008)
† 通信作者: 张余辉(1968—), 男, 教授, 博士. 研究方向: 随机过程及交叉领域.e-mail: zhangyh@bnu.edu.cn
收稿日期: 2019-09-24

$$\widetilde{F}_i^{(i)}=1,\qquad \widetilde{F}_n^{(i)}=\sum_{k=i+1}^{n}\frac{\widetilde{F}_n^{(k)}\tilde{q}_k^{(i)}}{q_{k,\,k+1}},\qquad n\geqslant i+1.$$

在本文中，当$c_i\equiv 0$时，省略$\widetilde{F}$和$\tilde{q}$的上标‘~’，约定$\sum_{\varnothing}=0$.

1 主要定理

本文得到如下 2 个定理.

定理 1 假定单生过程常返且对给定正整数$\ell\geqslant 1$和状态i_0满足：对所有$i\in E$有$\mathbb{E}_i\xi_{i_0}^{\ell-1}<\infty$，则

$$\mathbb{E}_n\xi_{i_0}^{\ell}=\begin{cases}\ell\displaystyle\sum_{n\leqslant k\leqslant i_0-1}v_k^{(\ell)}+\Bigl(1-\sum_{n\leqslant k\leqslant i_0-1}u_k\Bigr)\mathbb{E}_{i_0}\xi_{i_0}^{\ell}, & 0\leqslant n\leqslant i_0,\\ -\ell\displaystyle\sum_{i_0\leqslant k\leqslant n-1}v_k^{(\ell)}+\Bigl(1+\sum_{i_0\leqslant k\leqslant n-1}u_k\Bigr)\mathbb{E}_{i_0}\xi_{i_0}^{\ell}, & n\geqslant i_0+1,\end{cases}$$

式中：

$$u_k=\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=i_0-1}^{k}\frac{F_k^{(j)}q_{ji_0}(1-\delta_{ji_0})}{q_{j,\,j+1}}, & k\geqslant i_0,\\ 1, & k=i_0-1,\\ 0, & 0\leqslant k\leqslant i_0-2;\end{cases}\qquad v_k^{(\ell)}=\sum_{j=0}^{k}\frac{F_k^{(j)}V(j)\mathbb{E}_j\xi_{i_0}^{\ell-1}}{q_{j,\,j+1}},\qquad k\geqslant 0;$$

$$\mathbb{E}_{i_0}\xi_{i_0}^{\ell}=\ell\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\displaystyle\sum_{i_0\leqslant k\leqslant n}v_k^{(\ell)}}{1+\displaystyle\sum_{i_0\leqslant k\leqslant n}u_k}=\ell\lim_{n\to\infty}\frac{v_n^{(\ell)}}{u_n}\ \text{若此极限存在.}$$

为研究积分型泛函的分布，记其分布函数$F_{ki}(x)=\mathbb{P}_k(\xi_i\leqslant x)$, Laplace 变换记为

$$\varphi_{ki}(\lambda)=\mathbb{E}_k\mathrm{e}^{-\lambda\xi_i}=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}F_{ki}(x),\qquad \lambda>0.$$

再记

$$\psi_{ki}(\lambda)=1-\varphi_{ki}(\lambda).$$

定理 2 对单生过程，给定状态i_0，取定式(1)和(2)中的$c=-\lambda V$. 则

$$\psi_{ni_0}(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{\lambda\displaystyle\sum_{n\leqslant k\leqslant i_0-1}\tilde{v}_k}{1+\lambda\displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant i_0-1}\tilde{v}_k}+\psi_{i_0i_0}(\lambda)\Bigl(1-\displaystyle\sum_{n\leqslant k\leqslant i_0-1}\tilde{u}_k\Bigr), & 0\leqslant n\leqslant i_0,\\ -\dfrac{\lambda\displaystyle\sum_{i_0\leqslant k\leqslant n-1}\tilde{v}_k}{1+\lambda\displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant i_0-1}\tilde{v}_k}+\psi_{i_0i_0}(\lambda)\Bigl(1+\displaystyle\sum_{i_0\leqslant k\leqslant n-1}\tilde{u}_k\Bigr), & n\geqslant i_0+1.\end{cases}$$

