单生过程 separation cutoff 的基于特征值的判别准则*

毛永华　张伟为†　张余辉

(北京师范大学数学科学学院，数学与复杂系统教育部重点实验室，100875，北京)

摘要　对于时间逆具有随机单调性的以$\{0,1,\cdots,m_n\}$ ($\{m_n\}$为关于n单调增的自然数列)为状态空间且从0出发的单生过程族，利用其负转移速率矩阵第一非零特征值的正性及最快强平稳时的任意阶矩，可以由转移速率矩阵的特征值表示这些性质，得到该族马氏过程 separation cutoff 存在的一个基于特征值的判别准则，验证了 Peres 的乘积条件对于此类单生过程成立.

关键词　单生过程；随机单调；separation cutoff；强平稳对偶；最快强平稳时；特征值

中图分类号　O211.62　　**DOI**：10.16360/j.cnki.jbnuns.2019.06.001

0　引言

给定一个马氏链，其概率分布随时间增长收敛到平稳分布.但在用有限马氏链逼近无穷马氏链过程中，有一种突变的现象尤其受到关注，即本文研究的 cutoff 现象.

cutoff 现象是指一族遍历的马氏过程的概率分布收敛到平稳分布的收敛速度随状态数目的增长而发生突变的现象.它有很多实际应用，例如在马氏链 Monte Carlo 模拟中，可选取发生 cutoff 现象的临界时间作为模拟时间，从而提高工作效率.

Diaconis[1]首先发现并研究了 cutoff 现象，发现在一些情形下，cutoff 现象是由主特征值λ_1的高重数引起的.他提出了如何判断一族有限马氏链是否产生 cutoff 现象的问题. 2004 年 Peres[2]证明了一族可逆的马氏链发生 cutoff 现象的必要条件是

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_1^{(n)}\tau_{\mathrm{mix}}^{(n)}=\infty,$$

此式称为乘积条件，其中$\lambda_1^{(n)}$为相应$-Q^{(n)}$的第一非零特征值，$\tau_{\mathrm{mix}}^{(n)}$为马氏链$X^{(n)}=\{X_t^{(n)}\}_{t\geqslant 0}$的混合时，即

$$\tau_{\mathrm{mix}}^{(n)}=\inf\{t\geqslant 0:\|\mathbf{P}(X_t^{(n)}\in\cdot)-\nu^{(n)}(\cdot)\|_{\mathrm{TV}}\leqslant\frac{1}{4}\},$$

此处$\nu^{(n)}$为$X^{(n)}$的平稳分布，$\|\cdot\|_{\mathrm{TV}}$为全变差距离；并且猜测，对于大部分可逆的过程，这个条件也是充分的.本文对于一类单生过程(为不可逆过程)验证了 Peres 的猜想.

对有限状态空间S上的2个正概率测度μ和ν，定义其 separation 为

$$\mathrm{sep}(\mu,\nu)=\max_{i\in S}\{1-\frac{\mu_i}{\nu_i}\}.$$

此概念最早由文献[3]引入，而后得到广泛研究.应用于有限遍历过程，则有$\lim\limits_{t\to\infty}\mathrm{sep}(\gamma(t),\nu)=0$，这里$\gamma(t)$为过程$t$时刻的分布，$\nu$为平稳分布.对于有限状态空间$\{0,1,\cdots,m_n\}$，令$X^{(n)}$为其上遍历马氏链，记$\gamma^{(n)}(t)$是$X^{(n)}$在$t$时刻的分布，$\nu^{(n)}$是$X^{(n)}$的平稳分布.如果存在常数$c>0$和时间列$\{t_n\}_{n\geqslant 1}$使得

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{sep}(\gamma^{(n)}(ct_n),\nu^{(n)})=\begin{cases}1, & \text{当 } c<1,\\ 0, & \text{当 } c>1\end{cases}$$

成立，则称这族马氏链 separation cutoff 现象发生，或者说存在 separation cutoff.

