中国科学: 数学 2020 年 第 50 卷 第 1 期: 211～230
SCIENTIA SINICA Mathematica
《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS

论 文

单死过程的稳定性

献给严士健教授 90 华诞

张余辉

北京师范大学数学科学学院, 北京 100875
E-mail: zhangyh@bnu.edu.cn

收稿日期: 2018-09-25; 接受日期: 2019-12-03; 网络出版日期: 2020-01-03
国家自然科学基金 (批准号: 11571043, 11771047 和 11871008) 资助项目

摘要 单生过程与单死过程是经典的非对称 Markov 过程, 而非对称 Markov 过程相对于对称 Markov 过程的研究通常要困难得多. 近些年来, 关于单生过程的研究已获得相对系统的结果, 而对于一般的单死过程所知有限. 本文将介绍最近获得的关于单死过程击中时的显式表示和一些数字特征的概率意义, 在此基础上给出单死过程遍历性和强遍历性的判别准则, 常返性和指数遍历性的充分或必要条件, 以及灭绝概率的表示等. 相关结果在本文中也应用于一类扩展分枝过程.

关键词 单死过程 分枝过程 遍历性

MSC (2010) 主题分类 60J60

1 引言

记 $\mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,\ldots\}$. 考虑 $\mathbb{Z}_+$ 上全稳定保守的 Q 矩阵 $Q=(q_{ij}: i,j\in\mathbb{Z}_+)$, 即对一切 $i\geqslant 0$ 有 $q_i := -q_{ii} = \sum_{j\neq i} q_{ij} < \infty$, 若满足

$$q_{i,i+1}>0, \quad q_{ij}=0, \quad j>i+1;$$

或者

$$q_{i,i-1}>0, \quad q_{ij}=0, \quad j<i-1,$$

则称其决定的过程 $(X(t);t\geqslant 0)$ 具有非跨跳性质 (skip-free). 我们称前者决定的过程为单生过程, 后者决定的过程为单死过程. 此时, 若其决定的过程还是唯一的, 则称该 Q 矩阵是正则的.

单生过程和单死过程是经典的非对称 Markov 过程, 相对于对称 Markov 过程, 非对称 Markov 过程的研究通常要困难得多; 但关于单生过程的研究, 这些年来已获得相对系统且丰富的结果. 相关的研究背景和结果, 可以参见综述文献 [1–3] 及其参考文献. 相较于单生过程, 过去我们对一般的单死过

英文引用格式: Zhang Y H. On stability of single death processes (in Chinese). Sci Sin Math, 2020, 50: 211–230, doi: 10.1360/N012018-00234

程所知有限, 仅在平稳分布和零流入等方面有一些结果 (参见文献 [4–6]). 从对偶的观点来看, 单生过程与单死过程有着某种对偶关系, 应该可以得到一些平行结果, 实际上可以利用分枝过程对偶地研究特殊的单生过程 (参见文献 [7]); 而从研究的哲学来看, 应该是利用单生过程来对偶地研究一些特殊的单死过程, 目前用对偶方法直接尝试所得的结果, 计算复杂且概率意义不清楚, 没有完全反映出两者之间的对偶本质[1). 研究的难点在于, 从方程的观点看, 单生过程的 Q 矩阵类似下三角形矩阵, 有状态 0 作为初始点, 可以把握; 而对于单死过程, 初始点则是无穷, 看起来没有切入点.

虽然单死过程比单生过程复杂, 但作为单死过程特例的分枝过程, 研究成果特别丰富且应用广泛, 其主要工具是母函数方法 (参见文献 [8,9]). 虽然对于一般的单死过程, 母函数方法通常是失效的, 但是分枝过程可以作为我们研究单死过程的参考和对照. 最近, 我们关于单死过程的研究取得了一些进展, 发现其部分结果 (对偶地) 平行于单生过程, 可以视为某种对偶关系的产物.

本文内容安排如下: 第 2 节介绍单死过程首次击中时一阶矩的显式表示, 以及遍历性和强遍历性的显式判别准则. 第 3 节介绍单死过程指数遍历性, 给出单死过程指数遍历的一个显式充分条件. 第 4 节介绍单死过程常返性的显式充分条件和必要条件及回返 (灭绝) 概率的表示. 以三个例子贯穿这三节. 第 5 节介绍单死过程零流入的判别准则和遍历性的另一个等价的判别准则以及非零流入与强遍历性的等价性质. 第 6 节则是将前面的一些主要结果应用于一类扩展的分枝过程. 为使读者更容易了解此领域的进展, 我们在最后一节总结对单死过程的研究, 概述已经能解决的和目前尚不能解决的一些问题.

最后, 为后面叙述方便, 引入一些单死过程的常用记号. 首先, 对所有 $0 \leqslant n < k$, 定义 $q_n^{(k)} = \sum_{j \geqslant k} q_{nj}$; 再定义

$$G_i^{(i)} = 1, \quad G_n^{(i)} = \frac{1}{q_{n,n-1}} \sum_{k=n+1}^{i} q_n^{(k)} G_k^{(i)}, \quad 1 \leqslant n < i. \tag{1.1}$$

可以证明

$$G_i^{(i)} = 1, \quad G_n^{(i)} = \sum_{k=n}^{i-1} \frac{G_n^{(k)} q_k^{(i)}}{q_{k,k-1}}, \quad 1 \leqslant n < i. \tag{1.2}$$

2 击中时的矩、遍历性和强遍历性

记单死过程的首次跳时刻为 η_1, 即 $\eta_1 = \inf\{t > 0 : X(t) \neq X(0)\}$. 考虑单死过程状态 i 的首次击中时 $\tau_i = \inf\{t > 0 : X(t) = i\}$ 和首次回返时 $\sigma_i = \inf\{t \geqslant \eta_1 : X(t) = i\}$.

定义

$$h_i = \sum_{k \geqslant i} \frac{G_i^{(k)}}{q_{k,k-1}}, \quad i \geqslant 1. \tag{2.1}$$

注意 $(h_i; i \geqslant 1)$ 满足

$$h_n = \frac{1}{q_{n,n-1}} \left(1 + \sum_{k=n+1}^{\infty} q_n^{(k)} h_k\right), \quad n \geqslant 1.$$

1) Chen M F, Li P S, Zhang Y H. Dual processes of single birth ones. Preprint, 2018

固定 $N \in \mathbb{Z}_+$, 在有限状态空间 $\{0,1,2,\dots,N\}$ 上定义 Q 矩阵 $Q^{(N)}=(\tilde{q}_{ij})$ 如下:

$$\tilde{q}_{ij}=\begin{cases} q_{ij}, & \text{当 } i<N,\quad j<N,\\ q_i^{(N)}, & \text{当 } i<N,\quad j=N,\\ (q_N\vee N)(1+G^{(N)}), & \text{当 } i=N,\quad j=N-1,\\ -(q_N\vee N)(1+G^{(N)}), & \text{当 } i=N,\quad j=N,\\ 0, & \text{当 } i=N,\quad j<N-1,\end{cases}$$

其中 $G^{(N)}=\max_{1\leqslant n\leqslant N} G_n^{(N)}$. 再定义

$$\tilde{q}_n^{(k)}=\sum_{j=k}^{N}\tilde{q}_{nj},\quad 0\leqslant n<k\leqslant N$$

和

$$\widetilde{G}_i^{(i)}=1,\quad \widetilde{G}_n^{(i)}=\frac{1}{\tilde{q}_{n,n-1}}\sum_{k=n+1}^{i}\tilde{q}_n^{(k)}\widetilde{G}_k^{(i)},\quad 1\leqslant n<i\leqslant N.$$

不难验证

$$h_n^{(N)}:=\sum_{k=n}^{N}\frac{\widetilde{G}_n^{(k)}}{\tilde{q}_{k,k-1}}\quad (1\leqslant n\leqslant N) \tag{2.2}$$

是下列方程的唯一 (最小非负) 解:

$$x_i=\frac{\tilde{q}_i^{(i+1)}}{\tilde{q}_i}\cdot x_i+\sum_{\ell=i+1}^{N}\frac{\tilde{q}_i^{(\ell)}}{\tilde{q}_i}\cdot x_\ell+\frac{1}{\tilde{q}_i},\quad 1\leqslant i\leqslant N.$$

注意到 $\tilde{q}_i:=-\tilde{q}_{ii}=-q_{ii}=q_i\,(i<N)$ 和 $\tilde{q}_n^{(k)}=q_n^{(k)}\,(n<k\leqslant N)$. 进而知, $\widetilde{G}_n^{(i)}=G_n^{(i)}$ $(n\leqslant i\leqslant N)$. 因此, 我们能够改写上述方程为

$$x_N=\frac{1}{(q_N\vee N)(1+G^{(N)})},\quad x_i=\frac{q_i^{(i+1)}}{q_i}\cdot x_i+\sum_{\ell=i+1}^{N}\frac{q_i^{(\ell)}}{q_i}\cdot x_\ell+\frac{1}{q_i},\quad 1\leqslant i<N. \tag{2.3}$$

一方面, 由文献 [1, 定理 2.7] 及方程 (2.3) 和 (2.4) 知, 当 $N\to\infty$ 时, $(h_n^{(N)})$ 单调增加收敛到方程 (2.4) 的最小非负解. 另一方面, 从 (2.2) 直接推出, 当 $N\to\infty$ 时,

$$h_n^{(N)}=\sum_{k=n}^{N-1}\frac{G_n^{(k)}}{q_{k,k-1}}+\frac{G_n^{(N)}}{(q_N\vee N)(1+G^{(N)})}\to\sum_{k=n}^{\infty}\frac{G_n^{(k)}}{q_{k,k-1}}=h_n$$

对所有 $n\geqslant 1$ 成立. 由此, 文献 [10] 证明了如下结论.

