最小单生过程平均占位时的显式表示*

李培森　张余辉†

(北京师范大学数学科学学院,数学与复杂系统教育部重点实验室,100875,北京)

摘要　研究了小单生过程的平均占位时,在过程转移速率矩阵正则和非正则的条件下,分别得到平均占位时基于该矩阵的显式表示.

关键词　单生过程;平均占位时;显式表示

中图分类号　O211.6　　**DOI**:10.16360/j.cnki.jbnuns.2017.03.002

0　引言

考虑全稳定保守的单生 Q 矩阵 $Q=(q_{ij}:i,j\in\mathbb{Z}_+)$,即对一切 $i\geqslant 0$ 有

$$q_i:=-q_{ii}=\sum_{j\neq i}q_{ij}<\infty,$$

对所有的 $i\geqslant 0$ 和 $j\geqslant 2$ 满足 $q_{i,i+1}>0,q_{i,i+j}=0$. 称其决定的过程 $\{X(t),t\geqslant 0\}$ 为单生过程. 此时,若其决定的过程还是唯一的,则称该 Q 矩阵是正则的. 关于单生过程的研究背景和相关结果,可以主要参看参考文献[1-2]及其参考文献,较新的文献还可参看参考文献[3-9].

单生过程状态 j 的所谓占位时是指

$$T_j:=\int_0^\infty \mathbf{1}_{\{t:X(t)=j\}}\mathrm{d}t.$$

此时,若过程从状态 i 出发,取数学期望,则

$$E_i(T_j)=\int_0^\infty E_i(\mathbf{1}_{\{t:X(t)=j\}})\mathrm{d}t=\int_0^\infty p_{ij}(t)\mathrm{d}t,$$

式中 $(p_{ij}(t):i,j\in\mathbb{Z}_+)(t\geqslant 0)$ 为过程 $\{X(t),t\geqslant 0\}$ 的转移概率函数. 本文研究的目标就是得到这个平均占位时的显式表示.

为陈述本文的结果,对所有 $0\leqslant k<n$,定义

$$q_n^{(k)}=\sum_{j=0}^{k}q_{nj},$$

再定义

$$F_n^{(n)}=1,F_n^{(i)}=\frac{1}{q_{n,n+1}}\sum_{k=i}^{n-1}q_n^{(k)}F_k^{(i)},0\leqslant i<n.\quad(1)$$

可以证明[3]

$$F_n^{(i)}=\sum_{k=i+1}^{n}\frac{F_n^{(k)}q_k^{(i)}}{q_{k,k+1}},n>i\geqslant 0.\quad(2)$$

本文第 1 个主要结论如定理 1.

定理 1　给定不可约正则单生 Q 矩阵 $Q=(q_{ij}:i,j\in\mathbb{Z}_+)$. 则对任意 $i,j\in\mathbb{Z}_+$,单生过程的平均占位时有如下表示:

$$E_i(T_j)=\frac{1}{q_{j,j+1}}\sum_{n=i\vee j}^{\infty}F_n^{(j)},$$

式中 $a\vee b:=\max\{a,b\}$.

上述结论是在单生 Q 矩阵正则的前提下,即此时 Q 矩阵决定唯一的过程(最小过程),对于单生 Q 矩阵可能非正则的情形,则可以考虑其决定的最小过程 $\{X^{\min}(t),t\geqslant 0\}$ 的平均占位时

$$E_i(T_j)=\int_0^\infty p_{ij}^{\min}(t)\mathrm{d}t,$$

式中 $(p_{ij}^{\min}(t):i,j\in\mathbb{Z}_+)(t\geqslant 0)$ 为最小过程 $\{X^{\min}(t),t\geqslant 0\}$ 的转移概率函数.

本文第 2 个主要结论如定理 2.

定理 2　给定不可约全稳定保守单生 Q 矩阵 $Q=(q_{ij}:i,j\in\mathbb{Z}_+)$. 则对任意 $i,j\in\mathbb{Z}_+$,最小单生过程的平均占位时与定理 1 的表示相同.