式中：

$$\tilde{u}_k=\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=i_0-1}^{k}\frac{\widetilde{F}_k^{(j)}q_{ji_0}(1-\delta_{ji_0})}{q_{j,\,j+1}}, & k\geqslant i_0,\\ 1, & k=i_0-1,\\ 0, & 0\leqslant k\leqslant i_0-2;\end{cases}\qquad \tilde{v}_k=\sum_{j=0}^{k}\frac{\widetilde{F}_k^{(j)}V(j)}{q_{j,\,j+1}},\qquad k\geqslant 0;$$

$$\psi_{i_0 i_0}(\lambda) = \frac{\lambda}{1+\lambda \sum_{0\leqslant k\leqslant i_0-1} \tilde{v}_k} \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{i_0\leqslant k\leqslant n} \tilde{v}_k}{1+\sum_{i_0\leqslant k\leqslant n} \tilde{u}_k}.$$

若还假定单生过程是常返的,且极限 $\lim_{n\to\infty} \tilde{v}_n/\tilde{u}_n$存在,则

$$\psi_{i_0 i_0}(\lambda) = \frac{\lambda}{1+\lambda \sum_{0\leqslant k\leqslant i_0-1} \tilde{v}_k} \lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{v}_n}{\tilde{u}_n}.$$

2　主要定理的证明

在证明上面的主要结果前,先看 3 个已有结论.

定理 3　$(\mathbb{E}_i \xi_{i_0}^{\ell} : i\in E)$是下列方程的最小非负解

$$y_i = \sum_{k\neq i i_0} \frac{q_{ik}}{q_i} y_k + \frac{\ell V(i)}{q_i} \mathbb{E}_i \xi_{i_0}^{\ell-1}, \qquad i\in E. \tag{3}$$

定理 4　$(\psi_{i i_0}(\lambda) : i\in E)$是下列方程的最小非负解

$$y_i = \sum_{k\neq i i_0} \frac{q_{ik}}{\lambda V(i)+q_i} y_k + \frac{\lambda V(i)}{\lambda V(i)+q_i}, \qquad i\in E. \tag{4}$$

以上 2 个定理,参见文献 [4] 定理 9.5.1 和 9.5.2.

定义算子Ω

$$\Omega g = \boldsymbol{Q} g + cg,$$

式中

$$(\boldsymbol{Q} g)_i = \sum_{j\in E} q_{ij}(g_j - g_i).$$

当$c\leqslant 0$时, Ω是带杀死速率$(-c_i)$的单生过程对应的算子.

定理 5　给定单生$\boldsymbol{Q}$矩阵$\boldsymbol{Q} = (q_{ij})$和函数$c$及$f$, 则 Poisson 方程

$$\Omega g = f$$

的解g有如下表示:

$$g_n = g_0 + \sum_{0\leqslant k\leqslant n-1} \sum_{0\leqslant j\leqslant k} \frac{\widetilde{F}_k^{(j)}(f_j - c_j g_0)}{q_{j,j+1}}, \qquad n\geqslant 0. \tag{5}$$

定理 5 参见 [7] 的定理 1.1.

下面给出本文主要结论的详细证明.

2.1　定理 1 的证明　对给定的状态$i_0\geqslant 0$, 由定理 3 知, $(y_i^* := \mathbb{E}_i \xi_{i_0}^{\ell} : i\in E)$是方程(3)的最小非负解: 先假定对所有$i\in E$, $y_i^* < \infty$. 改写方程(3)为 Poisson 方程

$$(\boldsymbol{Q} y)_i = q_{i i_0}(1-\delta_{i i_0}) y_{i_0} - \ell V(i) \mathbb{E}_i \sigma_{i_0}^{\ell-1}, i\in E.$$

应用定理 5, 取$c=0$和$f_i = q_{i i_0}(1-\delta_{i i_0}) y_{i_0} - \ell V(i) \mathbb{E}_i \sigma_{i_0}^{\ell-1}$, 得到 Poisson 方程的解, 满足

$$y_n = y_0 + \sum_{0\leqslant k\leqslant n-1} \sum_{j=0}^{k} \frac{F_k^{(j)} f_j}{q_{j,j+1}} = y_0 + y_{i_0} \sum_{0\leqslant k\leqslant n-1} u_k - \ell \sum_{0\leqslant k\leqslant n-1} v_k^{(\ell)}, \qquad n\in E.$$

这里, 在u_k的定义中, 对其中的求和运用了单生的特点, 即当$j\leqslant i_0-2$时, $q_{j i_0}=0$. 特别地, 令$n=i_0$, 得到

$$y_0=\ell\sum_{0\leqslant k\leqslant i_0-1}v_k^{(\ell)}+y_{i_0}\Big(1-\sum_{0\leqslant k\leqslant i_0-1}u_k\Big).$$