引理 2.1 给定全稳定保守单死 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$, 则 (2.1) 定义的 $(h_i; i\geqslant 1)$ 是下列方程的最小非负解:

$$x_i=\frac{q_i^{(i+1)}}{q_i}\cdot x_i+\sum_{\ell\geqslant i+1}\frac{q_i^{(\ell)}}{q_i}\cdot x_\ell+\frac{1}{q_i},\quad i\geqslant 1. \tag{2.4}$$

给定状态 $i_0 \in \mathbb{Z}_+$. 对全稳定保守不可约单死 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$, 假定其决定的 Q 过程常返, 我们熟知, $(\mathbb{E}_i\tau_{i_0}; i \geqslant 0)$ 是下列方程的最小非负解:

$$x_{i_0}=0, \quad x_i=\sum_{j\neq i}\frac{q_{ij}}{q_i}\cdot x_j+\frac{1}{q_i}, \quad i\neq i_0.$$

进一步, 应用单死性质和局部化定理 (参见文献 [1, 定理 2.13]), 得到下面引理.

引理 2.2 给定全稳定保守不可约单死 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$. 假定其决定的 Q 过程常返. 给定状态 $i_0 \in \mathbb{Z}_+$, 则 $(\mathbb{E}_i\tau_{i_0}; i \geqslant i_0)$ 是下列方程的最小非负解:

$$x_{i_0}=0, \quad x_i=\sum_{j\neq i, j>i_0}\frac{q_{ij}}{q_i}\cdot x_j+\frac{1}{q_i}, \quad i> i_0.$$

由引理 2.1 和 2.2, 文献 [10] 证明了下面这个命题.

命题 2.3 给定全稳定保守不可约单死 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$. 假定其决定的 Q 过程常返, 则

$$\mathbb{E}_n\tau_{n-1}=\sum_{k\geqslant n}\frac{G_n^{(k)}}{q_{k,k-1}}, \quad n\geqslant 1. \tag{2.5}$$

因此, 在命题 2.3 的条件下,

$$\mathbb{E}_i\tau_{i_0}=\sum_{i_0+1\leqslant j\leqslant i}\sum_{k\geqslant j}\frac{G_j^{(k)}}{q_{k,k-1}}, \quad i\geqslant i_0. \tag{2.6}$$

定义

$$c_0=1+\sum_{k\geqslant 1}q_0^{(k)}h_k, \quad c_i=\frac{1+\sum_{k\geqslant 1}q_0^{(k)}h_k}{\sum_{1\leqslant k\leqslant i}q_0^{(k)}G_k^{(i)}}, \quad i\geqslant 1,$$

或者简写为

$$c_i=\frac{1+\sum_{k\geqslant 1}q_0^{(k)}h_k}{\mathbb{1}_{\{i=0\}}+\sum_{1\leqslant k\leqslant i}q_0^{(k)}G_k^{(i)}}, \quad i\geqslant 0. \tag{2.7}$$

文献 [11] 得到了如下关于平稳分布和击中时矩的结论.

命题 2.4 给定正则不可约单死 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$. 假定其决定的 Q 过程遍历, 则

$$\pi_0=\frac{1}{c_0}, \quad \pi_i=\frac{1}{q_{i,i-1}c_i}, \quad i\geqslant 1,$$

其中 $(c_i; i\geqslant 0)$ 由 (2.7) 定义, 且

$$\mathbb{E}_i\tau_{i_0}=\sum_{i+1\leqslant k\leqslant i_0}(G_k^{(i_0)}c_{i_0}-h_k), \quad 0\leqslant i\leqslant i_0-1.$$

由 (2.1)、(2.6) 和上式知, 在命题 2.4 的条件下,

$$\mathbb{E}_i\tau_{i_0}+\mathbb{E}_{i_0}\tau_i=c_{i_0}\sum_{i+1\leqslant k\leqslant i_0}G_k^{(i_0)}, \quad 0\leqslant i\leqslant i_0-1.$$

因此, $c_j\sum_{i+1\leqslant k\leqslant j}G_k^{(j)}$ 是状态 i 和 j 之间的平均往返时 $(i<j)$.

此时, 若定义

$$\tilde{c}_k=\max_{i<k}\frac{\sum_{i+1\leqslant j\leqslant k}h_j}{\sum_{i+1\leqslant j\leqslant k}G_j^{(k)}},\quad k\geqslant 1,$$

则 $h_k\leqslant\tilde{c}_k\leqslant c_i<\infty$ 对所有 $k\geqslant 1$ 成立.

基于命题 2.3 和文献 [1, 定理 4.44], 不难得到下面结果.

定理 2.5　给定全稳定保守不可约单死 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$. 假定其决定的 Q 过程常返, 则

$$\mathbb{E}_n\sigma_0=\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\sum_{\ell\geqslant k}\frac{G_k^{(\ell)}}{q_{\ell,\ell-1}},\quad n\geqslant 1$$

和

$$\mathbb{E}_0\sigma_0=\frac{1}{q_0}+\frac{1}{q_0}\sum_{k\geqslant 1}q_0^{(k)}\sum_{\ell\geqslant k}\frac{G_k^{(\ell)}}{q_{\ell,\ell-1}}.$$

进而, 过程遍历当且仅当

$$D:=\sum_{k\geqslant 1}q_0^{(k)}\sum_{\ell\geqslant k}\frac{G_k^{(\ell)}}{q_{\ell,\ell-1}}<\infty,$$

过程强遍历当且仅当

$$S:=\sum_{k\geqslant 1}\sum_{\ell\geqslant k}\frac{G_k^{(\ell)}}{q_{\ell,\ell-1}}<\infty.$$

实际上, 对遍历性的论断, 常返性假设可以由唯一性来替代.

注意 $1+D=q_0\mathbb{E}_0\sigma_0$ 和 $D\leqslant q_0S$. 我们来看几个单死过程的例子.

例 2.6　给定全稳定保守 (不可约) 生灭 Q 矩阵 $Q=(a_i,b_i)$. 定义

$$\mu_0=1,\quad \mu_i=\frac{b_0b_1\cdots b_{i-1}}{a_1a_2\cdots a_i},\quad i\geqslant 1;\quad \mu[i,+\infty)=\sum_{k\geqslant i}\mu_k,\quad i\geqslant 0,$$

则

$$G_n^{(i)}=\frac{\mu_ia_i}{\mu_na_n},\quad 1\leqslant n\leqslant i.$$

假定其决定的 Q 过程常返 (参见第 4 节). 经过计算, 可得

$$\mathbb{E}_n\tau_{n-1}=\frac{\mu[n,+\infty)}{\mu_na_n},\quad n\geqslant 1.$$

进而由 (2.6) 得到

$$\mathbb{E}_i\tau_{i_0}=\sum_{i_0+1\leqslant k\leqslant i}\frac{\mu[k,+\infty)}{\mu_ka_k}=\sum_{i_0\leqslant k\leqslant i-1}\frac{\mu[k+1,+\infty)}{\mu_kb_k},\quad i>i_0.$$

同时我们知道, 此生灭过程遍历当且仅当 $D=\mu[1,+\infty)<\infty$, 等价地, $\mu:=\mu[0,+\infty)<\infty$; 此生灭过程强遍历当且仅当

$$S=\sum_{n\geqslant 1}\frac{\mu[n,+\infty)}{\mu_na_n}=\sum_{n\geqslant 0}\frac{\mu[n+1,+\infty)}{\mu_nb_n}<\infty.$$

在过程遍历的条件下, 容易验证 $c_0=\mu$ 和 $c_i=\mu/(\mu_i a_i)$ $(i\geqslant 1)$, 而且

$$\tilde{c}_i\leqslant\frac{\mu[1,+\infty)}{\mu_i a_i}\leqslant c_i,\quad i\geqslant 1.$$

此时由命题 2.4 知, 平稳分布为 $\pi_i=\mu_i/\mu$ $(i\geqslant 0)$, 同时得到

$$\mathbb{E}_i\tau_{i_0}=\sum_{i+1\leqslant k\leqslant i_0}\frac{\mu[0,k)}{\mu_k a_k}=\sum_{i\leqslant k\leqslant i_0-1}\frac{\mu[0,k]}{\mu_k b_k},\quad i<i_0.$$

这是我们熟知的. 事实上, 只要过程常返, 上式总成立. 这些结果都是已知的 (参见文献 [1]).