1　定理 1 的证明

首先,证明这族级数 $\{\sum_{n=j}^{\infty}F_n^{(j)}\}_{j=0}^{\infty}$ 是等价的,即对所有的 $j\geqslant 0$,级数 $\sum_{n=j}^{\infty}F_n^{(j)}$ 是同时收敛的,或同时发散的. 为此,要证明下列不等式

$$F_{i+1}^{(i)}F_n^{(i+1)}\leqslant F_n^{(i)}\leqslant(1+F_{i+1}^{(i)})F_n^{(i+1)},n\geqslant i+1.\quad(3)$$

一方面,由式(2),可以看出

* 国家自然科学基金重点资助项目(11131003);国家自然科学基金面上资助项目(11571043)

† 通信作者,e-mail:zhangyh@bnu.edu.cn

收稿日期:2016-11-02

$$F_n^{(i)}=\sum_{k=i+1}^{n}\frac{F_n^{(k)}q_k^{(i)}}{q_{k,k+1}}\geqslant\frac{F_n^{(i+1)}q_{i+1}^{(i)}}{q_{i+1,i+2}}=F_n^{(i+1)}F_{i+1}^{(i)},n\geqslant i+1.$$

另一方面，还是由式(2)，得到

$$F_n^{(i)}=\frac{F_n^{(i+1)}q_{i+1}^{(i)}}{q_{i+1,i+2}}+\sum_{k=i+2}^{n}\frac{F_n^{(k)}q_k^{(i)}}{q_{k,k+1}}\leqslant F_n^{(i+1)}F_{i+1}^{(i)}+\sum_{k=i+2}^{n}\frac{F_n^{(k)}q_k^{(i+1)}}{q_{k,k+1}}=(1+F_{i+1}^{(i)})F_n^{(i+1)},n\geqslant i+1.$$

结合以上 2 个不等式，式(3)得证. 再由不等式(3)，用数学归纳法不难推出级数 $\{\sum_{n=j}^{\infty}F_n^{(j)}\}_{j=0}^{\infty}$ 或同时收敛，或同时发散($j\geqslant0$).

其次，假设单生过程$\{X(t),t\geqslant0\}$是常返的. 此时，由参考文献[1]的定理 4.52 知，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}F_n^{(0)}=\infty$. 再由上面所得结果知，级数 $\sum_{n=j}^{\infty}F_n^{(j)}=\infty(j\geqslant0)$，因此，$\sum_{n=i\vee j}^{\infty}F_n^{(j)}=\infty$. 而由常返性的定义知，对任意 $i\geqslant0$，有

$$E_i(T_i)=\int_0^{\infty}p_{ii}(t)\mathrm{d}t=\infty.$$

所以，当 $i=j$ 时，

$$E_i(T_i)=\infty=\frac{1}{q_{i,i+1}}\sum_{n=i}^{\infty}F_n^{(i)},$$

即定理结论成立. 当 $i\neq j$ 时，由 Chapman-Kolmogorov 方程，可得 $p_{ij}(t+s)\geqslant p_{ii}(t)p_{ij}(s)$，而由不可约性知，对任意 $i,j\geqslant0$，$p_{ij}(s)$关于 s 在$(0,\infty)$上恒为正的，进而

$$\int_0^{\infty}p_{ij}(t)\mathrm{d}t\geqslant\int_s^{\infty}p_{ij}(t)\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}p_{ij}(t+s)\mathrm{d}t\geqslant\int_0^{\infty}p_{ii}(t)\mathrm{d}t\cdot p_{ij}(s)=\infty,$$

所以

$$E_i(T_j)=\infty=\frac{1}{q_{j,j+1}}\sum_{n=i\vee j}^{\infty}F_n^{(j)},$$

即定理结论当 $i\neq j$ 时依然成立.