Diaconis 等[4]研究得到：对于从状态0出发的有限状态空间$\{0,1,2,\cdots,m_n\}$上连续时间生灭过程$X^{(n)}$，这族生灭过程$\{X^{(n)}\}_{n\geqslant 1}$的 separation cutoff 现象发生(或者说，存在)的充分必要条件为

* 国家自然科学基金资助项目(11571043，11771047，11871008)

† 通信作者，e-mail：201321130173@mail.bnu.edu.cn

收稿日期：2018-12-26

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_1^{(n)}\mathbf{E}\tau^{(n)}=\infty, \tag{1}$$

式中 $\tau^{(n)}$ 为生灭过程 $X^{(n)}$ 的最快强平稳时(最快强平稳时的定义见下节)，满足

$$\mathbf{E}\tau^{(n)}=\sum_{i=1}^{m_n}\frac{1}{\lambda_i^{(n)}},$$

这里 $\lambda_i^{(n)}(i=1,2,3,\cdots,m_n)$ 为负转移速率矩阵 $-\boldsymbol{Q}^{(n)}$ 的非零特征值.式(1)还等价于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\mathbf{E}\tau^{(n)})^2}{\mathrm{Var}(\tau^{(n)})}=\infty,$$

参见文献[4]和[5].对于离散时间随机单调的情形有平行结论,证明与连续时间的相似,部分证明见文献[6]的附录.

状态空间$\{0,1,2,\cdots,N\}(N\leqslant\infty)$上连续时间马氏链 $X=\{X_t\}_{t\geqslant0}$,如果其转移速率矩阵 $\boldsymbol{Q}=(q_{ij})$满足：$q_{i,i+1}>0(i\geqslant0)$，$q_{ij}=0\ (j>i+1)$，则称为单生过程.离散时间单生链 $X=\{X_n\}_{n\geqslant1}$则是转移概率矩阵 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})$满足：$p_{i,i+1}>0(i\geqslant0)$，$p_{ij}=0\ (j>i+1)$.本文研究从状态0出发的，时间逆具有随机单调性的有限状态空间$\{0,1,2,\cdots,m_n\}$上连续时间不可约单生过程.对于这类单生过程族，文献[7]先将其 separation cutoff 存在性等价转化为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\mathbf{E}\tau^{(n)})^2}{\mathrm{Var}(\tau^{(n)})}=\infty,$$

再用边界理论的方法通过将最快强平稳时矩转化为击中时矩，利用单生过程击中时矩公式(见文献[8]),得到 separation cutoff 存在性的显式判别准则即只用转移速率矩阵元素表示.

本文先用文献[7]的前一部分结果，再根据 Fill[9] 的结论，用 $-Q^{(n)}$ 的非零特征值表示 $\mathbf{E}\tau^{(n)}$ 和 $\mathrm{Var}(\tau^{(n)})$，从而得到如下这类单生过程族 separation cutoff 存在的另一个判别准则.

定理1 设 $X^{(n)}$ 为有限状态空间$\{0,1,2,\cdots,m_n\}$上从状态0出发的，时间逆具有随机单调性的连续时间不可约单生过程，$\boldsymbol{Q}^{(n)}$ 为其转移速率矩阵($n\geqslant1$).则这族过程 separation cutoff 存在的充分必要条件为

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_1^{(n)}\mathbf{E}\tau^{(n)}=\infty,$$

式中 $\lambda_1^{(n)}$ 为 $-Q^{(n)}$ 的第一非零特征值，$\tau^{(n)}$ 为 $X^{(n)}$ 的最快强平稳时.记 $\lambda_i^{(n)}(i=1,2,3,\cdots,m_n)$为 $-Q^{(n)}$ 的全体非零特征值，则

$$\mathbf{E}\tau^{(n)}=\sum_{i=1}^{m_n}\frac{1}{\lambda_i^{(n)}},$$

而且上述判别准则等价于

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_1^{(n)}\tau^{(n)}(\varepsilon)=\infty,$$

式中 $\tau^{(n)}(\varepsilon)$是 $X^{(n)}$ 所谓的 separation 混合时

$$\tau^{(n)}(\varepsilon)=\inf\{t\geqslant0:\mathrm{sep}(\gamma^{(n)}(t),\nu^{(n)})\leqslant\varepsilon\}.$$

对于离散时间，有平行的结论和证明方法.本文只介绍结论，略去证明.