例 2.7 给定常数 $b>2$. 定义全稳定保守不可约单死 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$ 如下:

$$\begin{aligned}&q_{ij}=\frac{b-1}{b^{j-i+2}},\quad j\geqslant i+1;\quad q_{i,i-1}=\frac{b-1}{b},\quad q_i=-q_{ii}=\frac{b^2-b+1}{b^2},\quad i\geqslant 1;\\&q_{0j}=\frac{b-1}{b^{j+1}},\quad j\geqslant 1;\quad q_0=-q_{00}=\frac{1}{b}.\end{aligned}$$

此时其决定的 Q 过程常返, 参见第 4 节. 则 $q_n^{(k)}=1/b^{k-n+1}$ $(1\leqslant n<k)$, $q_0^{(k)}=1/b^k$ $(k\geqslant 1)$ 和

$$G_n^{(i)}=\frac{1}{b(b-1)^{i-n}},\quad 1\leqslant n<i;\quad \mathbb{E}_n\tau_{n-1}=\frac{b-1}{b-2},\quad n\geqslant 1;\quad \mathbb{E}_i\tau_{i_0}=(i-i_0)\frac{b-1}{b-2},\quad i>i_0.$$

进而, 由 $D=1/(b-2)$ 和 $S=+\infty$ 以及定理 2.5 知, 此单死过程遍历但非强遍历. 在过程遍历的条件下, 可以验证

$$c_0=\frac{b-1}{b-2},\quad c_i=\frac{b(b-1)^i}{b-2},\quad i\geqslant 1$$

和

$$\tilde{c}_i\leqslant\frac{b(b-1)^i}{b-2}=c_i,\quad i\geqslant 1.$$

因此, 由命题 2.4 知,

$$\mathbb{E}_i\tau_{i_0}=\frac{(b-1)^{i_0+2}-(b-1)^{i+1}}{(b-2)^2}-(i_0-i)\frac{b-1}{b-2},\quad i<i_0$$

和

$$\pi_i=\frac{b-2}{(b-1)^{i+1}},\quad i\geqslant 0.$$

例 2.8 给定常数 $\beta\in(0,1/2]$. 定义全稳定保守不可约单死 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$ 如下: 状态 0 不是吸收态, 而且

$$q_{i,i+2}=\beta q_{i,i-1}>0,\quad q_{ij}=0,\quad j\neq i-1,i,i+2,\quad i\geqslant 1.$$

此时其决定的 Q 过程常返, 参见第 4 节. 则 $q_n^{(n+1)}=q_n^{(n+2)}=q_{n,n+2}$, $q_n^{(k)}=0$ $(1\leqslant n<k-2)$. 进而 $G_n^{(n)}=1$, $G_n^{(n+1)}=\beta$, $G_n^{(n+k)}=\beta(G_n^{(n+k-1)}+G_n^{(n+k-2)})$ $(k\geqslant 2)$. 因此, 对任意 $n\geqslant 1$, 数列 $\{G_n^{(n+k)}\}_{k\geqslant 0}$ 是广义 Fibonacci 数列. 记

$$A=\frac{1}{2}(\sqrt{\beta^2+4\beta}+\beta),\quad B=\frac{1}{2}(\sqrt{\beta^2+4\beta}-\beta),$$

则由 $F_0=1$, $F_1=\beta$, $F_k=\beta(F_{k-1}+F_{k-2})$ $(k\geqslant 2)$ 定义的广义 Fibonacci 数列 $\{F_k\}_{k\geqslant 0}$ 为

$$F_k=\frac{1}{\sqrt{\beta^2+4\beta}}(A^{k+1}-(-B)^{k+1}),\quad k\geqslant 0.$$

若取 $\beta=1$ 就回到标准的 Fibonacci 数列. 故

$$G_n^{(n+k)}=F_k,\quad k\geqslant 0,\quad n\geqslant 1.$$

注意 $AB=\beta=A-B, A+B=\sqrt{\beta^2+4\beta}$. 由 $0<\beta\leqslant 1/2$ 知, $0<B<A\leqslant 1$. 由命题 2.3 知,

$$\mathbb{E}_n\tau_{n-1}=\sum_{\ell\geqslant n}\frac{F_{\ell-n}}{q_{\ell,\ell-1}},\quad n\geqslant 1.$$

由定理 2.5 知, 此时, 过程遍历当且仅当

$$D=\sum_{k\geqslant 1}q_0^{(k)}\sum_{\ell\geqslant k}\frac{F_{\ell-k}}{q_{\ell,\ell-1}}<\infty,$$

过程强遍历当且仅当

$$S=\sum_{k\geqslant 1}\sum_{\ell\geqslant k}\frac{F_{\ell-k}}{q_{\ell,\ell-1}}<\infty.$$

对于至多可数状态空间 E 上的连续时间 Markov 链 $X=(X(t);t\geqslant 0)$, 记其生命时为 T. 所谓拟平稳性是指, 若 E 上的概率分布 $\rho=(\rho_i;i\in E)$ 满足

$$\mathbb{P}_\rho(X(t)=j\mid T>t)=\rho_j,\quad j\in E,\quad t\geqslant 0,$$

则称 ρ 为 X 的一个拟平稳分布.

由文献 [12] 和命题 2.3 可以直接得到关于单死过程拟平稳性的下列结果.

定理 2.9 给定正则单死 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$ 使得 0 为其吸收态且对应的过程几乎必然吸收. 假定 $Q=(q_{ij})$ 在 $\mathbb{N}:=\{1,2,3,\dots\}$ 上不可约. 若

$$\sum_{n\geqslant 1}\sum_{k\geqslant n}\frac{G_n^{(k)}}{q_{k,k-1}}<\infty,$$

则此单死过程存在唯一拟平稳分布 ρ. 进一步, 存在常数 $\gamma>0$, 使得对 $\mathbb{N}$ 上任意概率测度 μ, 下式成立:

$$\|\mathbb{P}_\mu(X(t)\in\cdot\mid t<\tau_0)-\rho\|_{\mathrm{TV}}\leqslant 2(1-\gamma)^{[t]},\quad t\geqslant 0.$$

我们给出上面定理证明的一个概述. 只需要验证文献 [12] 给出的以下三个假设条件:

(H1) 存在有限子集 $K\subset\mathbb{N}$ 和常数 $c_1>0$, 使得对任意 $t\geqslant 0$, 有

$$\frac{\inf_{i\in K}\mathbb{P}_i(t<\tau_0)}{\sup_{i\in K}\mathbb{P}_i(t<\tau_0)}\geqslant c_1;$$

(H2) 存在常数 $\lambda_0>0$, $c_2>0$, $c_3>0$ 和 $i_0\in K$, 使得

$$\sup_{i\in\mathbb{N}}\mathbb{E}_i(\mathrm{e}^{\lambda_0\tau_K\wedge\tau_0})\leqslant c_2,\quad \mathbb{P}_{i_0}(X(t)\in K)\geqslant c_3\mathrm{e}^{-\lambda_0 t},\quad t\geqslant 0;$$

(H3) 存在常数 $c_4>0$ 和 $i_0\in K$, 使得

$$\inf_{i\in\mathbb{N}}\mathbb{P}_i(X(1)=i_0\mid\tau_0>1)\geqslant c_4.$$

由于过程不可约, 则对于任意有限子集, 条件 (H1) 都成立.

对于任意 $t \geqslant 0$, $i_0 \in K$, $\lambda_0 = q_{i_0}$, 有

$$\mathbb{P}_{i_0}(X(t) \in K) \geqslant \mathbb{P}_{i_0}(X(s) = i_0, \forall\, s \in [0,t]) = \mathrm{e}^{-\lambda_0 t}.$$

故在 (H2) 中可以取 $c_3 = 1$. 由定理条件和命题 2.3 得到, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在充分大 i_ε, 使得

$$\sup_{i \geqslant i_\varepsilon} \mathbb{E}_i \tau_{i_\varepsilon} = \sum_{n \geqslant i_\varepsilon + 1} \sum_{k \geqslant n} \frac{G_n^{(k)}}{q_{k,k-1}} < \varepsilon.$$

由 Markov 不等式得到

$$\sup_{i \geqslant i_\varepsilon} \mathbb{P}_i(\tau_{i_\varepsilon} \geqslant 1) < \varepsilon,$$

进而, 得到

$$\sup_{i \geqslant i_\varepsilon} \mathbb{P}_i(\tau_{i_\varepsilon} \geqslant n) < \varepsilon^n, \quad n \geqslant 1.$$

由此得出, 存在 $i_0 \geqslant 1$, 使得

$$\sup_{i \geqslant i_0} \mathbb{E}_i(\mathrm{e}^{\lambda_0 \tau_{i_0}}) < \infty.$$

特别地, 取 $K = \{1, 2, \ldots, i_0\}$, 则得到

$$\sup_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{E}_i(\mathrm{e}^{\lambda_0 \tau_K \wedge \tau_0}) < \infty.$$

因此, 条件 (H2) 满足.

对于任意给定的 $k \in \mathbb{N}$, 应用强 Markov 性和弱 Markov 性, 得到

$$\begin{aligned}
\inf_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}_i(X(1) = i_0 \mid \tau_0 > 1) &\geqslant \inf_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}_i(X(1) = i_0) \\
&\geqslant \inf_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}_i(\tau_{i_0} \leqslant 1) \mathbb{P}_{i_0}(X(t) = i_0, \forall\, t \in [0,1]) \\
&\geqslant \mathrm{e}^{-\lambda_0} \inf_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}_i(\tau_{i_0} \leqslant 1) \\
&\geqslant \mathrm{e}^{-\lambda_0} \inf_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}_i\left(\tau_k \leqslant \frac{1}{2}\right) \mathbb{P}_k\left(\tau_{i_0} \leqslant \frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

由 Markov 不等式可知, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 有

$$\sup_{i \geqslant i_\varepsilon} \mathbb{P}_i\left(\tau_{i_\varepsilon} > \frac{1}{2}\right) \leqslant 2 \sup_{i \geqslant i_\varepsilon} \mathbb{E}_i(\tau_{i_\varepsilon}) < 2\varepsilon.$$

取 $\varepsilon = \frac{1}{4}$, 则

$$\inf_{i \geqslant i_{1/4}} \mathbb{P}_i\left(\tau_{i_{1/4}} \leqslant \frac{1}{2}\right) > \frac{1}{2}.$$

故对于 $k = i_{1/4}$,

$$\inf_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}_i(X(1) = i_0 \mid \tau_0 > 1) \geqslant \mathrm{e}^{-\lambda_0} \left(\frac{1}{2} \wedge \inf_{i < k} \mathbb{P}_i\left(\tau_k \leqslant \frac{1}{2}\right)\right) \mathbb{P}_k\left(\tau_{i_0} \leqslant \frac{1}{2}\right).$$

由于过程不可约, 则 $\inf_{i<k} \mathbb{P}_i(\tau_k \leqslant \frac{1}{2})$ 和 $\mathbb{P}_k(\tau_{i_0} \leqslant \frac{1}{2})$ 均为正的. 因此,

$$\inf_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}_i(X(1) = i_0 \mid \tau_0 > 1) > 0.$$

故条件 (H3) 满足.