最后，假定单生过程$\{X(t),t\geqslant0\}$是非常返的. 同样由参考文献[1]的定理 4.52 知，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}F_n^{(0)}<\infty$. 再由前面所得结果知，级数 $\sum_{n=j}^{\infty}F_n^{(j)}<\infty(j\geqslant0)$，故级数 $\sum_{n=i\vee j}^{\infty}F_n^{(j)}$ 收敛. 定义

$$\Pi_{ij}=(1-\delta_{ij})\frac{q_{ij}}{q_i},\ i,j\in\mathbb{Z}_+. \tag{4}$$

则 $\boldsymbol{\Pi}=(\Pi_{ij}:i,j\in\mathbb{Z}_+)$为单生过程$\{X(t),t\geqslant0\}$嵌入链$\{\overline{X}(n),n\geqslant0\}$的转移概率矩阵，其 n 步转移概率矩阵记为$\boldsymbol{\Pi}^n=(\Pi_{ij}^{(n)}:i,j\in\mathbb{Z}_+)$. 由过程与嵌入链的关系(参看参考文献[1]的定理 4.34)知，此时嵌入链亦非常返，等价于

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Pi_{jj}^{(n)}<\infty,\ j\geqslant0.$$

参看参考文献[10]的定理 1.11，定义单生过程$\{X(t),t\geqslant0\}$首次跳时刻为 $\eta_1=\inf\{t>0:X(t)\neq X(0)\}$，再分别定义单生过程和嵌入链的回返时为 $\sigma_j=\inf\{t\geqslant\eta_1:X(t)=j\}$和$\bar{\sigma}_j=\min\{n\geqslant1:\overline{X}(n)=j\}$. 则容易知道

$$P_i(\sigma_j<\infty)=P_i(\bar{\sigma}_j<\infty),$$

式中 P_i 是指单生过程$\{X(t),t\geqslant0\}$(等价于嵌入链$\{\overline{X}(n),n\geqslant0\}$)从状态 i 出发. 进而，由参考文献[10]的引理 1.21 和参考文献[4]的推论 1.3，可以推出：

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty}\Pi_{ij}^{(n)}}{\sum_{n=0}^{\infty}\Pi_{jj}^{(n)}}=P_i(\bar{\sigma}_j<\infty)=P_i(\sigma_j<\infty)=1,i<j;$$

$$1-\frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty}\Pi_{jj}^{(n)}}=P_j(\bar{\sigma}_j<\infty)=P_j(\sigma_j<\infty)=1-\frac{q_{j,j+1}}{q_j\sum_{n=j}^{\infty}F_n^{(j)}}$$

和

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty}\Pi_{ij}^{(n)}}{\sum_{n=0}^{\infty}\Pi_{jj}^{(n)}}=P_i(\bar{\sigma}_j<\infty)=P_i(\sigma_j<\infty)=\frac{\sum_{n=i}^{\infty}F_n^{(j)}}{\sum_{n=j}^{\infty}F_n^{(j)}},i>j.$$

从以上 3 个等式可以看出：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Pi_{ij}^{(n)}=\frac{q_j}{q_{j,j+1}}\sum_{n=j}^{\infty}F_n^{(j)},i<j;$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Pi_{ij}^{(n)}=\frac{q_j}{q_{j,j+1}}\sum_{n=i}^{\infty}F_n^{(j)},i\geqslant j.$$

再由参考文献[1]的定理 4.34，立刻得到：

$$E_i(T_j)=\int_0^{\infty}p_{ij}(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{q_j}\sum_{n=0}^{\infty}\Pi_{ij}^{(n)}=\frac{1}{q_{j,j+1}}\sum_{n=j}^{\infty}F_n^{(j)},\quad i<j;$$

$$E_i(T_j)=\int_0^{\infty}p_{ij}(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{q_j}\sum_{n=0}^{\infty}\Pi_{ij}^{(n)}=\frac{1}{q_{j,j+1}}\sum_{n=i}^{\infty}F_n^{(j)},\quad i\geqslant j.$$

综上可得，无论过程是否常返，对一切 $i,j\in\mathbb{Z}_+$，平均占位时总有如下表示：

$$E_i(T_j)=\frac{1}{q_{j,j+1}}\sum_{n=i\vee j}^{\infty}F_n^{(j)}.$$

所以定理 1 结论得证.