将其代入前面的等式,最终得出

$$y_n=\ell\Big(\sum_{0\leqslant k\leqslant i_0-1}v_k^{(\ell)}-\sum_{0\leqslant k\leqslant n-1}v_k^{(\ell)}\Big)+y_{i_0}\Big(1-\sum_{0\leqslant k\leqslant i_0-1}u_k+\sum_{0\leqslant k\leqslant n-1}u_k\Big)=$$
$$\begin{cases}-\ell\displaystyle\sum_{i_0\leqslant k\leqslant n-1}v_k^{(\ell)}+y_{i_0}\Big(1+\sum_{i_0\leqslant k\leqslant n-1}u_k\Big), & n\geqslant i_0+1,\\ \ell\displaystyle\sum_{n\leqslant k\leqslant i_0-1}v_k^{(\ell)}+y_{i_0}\Big(1-\sum_{n\leqslant k\leqslant i_0-1}u_k\Big), & n\leqslant i_0.\end{cases}\tag{6}$$

当$n<i_0$时,由u_k的定义知,$\sum\limits_{n\leqslant k\leqslant i_0-1}u_k=1$,因此,显然$y_n>0$.当$n\geqslant i_0+1$时,为使得$y_n>0$,需要

$$y_{i_0}>\frac{\ell\sum\limits_{i_0\leqslant k\leqslant n-1}v_k^{(\ell)}}{1+\sum\limits_{i_0\leqslant k\leqslant n-1}u_k},$$

进而需要

$$y_{i_0}\geqslant\sup_{n\geqslant i_0+1}\frac{\ell\sum\limits_{i_0\leqslant k\leqslant n-1}v_k^{(\ell)}}{1+\sum\limits_{i_0\leqslant k\leqslant n-1}u_k}.$$

故由最小性质知

$$y_{i_0}^*=\sup_{n\geqslant i_0+1}\frac{\ell\sum\limits_{i_0\leqslant k\leqslant n-1}v_k^{(\ell)}}{1+\sum\limits_{i_0\leqslant k\leqslant n-1}u_k}$$

和

$$y_n^*=-\ell\sum_{i_0\leqslant k\leqslant n-1}v_k^{(\ell)}+y_{i_0}^*\Big(1+\sum_{i_0\leqslant k\leqslant n-1}u_k\Big),\qquad n\geqslant i_0+1.$$

此时,上面等式中的上确界必在无穷远处达到.否则,假设在某$n_0\geqslant i_0+1$处达到,则

$$y_{i_0}^*=\frac{\ell\sum\limits_{i_0\leqslant k\leqslant n_0-1}v_k^{(\ell)}}{1+\sum\limits_{i_0\leqslant k\leqslant n_0-1}u_k},$$

进而,$y_{n_0}^*=0$,这与$y_{n_0}^*=\mathbb{E}_{n_0}\xi_{i_0}^{\ell}>0$矛盾.因此,得出

$$y_{i_0}^*=\ell\,\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{i_0\leqslant k\leqslant n}v_k^{(\ell)}}{1+\sum\limits_{i_0\leqslant k\leqslant n}u_k},$$

即得到$\mathbb{E}_{i_0}\xi_{i_0}^{\ell}$的表达式.由此及式(6),即得所需结论.

由过程常返的假设知,$\sum\limits_{k\geqslant 0}F_k^{(0)}=\infty$,等价于所有$j\in E$,$\sum\limits_{k\geqslant j}F_k^{(j)}=\infty$.此时

$$\sum_{k\geqslant 0} u_k = \sum_{k\geqslant i_0-1}\sum_{j=i_0-1}^{k} \frac{F_k^{(j)} q_{ji_0}(1-\delta_{ji_0})}{q_{jj+1}} = \sum_{j\geqslant i_0-1} \frac{q_{ji_0}(1-\delta_{ji_0})}{q_{jj+1}} \sum_{k\geqslant j} F_k^{(j)} = \infty.$$

应用 Stolz 定理可得$\mathbb{E}_{i_0}\xi_{i_0}^{\ell}$的极限表示.

下面去掉$y_i^* < \infty\ (i\in E)$的假设. 显然, $y_i = y_i^* < \infty (i < i_0)$. 故本质上是要去掉$y_i^* < \infty (i\geqslant i_0)$的假设. 若存在$i\geqslant i_0$使得$y_i^* = \infty$, 则必然有$y_{i_0}^* = \infty$, 否则若$y_{i_0}^* = \mathbb{E}_{i_0}\xi_{i_0}^{\ell} < \infty$, 则按定理结论中的表示, 得到方程(3)的一个非负有限解, 由非负解的比较定理知, 这与$y_i^* = \infty$的假设矛盾. 故定理中$\mathbb{E}_i\xi_{i_0}^{\ell} = y_i^*$的表达式依然成立.