再结合文献 [12], 得证定理结论.

3　指数遍历性

本节研究单死过程的指数遍历性. 定义

$$G_n=\lim_{m\to\infty}\frac{G_n^{(m)}}{G_1^{(m)}},\quad n\geqslant 1. \tag{3.1}$$

由 (1.1) 注意到

$$\frac{G_n^{(m)}}{G_1^{(m)}}=\frac{1}{q_{n,n-1}}\sum_{k\geqslant n+1}q_n^{(k)}\frac{G_k^{(m)}}{G_1^{(m)}}\mathbb{1}_{[1,m]}(k).$$

再由 Fatou 引理, 得到

$$G_n\geqslant\frac{1}{q_{n,n-1}}\sum_{k=n+1}^{\infty}q_n^{(k)}G_k,\quad n\geqslant 1. \tag{3.2}$$

运用 (3.2), 文献 [10] 给出了单死过程指数遍历的显式充分条件如下.

定理 3.1　给定正则不可约单死 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$. 假定 $\sum_{k\geqslant 1}q_0^{(k)}G_k<\infty$. 若

$$q:=\inf_{n\geqslant 0}q_n>0\quad 且\quad M:=\sup_{n\geqslant 1}\left[\sum_{k=1}^{n}G_k\right]\left[\sum_{j=n}^{\infty}\frac{1}{q_{j,j-1}G_j}\right]<\infty,$$

则此过程是指数遍历的.

上述结果的证明基于文献 [1, 定理 4.45(2)], 采用 Lyapubov 检验函数的方法, 这里检验函数的构造参见文献 [13] 中单生过程的情形.

回到前一节的三个例子.

对生灭 Q 矩阵 Q (生灭系数分别为 b_i 和 a_i), 有 $G_n^{(m)}/G_1^{(m)}=\mu_1a_1/(\mu_na_n)$. 因此,

$$G_n=\lim_{m\to\infty}\frac{G_n^{(m)}}{G_1^{(m)}}=\frac{\mu_1a_1}{\mu_na_n},\quad n\geqslant 1,$$

且 $\sum_{k\geqslant 1}q_0^{(k)}G_k=b_0<\infty$. 故 (3.2) 中等号成立, 而且

$$M=\sup_{n\geqslant 1}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\mu_ka_k}\right]\left[\sum_{j=n}^{\infty}\mu_j\right]=\sup_{n\geqslant 1}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\mu_kb_k}\right]\left[\sum_{j=n+1}^{\infty}\mu_j\right].$$

我们熟知, 生灭过程指数遍历当且仅当 $M<\infty$ (参见文献 [13,14]).

对例 2.7, 此时常数 $b>2$. 经过计算, 得到 $G_n^{(m)}/G_1^{(m)}=(b-1)^{n-1}$. 因此,

$$G_n=\lim_{m\to\infty}\frac{G_n^{(m)}}{G_1^{(m)}}=(b-1)^{n-1},\quad n\geqslant 1,$$

且 $\sum_{k\geqslant 1}q_0^{(k)}G_k=1<\infty$. 故 (3.2) 中等号成立. 注意到 $q=1/b>0$ 且

$$M=\frac{b(b-1)}{(b-2)^2}<\infty.$$

因此, 由定理 3.1 知, 此时, 过程是指数遍历的.

对例 2.8, 由 $A > B > 0$, 可以得到

$$G_n = \lim_{m\to\infty} \frac{G_n^{(m)}}{G_1^{(m)}} = \frac{1}{A^{n-1}}, \quad n \geqslant 1.$$

假设该单死 Q 矩阵 $Q = (q_{ij})$ 正则且

$$\sum_{k\geqslant 1} \frac{q_0^{(k)}}{A^k} < \infty, \quad q > 0.$$

由 $q > 0$ 知, $q_{i,i-1} \geqslant q/(1+\beta)$ $(i \geqslant 1)$. 故当 $A < 1$ 即 $\beta < 1/2$ 时,

$$M = \sup_{n\geqslant 1} \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{A^{k-1}}\right]\left[\sum_{j=n}^{\infty} \frac{A^{j-1}}{q_{j,j-1}}\right] \leqslant \frac{(1+\beta)A}{q(1-A)^2} < \infty.$$

过程必定指数遍历.

当 $A = 1$ 即 $\beta = 1/2$ 时, 若

$$M = \sup_{n\geqslant 1}\left(n\sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{q_{j,j-1}}\right) < \infty,$$

则此过程是指数遍历的. 特别地, 在 $q_{i,i-1} = i^\theta$ $(i \geqslant 1)$ 的情形, 当 $\theta \geqslant 2$ 时, 过程指数遍历 (实际上, 当 $\theta > 2$ 时, 过程强遍历, 参见第 6 节); 当 $0 < \theta < 2$ 时, $M = \infty$, 无法用定理 3.1 判断过程是否指数遍历.

任意给定一个正常数 $c \geqslant q_0 G_1$, 定义一个生灭 Q 矩阵 (a_i, b_i):

$$b_0 = \frac{c}{G_1}, \quad b_i = \frac{q_{i,i-1}G_i}{G_{i+1}}, \quad a_i = q_{i,i-1}, \quad i \geqslant 1.$$

此时, $b_0 \geqslant q_0 = q_0^{(1)}$. 由 (3.2) 知, $b_i \geqslant q_i^{(i+1)}$ 对所有 $i \geqslant 0$ 成立. 进一步, 我们有下述结论.

命题 3.2 给定正则不可约单死 Q 矩阵 $Q = (q_{ij})$. 假定上面定义的生灭 Q 矩阵正则, 则

$$\mathbb{E}_i \tau_0^n \leqslant \mathbb{E}_i \bar{\tau}_0^n, \quad n \geqslant 0, \quad i \geqslant 1,$$

其中 $\bar{\tau}_0$ 为生灭过程 0 状态的首次击中时.

由此及文献 [1, 定理 4.44 和 4.55], 可以得到单死过程几种遍历性的充分条件.

定理 3.3 给定正则不可约单死 Q 矩阵 $Q = (q_{ij})$. 假定 $\sum_{k\geqslant 1} G_k = \infty$. 若上面定义的生灭 Q 矩阵对应的生灭过程遍历 (或者指数遍历, 或者强遍历), 则单死过程亦然. 等价地, 若

$$\sum_{i\geqslant 1} \frac{1}{q_{i,i-1}G_i} < \infty,$$

则单死过程遍历; 若 $M < \infty$, 则单死过程指数遍历; 若

$$\sum_{n\geqslant 1} G_n \sum_{k\geqslant n} \frac{1}{q_{k,k-1}G_k} < \infty,$$

则单死过程强遍历.

条件 "$\sum_{k\geqslant 1} G_k = \infty$" 保证上述单死过程和生灭过程同时常返 (参见后面的定理 4.1). 故此生灭过程是正则的.

4 常返性和回返 (灭绝) 概率

本节研究单死过程的常返性和回返 (灭绝) 概率. 不难证明下列事实:

$$\frac{G_k^{(m)}}{G_1^{(m)}} \leqslant \frac{1}{G_1^{(k)}}, \quad 1 \leqslant k \leqslant m.$$

定义

$$\widetilde{G}_n = \varlimsup_{m\to\infty} \frac{G_n^{(m)}}{G_1^{(m)}}, \quad n \geqslant 1. \tag{4.1}$$

如果下面条件成立:

$$\sum_{k\geqslant n+1} \frac{q_n^{(k)}}{G_1^{(k)}} < \infty, \quad n \geqslant 1, \tag{4.2}$$

则由 (4.2) 和 Fatou 引理推出

$$\widetilde{G}_n \leqslant \frac{1}{q_{n,n-1}} \sum_{k=n+1}^{\infty} q_n^{(k)} \widetilde{G}_k, \quad n \geqslant 1. \tag{4.3}$$

运用 (4.3), 文献 [10] 证明了关于单死过程常返性的如下结论.

定理 4.1 给定正则不可约单死 Q 矩阵 $Q = (q_{ij})$. 若对所有 $n \geqslant 1$, (3.1) 定义的 $G_n < \infty$ 且

$$\sum_{n\geqslant 1} G_n = \infty, \tag{4.4}$$

则此单死过程常返. 反之, 假定 (4.2) 成立, 若过程常返, 则 $\sum_{n\geqslant 1} \widetilde{G}_n = \infty$.