2 定理 2 的证明

对于单生 Q 矩阵可能非正则的情形,考虑其决定的最小过程$\{X^{\min}(t),t\geqslant 0\}$的平均占位时

$$E_i(T_j)=\int_0^\infty p_{ij}^{\min}(t)\mathrm{d}t,$$

注意到,在定理 1 的证明中,嵌入链$\{\bar{X}(n),n\geqslant 0\}$是一个离散时间单生过程.为此,先证明一个关于离散时间单生过程的一般结论.

命题 1 给定不可约离散时间单生过程$\{X(n),n\geqslant 0\}$,其转移概率矩阵为$\boldsymbol{P}=(p_{ij}:i,j\in\mathbb{Z}_+)$.定义

$$\bar{F}_i^{(i)}=1,\bar{F}_n^{(i)}=\frac{1}{p_{n,n+1}}\sum_{k=i}^{n-1}p_n^{(k)}\bar{F}_k^{(i)},n>i\geqslant 0,\quad(5)$$

$$p_n^{(k)}=\sum_{j=0}^{k}p_{nj},0\leqslant k<n.\quad(6)$$

则

$$P_i(\bar{\sigma}_j<\infty)=1,i<j;$$

$$P_j(\bar{\sigma}_j<\infty)=1-\frac{p_{j,j+1}}{\sum_{k=j}^{\infty}\bar{F}_k^{(j)}};$$

$$P_i(\bar{\sigma}_j<\infty)=\frac{\sum_{k=i}^{\infty}\bar{F}_k^{(j)}}{\sum_{k=j}^{\infty}\bar{F}_k^{(j)}},i>j,$$

式中 $\bar{\sigma}_j=\min\{n\geqslant 1:X(n)=j\}$,此处约定$\infty/\infty=1$.

证明 给定 $j\in\mathbb{Z}_+$,在参考文献[1]的引理 4.46 中取定 $H=\{j\}$,则$(P_i(\bar{\sigma}_j<\infty):i\in\mathbb{Z}_+)$是下列方程的最小非负解:

$$x_i=\sum_{k\neq j}p_{ik}x_k+p_{ij},i\geqslant 0.$$

将上述方程改写为如下 Poisson 方程:

$$((\boldsymbol{P}-\boldsymbol{I})x)_i=-p_{ij}(1-x_j),i\geqslant 0.$$

在参考文献[7]的定理 1 中取 $c_i\equiv 0$ 和 $f_i=-p_{ij}(1-x_j)$,得到该方程的解有如下表示:

$$x_n=x_0-\sum_{0\leqslant k\leqslant n-1}\sum_{0\leqslant l\leqslant k}\frac{\bar{F}_k^{(l)}p_{lj}}{p_{l,l+1}}(1-x_j),n\geqslant 0.$$

因此,取 $n=j$,得

$$x_0=\sum_{0\leqslant k\leqslant j-1}\sum_{0\leqslant l\leqslant k}\frac{\bar{F}_k^{(l)}p_{lj}}{p_{l,l+1}}+x_j(1-\sum_{0\leqslant k\leqslant j-1}\sum_{0\leqslant l\leqslant k}\frac{\bar{F}_k^{(l)}p_{lj}}{p_{l,l+1}}).$$

将其代入前式,得

$$x_n=\sum_{0\leqslant k\leqslant j-1}\sum_{0\leqslant l\leqslant k}\frac{\bar{F}_k^{(l)}p_{lj}}{p_{l,l+1}}-\sum_{0\leqslant k\leqslant n-1}\sum_{0\leqslant l\leqslant k}\frac{\bar{F}_k^{(l)}p_{lj}}{p_{l,l+1}}+$$
$$x_j(1-\sum_{0\leqslant k\leqslant j-1}\sum_{0\leqslant l\leqslant k}\frac{\bar{F}_k^{(l)}p_{lj}}{p_{l,l+1}}+\sum_{0\leqslant k\leqslant n-1}\sum_{0\leqslant l\leqslant k}\frac{\bar{F}_k^{(l)}p_{lj}}{p_{l,l+1}}).$$