定理2 设 $X^{(n)}$ 为有限状态空间$\{0,1,2,\cdots,m_n\}$上从状态0出发的，时间逆具有随机单调性的离散时间不可约单生过程，$\boldsymbol{P}^{(n)}$ 为其转移概率矩阵($n\geqslant1$).则这族过程 separation cutoff 存在的充分必要条件为

$$\lim_{n\to\infty}\theta_1^{(n)}\mathbf{E}\tau^{(n)}=\infty,$$

式中 $\theta_1^{(n)}$ 为 $I-P^{(n)}$ 的第一非零特征值，$\tau^{(n)}$ 为 $X^{(n)}$ 的强平稳时.记 $\theta_i^{(n)}(i=1,2,3,\cdots,m_n)$为 $I-P^{(n)}$ 的全体非零特征值，则

$$\mathbf{E}\tau^{(n)}=\sum_{i=1}^{m_n}\frac{1}{\theta_i^{(n)}}.$$

这2个判别准则涉及矩阵的全部非零特征值.在证明中要克服的主要困难是：生灭过程转移速率矩阵的特征值都是实数，而单生过程移速率矩阵的特征值可能是复数，因此无法直接通过比较大小进行放缩.但是，可以证明转移速率矩阵的第一非零特征值>0，而且对于元素均为实数的有限矩阵，复数特征值成对出现，可以充分利用这个条件进行放缩.

1　基本概念和预备知识

在这一章，回顾一些关于 cutoff 的基本概念和特征值方法的知识.

假设 τ 是状态空间 S 上遍历马氏链 $X=\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ 的一个停时，如果 X_τ 的分布为 X 的平稳分布 ν，且 X_τ 与 τ 独立,具体来说，τ 是取值于$[0,\infty)$的停时，使得对任意 $t\geqslant 0$ 和 $y\in S$,有

$$\mathbf{P}(\tau\leqslant t,\ X_\tau=y)=\mathbf{P}(\tau\leqslant t)\nu(y),$$

则称 τ 是 X 的强平稳时. 关于(随机)最快强平稳时的概念和性质，参看文献[3].

对于有限马氏链，由文献[10]和[11]知，存在 $X^{(n)}$ 的最快强平稳时 $\tau^{(n)}$ 使得

$$\mathrm{sep}(\gamma^{(n)}(t),\nu^{(n)})=\mathbf{P}(\tau^{(n)}>t),\quad t\geqslant 0.$$

对于状态空间 S 上连续时间遍历的马氏链 $X=\{X_t\}_{t\geqslant 0}$，记 $\pi=(\pi_i)$是其平稳分布，定义矩阵 $\widetilde{Q}=(\tilde{q}_{ij})$为

$$\tilde{q}_{ij}=\frac{\pi_j}{\pi_i}q_{ji}.$$

称以 $\widetilde{Q}$ 为转移速率矩阵的马氏链为 X 的时间逆过程. 若 $\widetilde{Q}=Q$，则称 X 为可逆过程.

对于状态空间 S 上概率转移矩阵 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})$，如果任意的 $i,j,k\in S$ 满足 $i\leqslant j$ 时,有

$$\sum_{t\geqslant k}p_{it}\leqslant\sum_{t\geqslant k}p_{jt}$$

成立，称 $\boldsymbol{P}$ 是随机单调的. 对于状态空间 S 上连续时间马氏链 $X=\{X_t\}_{t\geqslant 0}$，记 $\boldsymbol{P}(t)=(p_{ij}(t))$为其 t 时刻转移概率矩阵,如果对于任意 $t\geqslant 0$，$\boldsymbol{P}(t)$都是随机单调的，则称 X 是随机单调的.

根据文献[12]知，对于状态空间$\{0,1,2,\cdots\}$上连续时间正则马氏链 $X=\{X_t\}_{t\geqslant 0}$，其随机单调等价于其转移速率矩阵 $\boldsymbol{Q}=(q_{ij})$满足：

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{t\geqslant k}q_{it}\leqslant\sum_{t\geqslant k}q_{i+1,t}, & k\geqslant i+2;\\ \displaystyle\sum_{t\leqslant k}q_{it}\geqslant\sum_{t\leqslant k}q_{i+1,t}, & k\leqslant i-1.\end{cases}$$

由文献[7]得到下面的结论.

命题 1　对于一族有限状态空间上遍历的马氏链$\{X^{(n)}\}_{n\geqslant 1}$，令 $\tau^{(n)}$为 $X^{(n)}$的最快强平稳时，则这族马氏链存在 separation cutoff 等价于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathbf{E}\tau^{(n)}}{\sqrt{\mathrm{Var}(\tau^{(n)})}}=\infty.\tag{2}$$

下面结果参见文献[13]中定理 1.3.