回到第 2 节的两个例子. 对生灭 Q 矩阵 (a_i, b_i), 有

$$\sum_{k\geqslant n+1} \frac{q_n^{(k)}}{G_1^{(k)}} = \frac{b_n}{G_1^{(n+1)}} = \frac{b_0}{\mu_n} < \infty, \quad n \geqslant 1$$

和

$$G_n = \widetilde{G}_n = \frac{\mu_1 a_1}{\mu_n a_n}, \quad n \geqslant 1.$$

故 (4.2) 成立且

$$\sum_{n\geqslant 1} G_n = \sum_{n\geqslant 1} \widetilde{G}_n = \sum_{n\geqslant 1} \frac{\mu_1 a_1}{\mu_n a_n} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{b_0}{\mu_n b_n}.$$

因此, 生灭过程常返当且仅当 $\sum_{n\geqslant 0} 1/(\mu_n b_n) = \infty$, 这是我们以前熟知的结论.

对例 2.7, 此时取常数 $b > 1$, 则

$$\sum_{k\geqslant n+1} \frac{q_n^{(k)}}{G_1^{(k)}} = \sum_{k\geqslant n+1} \frac{(b-1)^{k-1}}{b^{k-n}} = (b-1)^n < \infty, \quad n \geqslant 1$$

和

$$G_n = \widetilde{G}_n = (b-1)^{n-1}, \quad n \geqslant 1.$$

故 (4.2) 成立且

$$\sum_{n\geqslant 1} G_n = \sum_{n\geqslant 1} \widetilde{G}_n = \sum_{n\geqslant 1}(b-1)^{n-1},$$

该级数在 $b\geqslant 2$ 时发散, 在 $1<b<2$ 时收敛. 故过程常返当且仅当 $b\geqslant 2$. 从文献 [15, 定理 1.3] 也可以得到, 此唯一的单死过程常返当且仅当 $b\geqslant 2$.

对例 2.8, 此时取常数 $\beta>0$, 我们得到

$$\sum_{k\geqslant n+1} \frac{q_n^{(k)}}{G_1^{(k)}} = \frac{q_n^{(n+1)}}{F_n} + \frac{q_n^{(n+2)}}{F_{n+1}} = \frac{q_{n,n+2}}{F_n} + \frac{q_{n,n+2}}{F_{n+1}} < \infty, \quad n\geqslant 1$$

和

$$G_n = \widetilde{G}_n = \frac{1}{A^{n-1}}, \quad n\geqslant 1.$$

故 (4.2) 成立且

$$\sum_{n\geqslant 1} G_n = \sum_{n\geqslant 1} \widetilde{G}_n = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{A^{n-1}},$$

该级数在 $A\leqslant 1$ 时发散, 在 $A>1$ 时收敛. 故过程常返当且仅当 $A\leqslant 1$, 等价地, $\beta\leqslant 1/2$.

下面考虑单死过程的回返概率. 定义

$$G_0 = \frac{1}{q_0}\sum_{n\geqslant 1} q_0^{(n)} G_n, \quad G = \sum_{n\geqslant 1} G_n$$

和

$$\widetilde{G}_0 = \frac{1}{q_0}\sum_{n\geqslant 1} q_0^{(n)} \widetilde{G}_n, \quad \widetilde{G} = \sum_{n\geqslant 1} \widetilde{G}_n.$$

显然, $G_0\leqslant G$ 且 $\widetilde{G}_0\leqslant \widetilde{G}$. 文献 [10] 得到的单死过程回返概率相关结果如下.

定理 4.2 给定正则不可约单死 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$. 假定 (4.2) 成立, 则

$$\mathbb{P}_0(\sigma_0<\infty)\leqslant 1-\frac{\widetilde{G}_0}{\widetilde{G}}, \quad \mathbb{P}_n(\sigma_0<\infty)\leqslant 1-\frac{1}{\widetilde{G}}\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\widetilde{G}_k, \quad n\geqslant 1.$$

此外, 若还假定

$$\varliminf_{m\to\infty} \frac{1}{G_1^{(m)}} \sum_{1\leqslant j\leqslant k} G_j^{(m)} = \sum_{1\leqslant j\leqslant k} G_j, \quad k\geqslant 1, \tag{4.5}$$

则

$$\mathbb{P}_0(\sigma_0<\infty)\geqslant 1-\frac{G_0}{G}, \quad \mathbb{P}_n(\sigma_0<\infty)\geqslant 1-\frac{1}{G}\sum_{1\leqslant k\leqslant n} G_k, \quad n\geqslant 1.$$

若对所有 $n\geqslant 1$ 有极限 $\lim_{m\to\infty} G_n^{(m)}/G_1^{(m)}$ 存在且假设 (4.2) 成立, 则 $G_n=\widetilde{G}_n$ $(n\geqslant 0)$ 且 (4.5) 成立. 因此,

$$\mathbb{P}_0(\sigma_0<\infty)= 1-\frac{G_0}{G}, \quad \mathbb{P}_n(\sigma_0<\infty)= 1-\frac{1}{G}\sum_{1\leqslant n\leqslant k} G_n, \quad n\geqslant 1.$$

故 $\mathbb{P}_i(\sigma_0<\infty)=1$ $(i\geqslant 1)$ 当且仅当 $\mathbb{P}_0(\sigma_0<\infty)=1$, 等价地, 当且仅当 $G=\infty$. 顺便提一句, 此时, 由控制收敛定理知, (3.2) 或者 (4.3) 中等号成立. 参见第 2 节的三个例子.

此节最后, 考虑单死过程的一些数字特征. 定义

$$Z_{m,n}=\sum_{n+1\leqslant i\leqslant m}G_i^{(m)},\quad 0\leqslant n<m.$$

约定当 $n\geqslant m$ 时, $Z_{m,n}=\sum_{n+1\leqslant i\leqslant m}G_i^{(m)}=0$, 即 $\sum_{\emptyset}=0$. 文献 [11] 的两个相关结果如下.

定理 4.3 给定正则不可约单死 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$, 则对满足 $m>n$ 的非负整数 m 和 n,

(i) 当 $k\geqslant n$ 时,

$$\mathbb{P}_k(\tau_n<\tau_m)=\frac{Z_{m,k}}{Z_{m,n}},\quad \mathbb{P}_k(\tau_m<\tau_n)=1-\frac{Z_{m,k}}{Z_{m,n}};$$

(ii) 当 $0\leqslant k<n$ 时,

$$\mathbb{P}_k(\tau_m<\tau_n)=Z_{n,k}\mathbb{P}_{n-1}(\tau_m<\tau_n)+\frac{Z_{n,k}G_n^{(m)}}{Z_{m,n}}-\frac{Z_{m,k}}{Z_{m,n}}+1.$$

对于 $\mathbb{P}_k(\sigma_m<\tau_n)$, 显然当 $k\neq m$ 时, $\mathbb{P}_k(\sigma_m<\tau_n)=\mathbb{P}_k(\tau_m<\tau_n)$; 当 $k\neq n$ 时, $\mathbb{P}_k(\sigma_n<\tau_m)=\mathbb{P}_k(\tau_n<\tau_m)$. 在单死过程遍历的条件下有更细致的结论.

定理 4.4 给定正则不可约单死 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$, 则对满足 $m>n$ 的非负整数 m 和 n,

(i) 当单死过程遍历时, 则

$$\mathbb{P}_n(\tau_m<\sigma_n)=\frac{q_{n,n-1}c_n}{q_nc_mZ_{m,n}},\quad \mathbb{P}_n(\sigma_n<\tau_m)=1-\frac{q_{n,n-1}c_n}{q_nc_mZ_{m,n}},\quad n\geqslant 1,$$
$$\mathbb{P}_0(\tau_m<\sigma_0)=\frac{c_0}{q_0c_mZ_{m,0}},\quad \mathbb{P}_0(\sigma_0<\tau_m)=1-\frac{c_0}{q_0c_mZ_{m,0}},$$

进而, 下式成立:

$$\mathbb{P}_{n-1}(\tau_m<\tau_n)=\frac{1}{Z_{m,n}}\left(\frac{c_n}{c_m}+\frac{1}{q_{n,n-1}}\sum_{j=n+1}^{m-1}q_{nj}Z_{m,j}\right)-\frac{q_n^{(n+1)}}{q_{n,n-1}};$$

(ii) $\mathbb{P}_m(\tau_m<\sigma_m)=1$, $\mathbb{P}_m(\sigma_m<\tau_m)=0$ 且

$$\mathbb{P}_m(\sigma_m<\tau_n)=1-\frac{q_{m,m-1}}{q_mZ_{m,n}},\quad \mathbb{P}_m(\tau_n<\sigma_m)=\frac{q_{m,m-1}}{q_mZ_{m,n}}.$$

5 零流入

给定 Q 矩阵 $Q=(q_{ij}:i,j\in\mathbb{Z}_+)$, 若对某个 (等价地, 对所有) $\lambda>0$, 方程

$$\lambda y_i=\sum_{j=0}^{\infty}y_jq_{ji},\quad y_i\geqslant 0,\quad i\in\mathbb{Z}_+,\quad 且\quad \sum_{i=0}^{\infty}y_i<\infty \tag{5.1}$$

只有平凡解, 则称该 Q 矩阵为零流入的.

在 Q 矩阵决定的 Q 过程中, 满足 Kolmogorov 向后方程的称为 BQ 过程, 满足 Kolmogorov 向前方程的称为 FQ 过程. 由文献 [1, 第 75 页, 定理 2.21] 知, 最小 Q 过程总存在且既是 BQ 过程也是 FQ 过程. 由文献 [1, 第 101 页, 定理 3.6] 知, FQ 过程唯一当且仅当最小 Q 过程不中断或者 Q 矩阵零流入.