定理证毕.

2.2　定理 2 的证明　对给定的状态$i_0\geqslant 0$, 由定理 4 知, $(y_i^* := \psi_{ii_0}(\lambda) : i\in E)$是方程(4)的最小非负解: 改写方程(4)为 Poisson 方程

$$(\boldsymbol{Q}y)_i - \lambda V(i) y_i = q_{ii_0}(1-\delta_{ii_0}) y_{i_0} - \lambda V(i), \qquad i\in E.$$

应用定理 5, 取$c = -\lambda V$和$f_i = q_{ii_0}(1-\delta_{ii_0})y_{i_0} - \lambda V(i)$, 得到 Poisson 方程的解, 满足

$$y_n = y_0 + \sum_{0\leqslant k\leqslant n-1}\sum_{j=0}^{k} \frac{\widetilde{F}_k^{(j)}(f_j - c_j y_0)}{q_{j,j+1}} = y_0\Bigg(1+\lambda\sum_{0\leqslant k\leqslant n-1}\tilde{v}_k\Bigg) + y_{i_0}\sum_{0\leqslant k\leqslant n-1}\tilde{u}_k - \lambda\sum_{0\leqslant k\leqslant n-1}\tilde{v}_k, \qquad n\in E.$$

这里, 在$\tilde{u}_k$的定义中, 对其中的求和, 同样运用了单生性质. 特别地, 令$n = i_0$, 得到

$$y_0 = \frac{\lambda\sum\limits_{0\leqslant k\leqslant i_0-1}\tilde{v}_k + y_{i_0}\Bigg(1-\sum\limits_{0\leqslant k\leqslant i_0-1}\tilde{u}_k\Bigg)}{1+\lambda\sum\limits_{0\leqslant k\leqslant i_0-1}\tilde{v}_k}.$$

注意到 $\sum\limits_{0\leqslant k\leqslant i_0-1}\tilde{u}_k = 1$. 因此

$$y_0 = 1 - \frac{1}{1+\lambda\sum\limits_{0\leqslant k\leqslant i_0-1}\tilde{v}_k}.$$

将其代入前面的等式, 得

$$y_n = \frac{\lambda\Bigg(\sum\limits_{0\leqslant k\leqslant i_0-1}\tilde{v}_k - \sum\limits_{0\leqslant k\leqslant n-1}\tilde{v}_k\Bigg)}{1+\lambda\sum\limits_{0\leqslant k\leqslant i_0-1}\tilde{v}_k} + y_{i_0}\sum_{0\leqslant k\leqslant n-1}\tilde{u}_k =$$

$$\begin{cases} -\dfrac{\lambda\sum\limits_{i_0\leqslant k\leqslant n-1}\tilde{v}_k}{1+\lambda\sum\limits_{0\leqslant k\leqslant i_0-1}\tilde{v}_k} + y_{i_0}\Bigg(1+\sum\limits_{i_0\leqslant k\leqslant n-1}\tilde{u}_k\Bigg), & n\geqslant i_0+1, \\ \dfrac{\lambda\sum\limits_{n\leqslant k\leqslant i_0-1}\tilde{v}_k}{1+\lambda\sum\limits_{0\leqslant k\leqslant i_0-1}\tilde{v}_k} + y_{i_0}\Bigg(1-\sum\limits_{n\leqslant k\leqslant i_0-1}\tilde{u}_k\Bigg), & n\leqslant i_0. \end{cases} \qquad (7)$$

当$n < i_0$时, 显然$y_n > 0$. 当$n\geqslant i_0+1$时, 为使得$y_n > 0$, 需要

$$y_{i_0} > \frac{\lambda}{1+\lambda \sum\limits_{0 \leqslant k \leqslant i_0 - 1} \tilde{v}_k} \cdot \frac{\sum\limits_{i_0 \leqslant k \leqslant n-1} \tilde{v}_k}{1 + \sum\limits_{i_0 \leqslant k \leqslant n-1} \tilde{u}_k},$$

进而需要

$$y_{i_0} \geqslant \frac{1}{1+\lambda \sum\limits_{0 \leqslant k \leqslant i_0 - 1} \tilde{v}_k} \sup_{n \geqslant i_0+1} \frac{\lambda \sum\limits_{i_0 \leqslant k \leqslant n-1} \tilde{v}_k}{1 + \sum\limits_{i_0 \leqslant k \leqslant n-1} \tilde{u}_k}.$$