因此,当 $n\leqslant j$ 时,

$$x_n=\sum_{0\leqslant k\leqslant j-1}\sum_{0\leqslant l\leqslant k}\frac{\bar{F}_k^{(l)}p_{lj}}{p_{l,l+1}}+x_j(1-\sum_{0\leqslant k\leqslant j-1}\sum_{0\leqslant l\leqslant k}\frac{\bar{F}_k^{(l)}p_{lj}}{p_{l,l+1}}),$$

当 $n>j$ 时,

$$x_n=-\sum_{j\leqslant k\leqslant n-1}\sum_{0\leqslant l\leqslant k}\frac{\bar{F}_k^{(l)}p_{lj}}{p_{l,l+1}}+$$
$$x_j(1+\sum_{j\leqslant k\leqslant n-1}\sum_{0\leqslant l\leqslant k}\frac{\bar{F}_k^{(l)}p_{lj}}{p_{l,l+1}}).$$

故当 $n<j$ 时,由单生性质知 $x_n=1$. 当 $n>j$ 时,为使得每个 $x_n\geqslant 0$,需要

$$x_j\geqslant\frac{\sum_{k=j}^{n-1}\sum_{l=0}^{k}\frac{\bar{F}_k^{(l)}p_{lj}}{p_{l,l+1}}}{1+\sum_{k=j}^{n-1}\sum_{l=0}^{k}\frac{\bar{F}_k^{(l)}p_{lj}}{p_{l,l+1}}}=1-\frac{1}{1+\sum_{k=j}^{n-1}\sum_{l=0}^{k}\frac{\bar{F}_k^{(l)}p_{lj}}{p_{l,l+1}}},$$

再由最小性质得到最小解

$$x_j^*=\sup_{n>j}(1-\frac{1}{1+\sum_{k=j}^{n-1}\sum_{l=0}^{k}\frac{\bar{F}_k^{(l)}p_{lj}}{p_{l,l+1}}})=$$
$$1-\frac{1}{1+\sum_{k=j}^{\infty}\sum_{l=0}^{k}\frac{\bar{F}_k^{(l)}p_{lj}}{p_{l,l+1}}}.$$

注意,由参考文献[7]推论 1 的式(8),有

$$\bar{F}_k^{(i)}=\sum_{l=i+1}^{k}\frac{\bar{F}_k^{(l)}p_l^{(i)}}{p_{l,l+1}},\ k>i.\quad(7)$$

当 $j=0$ 时,由式(6)、(7),有

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k}\frac{\bar{F}_k^{(l)}p_{l0}}{p_{l,l+1}}=$$
$$\frac{p_{00}}{p_{01}}+\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{\bar{F}_k^{(0)}p_{00}}{p_{01}}+\sum_{l=1}^{k}\frac{\bar{F}_k^{(l)}p_{l0}}{p_{l,l+1}})=$$
$$\frac{p_{00}}{p_{01}}+\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{\bar{F}_k^{(0)}p_{00}}{p_{01}}+\sum_{l=1}^{k}\frac{\bar{F}_k^{(l)}p_l^{(0)}}{p_{l,l+1}})=$$
$$\frac{p_{00}}{p_{01}}+\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{\bar{F}_k^{(0)}p_{00}}{p_{01}}+\bar{F}_k^{(0)})=\frac{1}{p_{01}}\sum_{k=0}^{\infty}\bar{F}_k^{(0)}-1,$$

进而

$$x_0^*=1-\frac{p_{01}}{\sum_{k=0}^{\infty}\bar{F}_k^{(0)}}.$$

对于 $n>j=0$,则由式(6)、(7)推出

$$\sum_{0\leqslant k\leqslant n-1}\sum_{0\leqslant l\leqslant k}\frac{\bar{F}_k^{(l)}p_{l0}}{p_{l,l+1}}=\frac{p_{00}}{p_{01}}+$$
$$\sum_{1\leqslant k\leqslant n-1}(\frac{\bar{F}_k^{(0)}p_{00}}{p_{01}}+\sum_{l=1}^{k}\frac{\bar{F}_k^{(l)}p_l^{(0)}}{p_{l,l+1}})=\frac{1}{p_{01}}\sum_{0\leqslant k\leqslant n-1}\bar{F}_k^{(0)}-1,$$