本节介绍单死过程的零流入判别准则. 文献 [4] 研究了无吸收边界的保守单死 Q 矩阵零流入的判别准则; 文献 [5] 则是将单死 Q 矩阵零流入的判别准则推广至非保守情形, 而且将保守和非保守两种情形下的判别相统一. 下面只介绍保守情形的答案.

定理 5.1 给定全稳定保守单死 Q 矩阵 $Q=(q_{ij}:i,j\in\mathbb{Z}_+)$, 则 Q 矩阵是零流入的当且仅当 $\sum_{\ell=0}^{\infty}\overline{m}_\ell=\infty$, 其中

$$\overline{m}_0=0,\quad \overline{m}_\ell=\frac{1}{q_{\ell,\ell-1}}\left(1+\sum_{n=0}^{\ell-1}q_n^{(\ell)}\overline{m}_n\right),\quad \ell\geqslant 1.$$

我们有如下等式成立:

$$\overline{m}_\ell=\frac{1}{q_{\ell,\ell-1}}\sum_{k=1}^{\ell}G_k^{(\ell)},\quad \ell\geqslant 1. \tag{5.2}$$

用数学归纳法证明之. 当 $\ell=1$ 时,

$$\overline{m}_1=\frac{1}{q_{10}}\left(1+\sum_{n=0}^{0}q_n^{(1)}\overline{m}_n\right)=\frac{1}{q_{10}}=\frac{1}{q_{10}}\sum_{\ell=1}^{1}G_\ell^{(1)}.$$

所以, (5.2) 在 $\ell=1$ 时成立. 假设直至 $\ell=i$ 时 (5.2) 都成立. 考虑 $\ell=i+1$ 的情形. 此时,

$$\begin{aligned}\overline{m}_{i+1}&=\frac{1}{q_{i+1,i}}\left(1+\sum_{n=0}^{i}q_n^{(i+1)}\overline{m}_n\right)=\frac{1}{q_{i+1,i}}\left(1+\sum_{n=1}^{i}q_n^{(i+1)}\overline{m}_n\right)\\&=\frac{1}{q_{i+1,i}}\left(1+\sum_{n=1}^{i}q_n^{(i+1)}\frac{1}{q_{n,n-1}}\sum_{k=1}^{n}G_k^{(n)}\right)\\&=\frac{1}{q_{i+1,i}}\left(1+\sum_{k=1}^{i}\sum_{n=k}^{i}\frac{G_k^{(n)}q_n^{(i+1)}}{q_{n,n-1}}\right)\\&=\frac{1}{q_{i+1,i}}\left(1+\sum_{k=1}^{i}G_k^{(i+1)}\right)\\&=\frac{1}{q_{i+1,i}}\sum_{k=1}^{i+1}G_k^{(i+1)}.\end{aligned}$$

因此, 在 $\ell=i+1$ 的情形, (5.2) 也成立. 由归纳法知, (5.2) 对所有 $\ell\geqslant 1$ 都成立. 进而得到

$$\sum_{\ell=0}^{\infty}\overline{m}_\ell=\sum_{\ell=1}^{\infty}\overline{m}_\ell=\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{1}{q_{\ell,\ell-1}}\sum_{k=1}^{\ell}G_k^{(\ell)}=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=k}^{\infty}\frac{G_k^{(\ell)}}{q_{\ell,\ell-1}}=S.$$

因此, 结合定理 2.5 和 5.1, 我们得到下面结论.

定理 5.2 给定正则不可约单死 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$, 则过程强遍历当且仅当该 Q 矩阵非零流入 (即单流入).

由定理 5.1 可直接得到如下两个推论.

推论 5.3 给定全稳定保守单死 Q 矩阵 $Q=(q_{ij}:i,j\in\mathbb{Z}_+)$. 若 $\sum_{k=1}^{\infty}q_{k,k-1}^{-1}=\infty$, 特别地, 若 $\sup_{k\geqslant 1}q_{k,k-1}<\infty$, 则该单死 Q 矩阵零流入. 若存在 $k_0\geqslant 1$ 使得当 $k\geqslant k_0$ 都有 $q_{k-1}^{(k)}\geqslant q_{k,k-1}$ 成立, 则该 Q 矩阵亦零流入.

推论 5.4 给定全稳定保守生灭 Q 矩阵 $Q=(a_i,b_i)$, 则该生灭 Q 矩阵零流入当且仅当

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\mu_k a_k}=\infty.$$

上面关于生灭过程的结果是我们熟知的. 注意

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\mu_k a_k}=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\mu_k b_k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\mu_k b_k}\sum_{n=k+1}^{\infty}\mu_n=S.$$

关于单死过程的平稳分布, 则有如下熟知的结论.

定理 5.5 给定全稳定保守单死 Q 矩阵 $Q=(q_{ij}:i,j\in\mathbb{Z}_+)$, 则该 Q 矩阵有唯一不变测度 (κ_i) 如下:

$$\kappa_0=1,\quad \kappa_k=\frac{1}{q_{k,k-1}}\sum_{n=0}^{k-1}q_n^{(k)}\kappa_n,\quad k\geqslant 1.$$

由此得到单死过程遍历性的另一个判别准则.

定理 5.6 给定不可约正则单死 Q 矩阵 $Q=(q_{ij}:i,j\in\mathbb{Z}_+)$, 则对应的过程遍历当且仅当

$$\kappa:=\sum_{i\geqslant 0}\kappa_i<\infty,$$

此时该过程的平稳分布 (π_i) 为

$$\pi_i=\frac{\kappa_i}{\kappa},\quad i\geqslant 0.$$

实际上, 可以证明 $\kappa=1+D$, 所以, 遍历性的两个判别准则 (定理 2.5 和 5.6) 是等价的. 下面来证明 $\kappa=1+D$.

首先, 有如下等式成立:

$$\kappa_k=\frac{1}{q_{k,k-1}}\sum_{\ell=1}^{k}q_0^{(\ell)}G_\ell^{(k)},\quad k\geqslant 1. \tag{5.3}$$

我们用数学归纳法证明. 当 $k=1$ 时, 显然有

$$\kappa_1=\frac{1}{q_{10}}\sum_{n=0}^{0}q_n^{(1)}\kappa_n=\frac{q_0^{(1)}}{q_{10}}=\frac{1}{q_{10}}\sum_{\ell=1}^{1}q_0^{(\ell)}G_\ell^{(1)}.$$

所以, (5.3) 在 $k=1$ 时成立. 假设直至 $k=i$ 时 (5.3) 都成立. 考虑 $k=i+1$ 的情形. 由 (1.2) 推出

$$\begin{aligned}
\kappa_{i+1}&=\frac{1}{q_{i+1,i}}\sum_{n=0}^{i}q_n^{(i+1)}\kappa_n=\frac{1}{q_{i+1,i}}\left(q_0^{(i+1)}+\sum_{n=1}^{i}q_n^{(i+1)}\kappa_n\right)\\
&=\frac{1}{q_{i+1,i}}\left(q_0^{(i+1)}+\sum_{n=1}^{i}q_n^{(i+1)}\frac{1}{q_{n,n-1}}\sum_{\ell=1}^{n}q_0^{(\ell)}G_\ell^{(n)}\right)\\
&=\frac{1}{q_{i+1,i}}\left(q_0^{(i+1)}+\sum_{\ell=1}^{i}q_0^{(\ell)}\sum_{n=\ell}^{i}\frac{G_\ell^{(n)}q_n^{(i+1)}}{q_{n,n-1}}\right)\\
&=\frac{1}{q_{i+1,i}}\left(q_0^{(i+1)}+\sum_{\ell=1}^{i}q_0^{(\ell)}G_\ell^{(i+1)}\right)\\
&=\frac{1}{q_{i+1,i}}\sum_{\ell=1}^{i+1}q_0^{(\ell)}G_\ell^{(i+1)}.
\end{aligned}$$

因此, 在 $k=i+1$ 的情形, (5.3) 也成立. 由归纳法知, (5.3) 对所有 $k\geqslant 1$ 都成立.

其次, 由 (5.3) 可以直接推出

$$\begin{aligned}\kappa&=\sum_{i\geqslant 0}\kappa_i=1+\sum_{i\geqslant 1}\kappa_i=1+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{q_{i,i-1}}\sum_{\ell=1}^{i}q_0^{(\ell)}G_\ell^{(i)}\\&=1+\sum_{\ell=1}^{\infty}q_0^{(\ell)}\sum_{i=\ell}^{\infty}\frac{G_\ell^{(i)}}{q_{i,i-1}}=1+D.\end{aligned}$$

更直接的证明是, 由 $\pi_0=1/(q_0\mathbb{E}_0\sigma_0)$ 知, $\kappa=q_0\mathbb{E}_0\sigma_0$; 而在第 2 节中, 我们知道, $1+D=q_0\mathbb{E}_0\sigma_0$, 因此, $\kappa=1+D$.

总之, 由以上讨论可知, 两个遍历性准则等价. 另外, 由 (2.7) 可以得到

$$c_0=\kappa,\quad c_i=\frac{\kappa}{q_{i,i-1}\kappa_i},\quad i\geqslant 1.$$

对生灭过程例 2.6 而言, 正是

$$\kappa_0=1=\mu_0,\quad \kappa_k=\frac{b_0b_1\cdots b_{k-1}}{a_1a_2\cdots a_k}=\mu_k,\quad k\geqslant 1$$

过程遍历当且仅当 $\kappa\ (=\mu)<\infty$, 此时平稳分布 (π_i) 为 $\pi_i=\kappa_i/\kappa=\mu_i/\mu\ (i\geqslant 0)$.