定理 3　对于有限阶不可约随机单调的随机矩阵,则除单重特征值 $\lambda_1=1$ 以外,存在特征值 $\lambda_2<1$,且其余特征值 λ 满足$|\lambda|\leqslant\lambda_2$.

由这个定理知,对于本文所研究的离散时间单生过程,由于时间逆过程的转移概率矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{P}}^{(n)}$是有限阶不可约随机单调的随机矩阵,而 $P^{(n)}$与 $\widetilde{\boldsymbol{P}}^{(n)}$的转置相似,因此二者有相同特征值,从而,$\lambda_2^{(n)}<1$;进而 $I-P^{(n)}$的第一非零特征值 $\theta_1^{(n)}=1-\lambda_2^{(n)}>0$.

引理 1　设 A 为 n 阶实方阵，其互异特征值为$\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s\}$，重数分别为 $n_1,\ n_2,\cdots,n_s$，$n_1+n_2+\cdots+n_s=n$，当且仅当存在 $t>0$，矩阵e^{At}的互异特征值为$\{\mathrm{e}^{\lambda_1 t},\ \mathrm{e}^{\lambda_2 t},\ \cdots,\mathrm{e}^{\lambda_s t}\}$，重数分别为 $n_1,\ n_2,\cdots,n_s$.

进而得到下面结论.

命题 2　给定有限状态空间$\{0,1,2,\cdots,n\}$上连续时间不可约正则随机单调马氏链，记 $\boldsymbol{Q}$ 为其转移速率矩阵，则对$-Q$而言，除单重特征值 $\lambda_0=0$ 以外，存在特征值 $\lambda_1>0$，且其余特征值 λ 满足 $\mathrm{Re}(\lambda)\geqslant\lambda_1$.

证明　记$-Q$的全部非零互异特征值为$\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s\}$. 此时马氏链 t 时刻转移概率矩阵 $\boldsymbol{P}(t)=\mathrm{e}^{Qt}$，$\boldsymbol{P}(t)$为有限阶不可约随机单调的随机矩阵. 由引理 1 得：$\boldsymbol{P}(t)$除单重特征值 $\lambda_0=1$ 以外互异特征值为$\{\mathrm{e}^{-\lambda_1 t},\mathrm{e}^{-\lambda_2 t},\ \cdots,\mathrm{e}^{-\lambda_s t}\}$. 由定理 3 得

$$|\,\mathrm{e}^{-\lambda_i t}\,|=\mathrm{e}^{-\mathrm{Re}(\lambda_i)t}\leqslant\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}<1,\quad i=2,3,\cdots,s.$$

所以，$\lambda_1>0$ 且$\mathrm{Re}(\lambda_i)\geqslant\lambda_1(i=2,3,\cdots,s)$. 命题结论得证.

由命题 2 知，对于本文所研究的连续时间单生过程，由于时间逆过程的转移概率矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{P}}^{(n)}(t)$是有限阶不可

约随机单调的随机矩阵，而 $P^{(n)}(t)$ 与 $\widehat{\boldsymbol{P}}^{(n)}(t)$ 的转置相似，因此二者有相同特征值. 记 $\boldsymbol{Q}^{(n)}$ 为 $P^{(n)}(t)$ 的转移速率矩阵，则 $-Q^{(n)}$ 的第一非零特征值 $\lambda_1^{(n)}>0$.

下面的结果参见文献[9].

定理 4 1) 设 X 为从状态 0 出发的，时间逆具有随机单调性的有限状态空间 $\{0,1,2,\cdots,N\}$ 上连续时间遍历单生过程，$\boldsymbol{Q}$ 为其转移速率矩阵. 则 X 的最快强平稳时 τ 的 Laplace 变换为

$$\mathbf{E}\,\mathrm{e}^{-\lambda\tau}=\prod_{i=1}^{N}\frac{\lambda_i}{\lambda+\lambda_i},\quad \lambda\geqslant 0,\tag{3}$$

其中 $\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_N\}$ 是 $-Q$ 的全部非零特征值(已知都有正实部).