因此,可得

$$x_n^*=-\frac{1}{p_{01}}\sum_{1\leqslant k\leqslant n-1}\bar{F}_k^{(0)}+1+(1-\frac{p_{01}}{\sum_{k=0}^{\infty}\bar{F}_k^{(0)}})\cdot$$
$$\frac{1}{p_{01}}\sum_{1\leqslant k\leqslant n-1}\bar{F}_k^{(0)}=1-\frac{\sum_{k=0}^{n-1}\bar{F}_k^{(0)}}{\sum_{k=0}^{\infty}\bar{F}_k^{(0)}}=\frac{\sum_{k=n}^{\infty}\bar{F}_k^{(0)}}{\sum_{k=0}^{\infty}\bar{F}_k^{(0)}}.$$

当 $j\geqslant 1$ 时,由单生性质及式(6)、(7)推出

$$\sum_{k=j}^{\infty}\sum_{l=0}^{k}\frac{\bar{F}_k^{(l)}p_{lj}}{p_{l,l+1}}=\sum_{k=j}^{\infty}\sum_{l=j-1}^{k}\frac{\bar{F}_k^{(l)}p_{lj}}{p_{l,l+1}}=$$

$$\sum_{l=j-1}^{j}\frac{\bar{F}_j^{(l)}p_{lj}}{p_{l,l+1}}+\sum_{k=j+1}^{\infty}\sum_{l=j-1}^{k}\frac{\bar{F}_k^{(l)}p_{lj}}{p_{l,l+1}}=\sum_{l=j-1}^{j}\frac{\bar{F}_j^{(l)}p_{lj}}{p_{l,l+1}}+$$

$$\sum_{k=j+1}^{\infty}(\bar{F}_k^{(j-1)}+\frac{\bar{F}_k^{(j)}p_{jj}}{p_{j,j+1}}+\sum_{l=j+1}^{k}\frac{\bar{F}_k^{(l)}p_{lj}}{p_{l,l+1}})=$$

$$\bar{F}_j^{(j-1)}+\frac{p_{jj}}{p_{j,j+1}}+\sum_{k=j+1}^{\infty}(\bar{F}_k^{(j-1)}+\frac{\bar{F}_k^{(j)}p_{jj}}{p_{j,j+1}}+$$

$$\sum_{l=j+1}^{k}\frac{\bar{F}_k^{(l)}(p_l^{(j)}-p_l^{(j-1)})}{p_{l,l+1}})=\bar{F}_j^{(j-1)}+\frac{p_{jj}}{p_{j,j+1}}+$$

$$\sum_{k=j+1}^{\infty}(\bar{F}_k^{(j-1)}+\frac{\bar{F}_k^{(j)}p_{jj}}{p_{j,j+1}}+\bar{F}_k^{(j)}-\sum_{l=j+1}^{k}\frac{\bar{F}_k^{(l)}p_l^{(j-1)}}{p_{l,l+1}})=$$

$$\frac{p_j^{(j-1)}}{p_{j,j+1}}+\frac{p_{jj}}{p_{j,j+1}}+\sum_{k=j+1}^{\infty}(\frac{\bar{F}_k^{(j)}p_{jj}}{p_{j,j+1}}+\bar{F}_k^{(j)}+\frac{\bar{F}_k^{(j)}p_j^{(j-1)}}{p_{j,j+1}})=$$

$$\frac{1}{p_{j,j+1}}+\frac{1}{p_{j,j+1}}\sum_{k=j+1}^{\infty}\bar{F}_k^{(j)}-1=\frac{1}{p_{j,j+1}}\sum_{k=j}^{\infty}\bar{F}_k^{(j)}-1,$$