对例 2.7 在 $b>1$ 的情形, 计算得到

$$\kappa_k=\frac{1}{(b-1)^k},\quad k\geqslant 0.$$

所以, 过程遍历当且仅当 $b>2$, 此时 $\kappa=(b-1)/(b-2)$, 平稳分布 (π_k) 为 $\pi_k=(b-2)/(b-1)^{k+1}$ $(k\geqslant 0)$. 同第 2 节的结论.

6 一类扩展分枝过程

原始的分枝过程是这样描述的. 令 $\alpha>0$, $(p_j;j\geqslant 0)$ 是 $\mathbb{Z}_+$ 上一概率分布. 分枝过程具有这样的转移速率 Q 矩阵: 死亡速率 $\alpha ip_0: i\to i-1\ (i\geqslant 1)$, 增长速率 $\alpha ip_{k+1}: i\to i+k\ (k\geqslant 1,\ i\in\mathbb{Z}_+)$. 注意此过程在状态 0 处被吸收. 文献 [15] 介绍了一类扩展的分枝过程, 其 Q 矩阵如下:

$$q_{ij}=\begin{cases}q_{0j}, & j>i=0,\\ -q_0, & j=i=0,\\ r_ip_0, & j=i-1,\quad i\geqslant 1,\\ r_ip_{k+1}, & j=i+k,\quad i,k\geqslant 1,\\ -r_i(1-p_1), & j=i\geqslant 1,\\ 0, & \text{其他的 } i,j\in\mathbb{Z}_+,\end{cases}\tag{6.1}$$

其中对所有 $i\geqslant 1$ 有 $r_i>0$ 且 $0<q_0:=\sum_{j\geqslant 1}q_{0j}<\infty$.

为陈述结果, 定义两个非负向量 $\boldsymbol{a}=(a_n;n\geqslant 2)$ 和 $\boldsymbol{b}=(b_n;n\geqslant 2)$ 的卷积如下:

$$(\boldsymbol{a}*\boldsymbol{b})_n=\sum_{2\leqslant m\leqslant n}a_{n+2-m}b_m,\quad n\geqslant 2.$$

再定义 $f_n=\sum_{k\geqslant n}p_k\,(n\geqslant 0)$ 和 $\boldsymbol{f}=(f_n;n\geqslant 2)$. 记 $\boldsymbol{f}$ 的 n 重卷积为 $\boldsymbol{f}^{*n}$. 约定 $\boldsymbol{f}^{*1}=\boldsymbol{f}$. 基于定理 2.5, 文献 [10] 得到的相关结果如下.

定理 6.1 假定 (6.1) 定义的 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$ 正则不可约, 则过程遍历当且仅当

$$\sum_{\ell\geqslant 1}\frac{1}{r_\ell}\bigg(q_0^{(\ell)}+\sum_{1\leqslant k\leqslant \ell-1}\frac{(\boldsymbol{f}^{*k}*\boldsymbol{q})_{\ell-k+1}}{p_0^k}\bigg)<\infty,$$

过程强遍历当且仅当

$$\sum_{\ell\geqslant 1}\frac{1}{r_\ell}\bigg(1+\sum_{1\leqslant k\leqslant \ell-1}\frac{(\boldsymbol{f}^{*k}*\boldsymbol{1})_{\ell-k+1}}{p_0^k}\bigg)<\infty,$$

其中 $\boldsymbol{1}=(1,1,1,\ldots)$ 和 $\boldsymbol{q}=(q_0^{(n-1)};n\geqslant 2)$.

不难验证

$$q_i^{(k)}=r_i\sum_{j=k}^{\infty}p_{j-i+1}=r_i\sum_{j=k-i+1}^{\infty}p_j=r_if_{k-i+1},\quad k>i\geqslant 1$$

和

$$G_n^{(k)}=\frac{1}{p_0}\sum_{\ell=n+1}^{k}f_{\ell-n+1}G_\ell^{(k)},\quad 1\leqslant n<k,$$

特别地, $G_{k-1}^{(k)}=f_2/p_0\ (k\geqslant 2)$. 定义 $M_1:=\sum_{k=1}^{\infty}kp_k$ 和 $\Gamma:=\sum_{k\geqslant 1}kp_{k+1}$. 注意 $M_1=\sum_{k\geqslant 1}f_k$, $\Gamma=\sum_{k\geqslant 2}f_k=M_1-f_1=M_1+p_0-1$.

由卷积的定义可以推出 $\boldsymbol{a}*\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}*\boldsymbol{a}$ 和 $(\boldsymbol{a}*\boldsymbol{b})*\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}*(\boldsymbol{b}*\boldsymbol{c})$. 实际上, 对任意 $n\geqslant 2$, 有

$$(\boldsymbol{a}*\boldsymbol{b})_n=\sum_{2\leqslant m\leqslant n}a_{n+2-m}b_m=\sum_{2\leqslant \ell\leqslant n}b_{n+2-\ell}a_\ell=(\boldsymbol{b}*\boldsymbol{a})_n$$

和

$$\begin{aligned}((\boldsymbol{a}*\boldsymbol{b})*\boldsymbol{c})_n&=\sum_{2\leqslant m\leqslant n}(\boldsymbol{a}*\boldsymbol{b})_{n+2-m}c_m=\sum_{2\leqslant m\leqslant n}\sum_{2\leqslant \ell\leqslant n+2-m}a_{n+4-m-\ell}b_\ell c_m\\&=\sum_{2\leqslant m\leqslant n}\sum_{m\leqslant k\leqslant n}a_{n+2-k}b_{k+2-m}c_m=\sum_{2\leqslant k\leqslant n}a_{n+2-k}\sum_{2\leqslant m\leqslant k}b_{k+2-m}c_m\\&=\sum_{2\leqslant k\leqslant n}a_{n+2-k}(\boldsymbol{b}*\boldsymbol{c})_k=(\boldsymbol{a}*(\boldsymbol{b}*\boldsymbol{c}))_n.\end{aligned}$$

当 $a_n\leqslant b_n\ (n\geqslant 2)$ 时, 记为 $\boldsymbol{a}\leqslant\boldsymbol{b}$. 对 $\boldsymbol{a}\leqslant\boldsymbol{b}$, 则有 $\boldsymbol{a}*\boldsymbol{c}\leqslant\boldsymbol{b}*\boldsymbol{c}$. 事实上, 对任意 $n\geqslant 2$, 有

$$(\boldsymbol{a}*\boldsymbol{c})_n=\sum_{2\leqslant m\leqslant n}a_{n+2-m}c_m\leqslant\sum_{2\leqslant m\leqslant n}b_{n+2-m}c_m=(\boldsymbol{b}*\boldsymbol{c})_n.$$

定理 6.1 的证明基于定理 2.5 和如下重要引理 (参见文献 [10]).

引理 6.2 给定一非负向量 $\boldsymbol{g}=(g_n;n\geqslant 2)$, 则

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant k-1}g_{n+1}G_n^{(k)}=\sum_{1\leqslant n\leqslant k-1}\frac{(\boldsymbol{f}^{*n}*\boldsymbol{g})_{k-n+1}}{p_0^n}.$$

由定理 5.6、(5.3) 和引理 6.2, 可以推出如下关于平稳分布的求法.

推论 6.3 假定 (6.1) 定义的 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$ 正则不可约. 当过程遍历时, 平稳分布为 κ_i/κ $(i\geqslant 0)$, 其中 $\kappa_0=1$,

$$\kappa_\ell=\frac{1}{r_\ell p_0}\bigg(q_0^{(\ell)}+\sum_{1\leqslant k\leqslant \ell-1}\frac{(\boldsymbol{f}^{*k}*\boldsymbol{q})_{\ell-k+1}}{p_0^k}\bigg),\quad \ell\geqslant 1$$

及 $\kappa=\sum_{i\geqslant 0}\kappa_i$.

回到例 2.7 ($b>2$ 的情形). 取定区间 $(0,1-1/(b^2-b+1))$ 上一个正常数 a, 则此时例 2.7 是 (6.1) 的特例: $r_i=(b-1)/(ab)$, $p_0=a$, $p_j=a/b^j$ $(j\geqslant 2)$ 和 $p_1=1-a-a/(b^2-b)$. 进而,

$$f_n=\frac{a}{(b-1)b^{n-1}},\quad n\geqslant 2;\quad q_0^{(\ell)}=\frac{1}{b^\ell},\quad \ell\geqslant 1.$$

有数学归纳法和组合公式 $\sum_{n=0}^{k}C_{m+n}^{m}=C_{m+k+1}^{m+1}$, 可以证明

$$(\boldsymbol{f}^{*k}*\boldsymbol{q})_{\ell-k+1}=\frac{a^k}{(b-1)^k b^\ell}C_{\ell-1}^{k},\quad 1\leqslant k\leqslant \ell-1. \tag{6.2}$$

因此, 由 (6.2) 推出

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant \ell-1}\frac{(\boldsymbol{f}^{*k}*\boldsymbol{q})_{\ell-k+1}}{p_0^k}=\frac{1}{b(b-1)^{\ell-1}}-\frac{1}{b^\ell}.$$

进而知,

$$\sum_{\ell\geqslant 1}\frac{1}{r_\ell}\bigg(q_0^{(\ell)}+\sum_{1\leqslant k\leqslant \ell-1}\frac{(\boldsymbol{f}^{*k}*\boldsymbol{q})_{\ell-k+1}}{p_0^k}\bigg)=\frac{a}{b-2}<\infty.$$