2) 设 X 为从状态 0 出发的，时间逆具有随机单调性的有限状态空间 $\{0,1,2,\cdots,N\}$ 上离散时间遍历单生过程 X，记其转移概率矩阵为 $\boldsymbol{P}$. 则 X 的最快强平稳时 τ 的母函数为

$$\mathbf{E}u^{\tau}=\prod_{i=1}^{N}\frac{\theta_i u}{1-(1-\theta_i)u},\quad |u|\leqslant 1,\tag{4}$$

其中 $\{\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_N\}$ 是 $I-P$ 的全部非零特征值.

由上述定理可以得到下面的推论.

推论 1 1) 设 X 为从状态 0 出发的，时间逆具有随机单调性的有限状态空间 $\{0,1,2,\cdots,N\}$ 上连续时间遍历单生过程，$\boldsymbol{Q}$ 为其转移速率矩阵，$\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_N\}$ 是 $-\boldsymbol{Q}$ 的全部非零特征值，τ 为其最快强平稳时. 则

$$\mathbf{E}\tau=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\lambda_i},\qquad \mathrm{Var}(\tau)=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\lambda_i^2}.$$

2) 设 X 为从状态 0 出发的，时间逆具有随机单调性的有限状态空间 $\{0,1,2,\cdots,N\}$ 上离散时间遍历单生过程 X，记其转移概率矩阵为 $\boldsymbol{P}$，$\{\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_N\}$ 是 $I-P$ 的全部非零特征值，τ 为 X 的最快强平稳时. 则

$$\mathbf{E}\tau=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\theta_i},\qquad \mathrm{Var}(\tau)=\sum_{i=1}^{N}\frac{1-\theta_i}{\theta_i^2}.$$

证明 1) 对式(3)两边关于 λ 分别求一阶导数和二阶导数，再令 $\lambda=0$，得到

$$\mathbf{E}\tau=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\lambda_i},\quad \mathrm{Var}(\tau)=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\lambda_i^2}.$$

2) 对式(4)两边关于 u 分别求一阶导数和二阶导数，再令 $u=1$，得到

$$\mathbf{E}\tau=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\theta_i},\quad \mathrm{Var}(\tau)=\sum_{i=1}^{N}\frac{1-\theta_i}{\theta_i^2}.$$

结论得证.

2 定理 1 的证明

由推论 1 知，

$$\mathbf{E}\tau^{(n)}=\sum_{i=1}^{m_n}\frac{1}{\lambda_i^{(n)}},\ \mathrm{Var}(\tau^{(n)})=\sum_{i=1}^{m_n}\left(\frac{1}{\lambda_i^{(n)}}\right)^2,\tag{5}$$

式中 $\{\lambda_1^{(n)},\lambda_2^{(n)},\cdots,\lambda_{m_n}^{(n)}\}$ 是 $-Q^{(n)}$ 的全部非零特征值. 由命题 2 知，$\mathrm{Re}(\lambda_i^{(n)})\geqslant\lambda_1^{(n)}>0(2\leqslant i\leqslant m_n)$.

下面证明

$$\lambda_1^{(n)}\mathbf{E}\tau^{(n)}\leqslant\frac{(\mathbf{E}\tau^{(n)})^2}{\mathrm{Var}(\tau^{(n)})}\leqslant(\lambda_1^{(n)}\mathbf{E}\tau^{(n)})^2.\tag{6}$$

先证第一个不等式. 由于 $-Q^{(n)}$ 的非零复特征值成对出现，所以由 $\mathbf{E}\tau^{(n)}$ 和 $\mathrm{Var}(\tau^{(n)})$ 的表达式(5)得到

$$\mathbf{E}\tau^{(n)}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m_n}\left(\frac{1}{\lambda_i^{(n)}}+\frac{1}{\overline{\lambda_i^{(n)}}}\right),\qquad \mathrm{Var}(\tau^{(n)})=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m_n}\left(\left(\frac{1}{\lambda_i^{(n)}}\right)^2+\left(\frac{1}{\overline{\lambda_i^{(n)}}}\right)^2\right).$$