故由最小性质知

$$y^*_{i_0} = \frac{\lambda}{1+\lambda \sum\limits_{0 \leqslant k \leqslant i_0 - 1} \tilde{v}_k} \sup_{n \geqslant i_0+1} \frac{\sum\limits_{i_0 \leqslant k \leqslant n-1} \tilde{v}_k}{1 + \sum\limits_{i_0 \leqslant k \leqslant n-1} \tilde{u}_k}$$

和

$$y^*_n = -\frac{\lambda \sum\limits_{i_0 \leqslant k \leqslant n-1} \tilde{v}_k}{1+\lambda \sum\limits_{0 \leqslant k \leqslant i_0 - 1} \tilde{v}_k} + y^*_{i_0}\left(1 + \sum\limits_{i_0 \leqslant k \leqslant n-1} \tilde{u}_k\right), \qquad n \geqslant i_0 + 1.$$

此时, 上面等式中的上确界必在无穷远处达到. 否则, 假设在某$n_0 \geqslant i_0+1$处达到, 则

$$y^*_{i_0} = \frac{1}{1+\lambda \sum\limits_{0 \leqslant k \leqslant i_0 - 1} \tilde{v}_k} \cdot \frac{\lambda \sum\limits_{i_0 \leqslant k \leqslant n_0-1} \tilde{v}_k}{1 + \sum\limits_{i_0 \leqslant k \leqslant n_0-1} \tilde{u}_k},$$

进而, $y^*_{n_0} = 0$, 这与$y^*_{n_0} = \psi_{n_0 i_0}(\lambda) > 0$矛盾. 因此, 得出

$$y^*_{i_0} = \frac{\lambda}{1+\lambda \sum\limits_{0 \leqslant k \leqslant i_0 - 1} \tilde{v}_k} \varlimsup_{n \to \infty} \frac{\sum\limits_{i_0 \leqslant k \leqslant n} \tilde{v}_k}{1 + \sum\limits_{i_0 \leqslant k \leqslant n} \tilde{u}_k},$$

即得到$\psi_{i_0 i_0}(\lambda)$的表达式. 由此及式(7), 即得所需结论.

由过程常返的假设知, $\sum\limits_{k \geqslant 0} F^{(0)}_k = \infty$, 等价于所有 $j \in E$, $\sum\limits_{k \geqslant j} F^{(j)}_k = \infty$. 此时注意到$c = -\lambda V$. 由式(2)知, $\tilde{q}^{(k)}_n \geqslant q^{(k)}_n$; 进而由式(1)知, $\widetilde{F}^{(j)}_k \geqslant F^{(j)}_k$. 继而$\tilde{u}_k \geqslant u_k$. 因此, 有$\sum\limits_{k \geqslant 0} \tilde{u}_k = \infty$. 应用 Stolz 定理可得$\psi_{i_0 i_0}(\lambda)$的极限表示.

定理证毕.

3 参考文献

[1] WANG Z K. On distribution of functions of birth and death processes and their applications in the theory of queues [J]. Scientia Sinica, 1961, 10(2): 160

[2] 吴立德. 齐次可数马尔科夫过程积分型泛函的分布 [J]. 数学学报, 1963, 13(1): 86

[3] 杨超群. 可列马氏过程的积分型泛函和双边生灭过程的边界性质 [J]. 数学进展, 1964, 7(4): 397

[4] 侯振挺, 郭青峰. 齐次可列马尔可夫过程 [M]. 北京: 科学出版社, 1978

[5] ZHANG J K. On the generalized birth and death processes (I): the numeral introduction, the functional of integral type and the

distributions of runs and passage times [J]. Acta Math Sci, 1984, 4(2): 191
[6] ZHANG J K. On the generalized birth and death processes (II): the stay time, limit theorem and ergodic property [J]. Acta Math Sci, 1986, 6(1): 1
[7] CHEN M F, ZHANG Y H. Unified representation of formulas for single birth processes [J]. Front Math China, 2014, 9(4): 761

Moments and distributions of integral-type functional for single birth processes

WANG Jing[1,2] ZHANG Yuhui[2]†

(1) School of Mathematics and Statistics, Yili Normal University, 835000, Yili, Xinjiang, China;
2) School of Mathematical Sciences, Beijing Normal University, Laboratory of Mathematics and Complex Systems, Ministry of Education, 100875, Beijing, China)

Abstract In this paper, explicit and recursive representations are obtained on moment and Laplace transformation of distribution of integral-type functional for single-birth processes respectively.

Keywords single-birth process; integral-type functional; moment; Laplace transformation