另外, 我们得到

$$\kappa_\ell=\frac{1}{(b-1)^\ell},\quad \ell\geqslant 1;\quad \kappa=\frac{b-1}{b-2}.$$

因此, 平稳分布为

$$\pi_\ell=\frac{b-2}{(b-1)^{\ell+1}},\quad \ell\geqslant 0.$$

同第 2 节中的相应结论. 注意到

$$(\boldsymbol{f}*\boldsymbol{1})_\ell=\frac{a}{(b-1)^2}\bigg(1-\frac{1}{b^{\ell-1}}\bigg).$$

由上式推出

$$\sum_{\ell\geqslant 1}\frac{1}{r_\ell}\bigg(1+\sum_{1\leqslant k\leqslant \ell-1}\frac{(\boldsymbol{f}^{*k}*\boldsymbol{1})_{\ell-k+1}}{p_0^k}\bigg)\geqslant\sum_{\ell\geqslant 2}\frac{1}{r_\ell}\cdot\frac{(\boldsymbol{f}*\boldsymbol{1})_\ell}{p_0}=\infty.$$

所以, 由定理 6.1 得到同样结论, 例 2.7 对应的过程遍历但非强遍历. 注意到

$$M_1=\frac{a}{(b-1)^2}+1-a.$$

故 $M_1\leqslant 1$ 当且仅当 $b\geqslant 2$. 因此, 由文献 [15, 定理 1.2(i)] 知, 在 $b>2$ 时, 过程唯一; 由文献 [15, 定理 1.2(i) 和 1.3(i)] 知, 在 $b=2$ 时, 过程唯一且零常返; 由文献 [15, 定理 1.2(ii) 和 1.3(i)] 知, 在 $1<b<2$ 时, 过程唯一且非常返.

对于例 2.8 ($\beta > 0$ 的情形), 可以看作 (6.1) 的特例: $r_i = q_{i,i-1}(1+\beta), p_0 = 1/(1+\beta), p_3 = \beta/(1+\beta)$, 其他的 $p_j = 0$. 注意到此时 $M_1 \leqslant 1$ 当且仅当 $\beta \leqslant 1/2$. 因此, 由文献 [15, 定理 1.2(i)] 知, 当 $\beta \leqslant 1/2$ 时, 过程唯一; 而由文献 [15, 定理 1.3(i)] 知, 在过程唯一的假定下, 过程常返当且仅当 $\beta \leqslant 1/2$. 结论同第 4 节的讨论. 特别地, 若 $q_{i,i-1} = i^\theta$ ($i \geqslant 1$), 当 $\beta < 1/2$ (即 M_1 <1) 时, 过程强遍历当且仅当 $\theta > 1$; 当 $\beta = 1/2$ (即 $M_1 = 1$) 时, 若 $\theta > 2$, 则过程强遍历, 若 $0 < \theta \leqslant 1$, 过程非强遍历 (参见文献 [13, 例 3.1]).

关于此类扩展分枝过程的研究, 还可以参见文献 [13,16–19].

7 总结

对单死过程, 我们介绍了首次击中时一阶矩的显式表示以及一些数字特征的概率意义, 在此基础上给出了其遍历和强遍历的显式判别准则、指数遍历的一个显式充分条件、单死过程常返性的显式充分条件和必要条件以及回返 (灭绝) 概率的表示; 同时给出了单死过程零流入的判别准则、遍历性的另一个等价的判别准则以及非零流入与强遍历的等价性质等. 下面对我们所关心的单死过程的其他问题总结如下.

(1) 零流出及唯一性.

这是过程的经典问题, 我们在此问题上还没有进展. 对随机单调的单死过程, 此时有单生过程为其对偶, 脚注 1) 证明了该单死过程等价于对偶的单生过程非强遍历. 这只是一类单死过程的答案, 离此问题最终解决还远远不够.

(2) 常返性.

我们得到的是单生过程常返的显式充分条件和必要条件, 虽然在一些情形是充分必要的, 但离判别准则还有距离.

(3) 指数遍历性.

我们给出了单死过程指数遍历的显式充分条件, 离判别准则还有很大距离. 最近我们将单死过程的研究方法应用到树上生灭过程, 在其首次击中时的高阶矩方面得到显式表示 (参见文献 [20]), 启发我们研究单死过程首次击中时的高阶矩, 得到了显式表示, 由此可以得到单死过程指数遍历的必要条件和代数式遍历的判别准则 (参见文献 [21]), 进一步可以得到指数遍历一个变分式判别准则 (此结果还在整理中). 但离如生灭过程一样的指数遍历显式判别准则还有距离. 当然此类问题还包括 $-Q$ 的特征值估计, 即便在有限状态也是很有意义的, 这些问题的研究还都处在摸索状态.

(4) 积分型泛函.

基于文献 [22] 对生灭过程和文献 [23,24] 对单生过程的积分型泛函的研究, 可以考虑对单死过程进行相应研究. 最近的研究表明, 至少此方法适用于研究单死过程首次击中时的高阶矩. 至于逗留时和首次击中时的分布和渐近分布等, 都是待研究的问题.

(5) 拟平稳分布.

定理 2.9 给出的条件, 在生灭过程情形是存在唯一拟平稳分布的充分必要条件, 在单死过程情形, 答案是什么? 拟平稳分布这一方向, 对单死过程有诸多问题待研究, 因为即便是对生灭过程, 最近还在陆续给出答案.

致谢 感谢审稿人提出的宝贵意见和建议.

参考文献

1 Chen M F. From Markov Chains to Non-Equilibrium Particle Systems, 2nd ed. Singapore: World Scientific, 2004
2 Yan S J, Chen M F. Multidimensional Q-processes. Chin Ann Math Ser B, 1986, 7: 90–110
3 张余辉. 单生过程的研究进展. 中国科学: 数学, 2019, 49: 621–642
4 Chen A Y, Pollett P, Zhang H J, et al. Uniqueness criteria for continuous-time Markov chains with general transition structures. Adv Appl Probab, 2005, 37: 1056–1074
5 王玲娣, 张余辉. 单生 (死) Q 矩阵零流出 (入) 的判别准则. 数学学报, 2014, 57: 681–692
6 张余辉. 单死过程平稳分布的新表示. 北京师范大学学报, 2016, 52: 139–140
7 Li Y R, Pakes A G, Li J, et al. The limit behavior of dual Markov branching processes. J Appl Probab, 2008, 45: 176–189
8 Athreya K B, P E. Branching Processes. Berlin: Springer, 1972
9 Asmussen S, Hering H. Branching Processes. Basel: Birkhäuser, 1983
10 Zhang Y H. Criteria on ergodicity and strong ergodicity of single death processes. Front Math China, 2018, 13: 1215–1243
11 闫艳艳, 张余辉. 单死过程一些数字特征的概率意义. 北京师范大学学报, 2018, 54: 695–700
12 Martínez S, San Martín J, Villemonais D. Existence and uniqueness of a quasistationary distribution for Markov processes with fast return from infinity. J Appl Probab, 2014, 51: 756–768
13 Mao Y H, Zhang Y H. Exponential ergodicity for single-birth processes. J Appl Probab, 2004, 41: 1022–1032
14 Chen M F. Explicit bounds of the first eigenvalue. Sci China Ser A, 2000, 43: 1051–1059
15 Chen R R. An extended class of time-continuous branching processes. J Appl Probab, 1997, 34: 14–23
16 Chen A Y. Ergodicity and stability of generalised Markov branching processes with resurrection. J Appl Probab, 2002, 39: 786–803
17 Zhang Y H. Strong ergodicity for single-birth processes. J Appl Probab, 2001, 38: 270–277
18 吴波, 张余辉. 一维 Brusselator 模型. 应用概率统计, 2005, 21: 225–234
19 林祥, 张汉君. 一类分支过程的收敛性. 数学物理学报, 2006, 26: 897–905
20 Zhang Y H. Moments of first hitting times for birth-death processes on trees. Front Math China, 2019, 14: 833–854
21 Zhang Y H, Zhou X F. High order moments of first hitting times for single death processes. Front Math China, 2019, 14: 1037–1061
22 王梓坤. 随机过程通论 (第 3 版, 下卷). 北京: 北京师范大学出版社, 2010
23 Zhang J K. On the generalized birth and death processes (I): The numeral introduction, the functional of integral type and the distributions of runs and passage times. Acta Math Sci Ser B Engl Ed, 1984, 4: 191–209
24 Zhang J K. On the generalized birth and death processes (II): The stay time, limit theorem and ergodic property. Acta Math Sci Ser B Engl Ed, 1986, 6: 1–13

On stability of single death processes

Yuhui Zhang

Abstract Single birth processes and single death ones are the classical asymmetric Markov processes, on which the investigation is more difficult than that on symmetric ones. In the past three decades, the investigation on single birth processes is fruitful. But the results on single death processes are almost empty. In this paper, we introduce our recent progress on single death processes. We present the explicit representation for the first hitting times and the probabilistic meanings of some numerical characteristics of single death processes. Based on these results, the criteria on ergodicity and strong ergodicity, sufficient or necessary conditions for recurrence and an explicit sufficient condition for exponential ergodicity as well as presentation of returning probability of single death processes, are obtained respectively. These assertions are also applied to an extended class of branching processes.

Keywords **single death processes, branching processes, ergodicity**

MSC(2010) 60J60

doi: 10.1360/N012018-00234