由命题 2 知，

$$\frac{1}{\lambda_1^{(n)}}\left(\frac{1}{\lambda_i^{(n)}}+\frac{1}{\overline{\lambda_i^{(n)}}}\right)=\frac{1}{\lambda_1^{(n)}}\cdot\frac{2\mathrm{Re}(\lambda_i^{(n)})}{|\lambda_i^{(n)}|^2}\geqslant\frac{2}{|\lambda_i^{(n)}|^2}\geqslant\frac{2((\mathrm{Re}(\lambda_i^{(n)}))^2-(\mathrm{Im}(\lambda_i^{(n)}))^2)}{|\lambda_i^{(n)}|^4}=\left(\frac{1}{\lambda_i^{(n)}}\right)^2+\left(\frac{1}{\overline{\lambda_i^{(n)}}}\right)^2.$$

所以由以上 2 式可得到

$$\mathrm{Var}(\tau^{(n)}) \leqslant \frac{1}{\lambda_1^{(n)}} \mathbf{E}\tau^{(n)},$$

从而

$$\lambda_1^{(n)} \mathbf{E}\tau^{(n)} = \lambda_1^{(n)} \frac{(\mathbf{E}\tau^{(n)})^2}{\mathbf{E}\tau^{(n)}} \leqslant \frac{(\mathbf{E}\tau^{(n)})^2}{\mathrm{Var}(\tau^{(n)})}.$$

即式(6)的第一个不等式成立.

下面再证式(6)的第 2 个不等式. 先证明

$$\frac{1}{\mathrm{Var}(\tau^{(n)})} \leqslant (\lambda_1^{(n)})^2. \tag{7}$$

事实上，对于 $Q^{(n)}$ 对应的单生过程 $X^{(n)}$，可构造 $X^{(n)}$ 的强平稳对偶 $X^{(n)}: X_0^{(n)}=0$，由于 $\lambda_1^{(n)}>0$，故第一步跳模仿文献[9]注 3.1 中构造强平稳对偶的方法，构造强平稳对偶过程第 1 次跳为纯生，且第 1 次跳时刻服从参数为 $\lambda_1^{(n)}$ 的指数分布. 因为其余特征值可能为复数，所以模仿文献[11]第 2.3 节的构造方法构造第 1 次跳以后的过程，由此通过构造路径对偶的方式得到强平稳对偶过程 $X^{(n)*}$. 此过程从状态 0 出发首次击中状态 m_n 的时间即为原过程的最快强平稳时. 因此，

$$\mathrm{Var}(T_{0,1}^*) = \frac{1}{(\lambda_1^{(n)})^2}, \quad \mathrm{Var}(T_{0,m_n}^*) = \mathrm{Var}(\tau^{(n)}), \tag{8}$$

式中 $T_{i,k}^*$ 是过程 $X^{(n)*}$ 从状态 i 出发击中状态 k 的首中时. 而由强马氏性，

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\, T_{0,m_n}^* &= \mathbf{E}(T_{0,1}^* + T_{0,m_n}^* - T_{0,1}^*) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(T_{0,1}^* + T_{0,m_n}^* - T_{0,1}^* \mid \mathscr{F}_{T_{0,1}^*})) = \\ &\mathbf{E}(T_{0,1}^* + \mathbf{E}T_{1,m_n}^*) = \mathbf{E}T_{0,1}^* + \mathbf{E}T_{1,m_n}^*,\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\mathbf{E}((T_{0,m_n}^*)^2) &= \mathbf{E}((T_{0,1}^* + T_{0,m_n}^* - T_{0,1}^*)^2) = \mathbf{E}(\mathbf{E}((T_{0,1}^*)^2 + (T_{0,m_n}^* - T_{0,1}^*)^2 + 2T_{0,1}^*(T_{0,m_n}^* - T_{0,1}^*) \mid \mathscr{F}_{T_{0,1}^*})) = \\ &\mathbf{E}((T_{0,1}^*)^2 + \mathbf{E}((T_{1,m_n}^*)^2) + 2T_{0,1}^* \cdot \mathbf{E}T_{1,m_n}^*) = \mathbf{E}((T_{0,1}^*)^2) + \mathbf{E}((T_{1,m_n}^*)^2) + 2\mathbf{E}T_{0,1}^* \cdot \mathbf{E}T_{1,m_n}^*.\end{aligned}$$

进而，由上面 2 式得到

$$\mathrm{Var}(T_{0,m_n}^*) = \mathrm{Var}(T_{0,1}^*) + \mathrm{Var}(T_{1,m_n}^*) \geqslant \mathrm{Var}(T_{0,1}^*).$$

结合式(8)，得到 $\mathrm{Var}(\tau^{(n)}) \geqslant (\lambda_1^{(n)})^{-2}$. 因此，式(7)得证.