进而

$$x_j^*=1-\frac{p_{j,j+1}}{\sum_{k=j}^{\infty}\bar{F}_k^{(j)}}.$$

对于 $n>j\geqslant 1$，则由单生性质及式(6)、(7)得到

$$\sum_{j\leqslant k\leqslant n-1}\sum_{0\leqslant l\leqslant k}\frac{\bar{F}_k^{(l)}p_{lj}}{p_{l,l+1}}=\bar{F}_j^{(j-1)}+\frac{p_{jj}}{p_{j,j+1}}+\sum_{j+1\leqslant k\leqslant n-1}(\bar{F}_k^{(j-1)}+$$

$$\frac{\bar{F}_k^{(j)}p_{jj}}{p_{j,j+1}}+\sum_{l=j+1}^{k}\frac{\bar{F}_k^{(l)}(p_l^{(j)}-p_l^{(j-1)})}{p_{l,l+1}})=$$

$$\frac{p_j^{(j-1)}}{p_{j,j+1}}+\frac{p_{jj}}{p_{j,j+1}}+\sum_{j+1\leqslant k\leqslant n-1}(\bar{F}_k^{(j-1)}+$$

$$\frac{\bar{F}_k^{(j)}p_{jj}}{p_{j,j+1}}+\bar{F}_k^{(j)}-\sum_{l=j+1}^{k}\frac{\bar{F}_k^{(l)}p_l^{(j-1)}}{p_{l,l+1}})=$$

$$\frac{1}{p_{j,j+1}}-1+\sum_{j+1\leqslant k\leqslant n-1}(\frac{\bar{F}_k^{(j)}p_{jj}}{p_{j,j+1}}+\bar{F}_k^{(j)}+\frac{\bar{F}_k^{(j)}p_j^{(j-1)}}{p_{j,j+1}})=$$

$$\frac{1}{p_{j,j+1}}\sum_{j\leqslant k\leqslant n-1}\bar{F}_k^{(j)}-1,$$

由此可知

$$x_n^*=-\frac{1}{p_{j,j+1}}\sum_{j\leqslant k\leqslant n-1}\bar{F}_k^{(j)}+1+(1-\frac{p_{j,j+1}}{\sum_{k=j}^{\infty}\bar{F}_k^{(j)}})\cdot$$

$$\frac{1}{p_{j,j+1}}\sum_{j\leqslant k\leqslant n-1}\bar{F}_k^{(j)}=1-\frac{\sum_{k=j}^{n-1}\bar{F}_k^{(j)}}{\sum_{k=j}^{\infty}\bar{F}_k^{(j)}}=\frac{\sum_{k=n}^{\infty}\bar{F}_k^{(j)}}{\sum_{k=j}^{\infty}\bar{F}_k^{(j)}}.$$

综上可得，对给定的 $j\in\mathbb{Z}_+$，方程的最小非负解为：

$$x_n^*=1,n<j;$$

$$x_j^*=1-\frac{p_{j,j+1}}{\sum_{k=j}^{\infty}\bar{F}_k^{(j)}};\quad x_n^*=\frac{\sum_{k=n}^{\infty}\bar{F}_k^{(j)}}{\sum_{k=j}^{\infty}\bar{F}_k^{(j)}},n>j.$$

至此，命题 1 结论得证.

有了上述命题 1 的准备，下面证明定理 2.

由于在单生 Q 矩阵正则的情形，其决定的唯一过程即为最小单生过程，故由定理 1 知，此时结论成立. 下面主要处理单生 Q 矩阵可能非正则的情况. 一方面，由参考文献[10]的引理 1.21 推出：

$$P_i(\bar{\sigma}_j<\infty)=\frac{\sum_{n=0}^{\infty}\Pi_{ij}^{(n)}}{\sum_{n=0}^{\infty}\Pi_{jj}^{(n)}},i<j;$$

$$P_j(\bar{\sigma}_j<\infty)=1-\frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty}\Pi_{jj}^{(n)}}$$

和

$$P_i(\bar{\sigma}_j<\infty)=\frac{\sum_{n=0}^{\infty}\Pi_{ij}^{(n)}}{\sum_{n=0}^{\infty}\Pi_{jj}^{(n)}},i>j.$$