由式(7)得到 $\dfrac{(\mathbf{E}\tau^{(n)})^2}{\mathrm{Var}(\tau^{(n)})} \leqslant (\lambda_1^{(n)} \mathbf{E}\tau^{(n)})^2$.

综上所述，得证式(6). 因此，$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\mathbf{E}\tau^{(n)}}{\sqrt{\mathrm{Var}(\tau^{(n)})}} = \infty$ 等价于 $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_1^{(n)} \mathbf{E}\tau^{(n)} = \infty$. 再由命题 2 知，separation cutoff 存在的充分必要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_1^{(n)} \mathbf{E}\tau^{(n)} = \infty$.

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_1^{(n)} \mathbf{E}\tau^{(n)} = \infty$ 等价于 $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_1^{(n)} \tau^{(n)}(\varepsilon) = \infty$，其证明与文献[4]中相应证明类似，在此省略. 定理结论由此得证.

3　参考文献

[1] DIACONIS P. The cutoff phenomenon in finite Markov chains[J]. Proc Natl Acad Sci USA, 1996, 93(4): 1659

[2] PERES Y. American Institute of Mathematics (AIM) research workshop "Sharp Thresholds for Mixing Times", Palo Alto, December 2004[EB/OL]. (2014-10-12) [2018-10-20]. http://www.aimath.org/WWN/mixingtimes

[3] ALDOUS D, DIACONIS P. Strong uniform times and finite random walks[J]. Adv Appl Math, 1987, 8: 69

[4] DIACONIS P, SALOFF-COSTE L. Separation cutoffs for birth and death chains[J]. Ann Appl Prob, 2006, 16(4): 2098

[5] MAO Y H, ZHANG Y H. Explicit criteria on separation cutoff for birth and death chains[J]. Front Math China, 2014, 9(4): 881

[6] CHEN G Y, SALOFF-COSTE L. Computing cutoff times of birth and death chains[J]. Electron J Probab, 2015, 76: 1

[7] MAO Y H, ZHANG C, ZHANG Y H. Separation cutoff for upward skip-free chains[J]. J Appl Probab, 2016, 53(1): 299

[8] 张余辉. 无限和有限状态空间上单生过程击中时距的表示[J]. 北京师范大学学报(自然科学版), 2013, 49(5): 445

[9] FILL J A. On hitting times and fastest strong stationary times for skip-free and more general chains[J]. J Theoret Prob, 2009, 22: 587

[10] FILL J A. Time to stationarity for a continous-time Markov chain[J]. Prob Eng Inf Sci, 1991, 5: 61

[11] FILL J A. Strong stationary duality for continous-time Markov chains. Part I: Theory[J]. J Theoret Prob, 1992, 5(1): 45
[12] CHEN M F. From Markov chains to non-equilibrium particle systems[M]. 2nd ed. Singapore: World Scientific, 2004
[13] KEILSON J, KESTER A. Monotone matrices and monotone Markov processes[J]. Stoch Proc Appl, 1977, 5: 231

A criterion on separation cutoff for single-birth processes based on eigenvalues

MAO Yonghua ZHANG Weiwei ZHANG Yuhui
(School of Mathematical Sciences, Beijing Normal University, Laboratory of Mathematics and Complex Systems, Ministry of Education, Beijing Normal University, 100875, Beijing, China)

Abstract For a family of single-birth processes $X^{(n)}$ *on* $\{0,1,\cdots,m_n\}$ ($\{m_n\}$ is a natural number sequence increasing with respect to n), starting at 0 with stochastical monotone time-reversal Using the positive property of the first non-zero eigenvalue of the negative of transition rate matrix ($-Q^{(n)}$) and the property that every order moment of fastest strong stationary time can be represented by eigenvalues of $-Q^{(n)}$, a criterion on separation cutoff for this family of single birth processes is obtained which concerns all non-zero eigenvalues. Peres's product condition for such single-birth processes is verified.

Keywords single birth process; stochastically monotone; separation cutoff; strong stationary duality; fastest strong stationary time; eigenvalue