另一方面，由于嵌入链 $\{\bar{X}(n),n\geqslant 0\}$ 是离散时间单生过程，注意到嵌入链转移概率矩阵的定义（如式(4)），则由式(1)、(5)知，此时 $\bar{F}_n^{(i)}=F_n^{(i)}(n\geqslant i\geqslant 0)$，因此，直接应用命题 1 的结论，可得：

$$P_i(\bar{\sigma}_j<\infty)=1,i<j;$$

$$P_j(\bar{\sigma}_j<\infty)=1-\frac{p_{j,j+1}}{\sum_{n=j}^{\infty}\bar{F}_n^{(j)}}=1-\frac{q_{j,j+1}}{q_j\sum_{n=j}^{\infty}F_n^{(j)}}$$

和

$$P_i(\bar{\sigma}_j<\infty)=\frac{\sum_{n=i}^{\infty}\bar{F}_n^{(j)}}{\sum_{n=j}^{\infty}\bar{F}_n^{(j)}}=\frac{\sum_{n=i}^{\infty}F_n^{(j)}}{\sum_{n=j}^{\infty}F_n^{(j)}},i>j.$$

综合以上 2 个方面，可以推出：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Pi_{ij}^{(n)}=\frac{q_j}{q_{j,j+1}}\sum_{n=j}^{\infty}F_n^{(j)},i<j;$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Pi_{ij}^{(n)}=\frac{q_j}{q_{j,j+1}}\sum_{n=i}^{\infty}F_n^{(j)},i\geqslant j.$$

进而由参考文献[1]的定理 4.34 得到：

$$E_i(T_j)=\int_0^{\infty}p_{ij}^{\min}(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{q_j}\sum_{n=0}^{\infty}\Pi_{ij}^{(n)}=$$

$$\frac{1}{q_{j,j+1}}\sum_{n=j}^{\infty}F_n^{(j)},i<j;$$

$$E_i(T_j)=\int_0^{\infty}p_{ij}^{\min}(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{q_j}\sum_{n=0}^{\infty}\Pi_{ij}^{(n)}=$$

$$\frac{1}{q_{j,j+1}}\sum_{n=i}^{\infty}F_n^{(j)},i\geqslant j.$$

因此，有

$$E_i(T_j)=\frac{1}{q_{j,j+1}}\sum_{n=i\vee j}^{\infty}F_n^{(j)}.$$

定理2结论得证.

3 参考文献

[1] CHEN M F. From Markov chains to non-equilibrium particle systems [M]. 2nd ed. Singapore: World Scientific,2004

[2] 张余辉. 无限和有限状态空间上单生过程击中时矩的表示[J]. 北京师范大学学报(自然科学版),2013,49(5):445

[3] CHEN M F,ZHANG Y H. Unified representation of formulas for single birth processes [J]. Frontiers of Mathematics in China,2014,9(4):761

[4] LIAO Z G,WANG L D,ZHANG Y H. Probabilistic meanings of numerical characteristics for single birth processes[J]. Chinese J Applied Prob Stat,2016,32(5):452

[5] LIU Y Y,ZHANG Y H. Central limit theorems for ergodic continuous-time Markov chains with applications to single birth processes[J]. Frontiers of Mathematics in China,2015,10(4):933

[6] MAO Y H,ZHANG C,ZHANG Y H. Separation cutoff for upward skip-free chains[J]. J Applied Prob,2016,53(1):299

[7] 白晶晶,李培森,张余辉,等. 离散时间单生过程的判别准则[J]. 北京师范大学学报(自然科学版),2015,51(3):227

[8] 王玲娣,张余辉. 单生(死)$\boldsymbol{Q}$矩阵零流出(入)的判别准则[J]. 数学学报,2014,57(4):681

[9] 张余辉,赵倩倩. 带移民的单生过程[J]. 数学学报,2010,53(5):833

[10] 陈木法,毛永华. 随机过程导论[M]. 北京:高等教育出版社,2007

Explicit representation for mean occupation times of minimal single birth processes

LI Peisen ZHANG Yuhui

(School of Mathematical Sciences, Key Laboratory of Mathematics and Complex Systems of Ministry of Education, Beijing Normal University, 100875, Beijing, China)

Abstract Transition rate matrix is used to obtain an explicit representation for mean occupation times of minimal single birth processes under both regular and irregular conditions.

Keywords single birth process; mean occupation time; explicit representation