# 单死过程平稳分布的新表示*

张余辉†

(北京师范大学数学科学学院,数学与复杂系统教育部重点实验室,100875,北京)

**摘要** 利用单生过程 Poisson 方程解的表示,得到遍历单死过程平稳分布的新的表示.

**关键词** 单死过程;单生过程;平稳分布

**中图分类号** O211.6 **DOI**:10.16360/j.cnki.jbnuns.2016.02.003

平稳分布是马氏过程稳定性理论的重要内容之一,自然人们很关心如何求出遍历过程的平稳分布.对于最简单的马氏过程——生灭过程,其 $Q$ 矩阵为:

$$q_{i,i+1}=b_i>0(i\geqslant 0),\ q_{i,i-1}=a_i>0(i\geqslant 1),$$

其余 $q_{ij}=0\ (j\neq i)$,容易求得其平稳分布 $\pi=(\pi_i:i\geqslant 0)$,实际上,由可逆性或者从方程 $\pi Q=\mathbf{0}$ (其中 $\mathbf{0}$ 是指无穷维零行向量)出发,可以得到

$$\pi_{i+1}=\frac{b_i}{a_{i+1}}\pi_i,\quad i\geqslant 0.$$

因此,定义 $\mu_0=1,\mu_i=\dfrac{b_0b_1\cdots b_{i-1}}{a_1a_2\cdots a_i},i\geqslant 1,\mu=\sum\limits_{i=0}^{\infty}\mu_i$,则生灭过程的平稳分布有如下表示:$\pi_i=\mu_i/\mu(i\geqslant 0)$.

对于更一般的过程,如单生过程,其 $Q$ 矩阵为:$q_{i,i+1}>0\ (i\geqslant 0)$,$q_{ij}=0\ (j\geqslant i+2)$,其平稳分布则不那么容易求出,文献[1]给出了具体答案.单生过程只是把生灭过程的 $Q$ 矩阵死速条件放宽,自然也可以只把生灭过程的 $Q$ 矩阵生速条件放宽作推广,这就是单死过程,其 $Q$ 矩阵 $Q=(q_{ij}:i,j\in\mathbf{Z}_+)$ 满足:对所有 $i,j\in\mathbf{Z}_+$,$j\leqslant i-2$ 都有 $q_{ij}=0$,$q_{i,i-1}>0$.在生物遗传学等方面有广泛应用的分枝过程就是一类特殊的单死过程.关于单死过程平稳分布的表示,可以参看文献[2].为方便读者,我们将其平稳分布的结果写成如下定理.

**定理1** 给定正则单死 $Q$ 矩阵 $Q=(q_{ij}:i,j\in\mathbf{Z}_+)$,设其对应的过程遍历.定义

$$\bar{q}_k^{(n)}=\sum_{j=n}^{\infty}q_{kj}\,(n>k),$$

$$\mu_0=1,\mu_n=\frac{1}{q_{n,n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\bar{q}_k^{(n)}\mu_k,n\geqslant 1.$$

则该过程的平稳分布 $\pi=(\pi_n:n\geqslant 0)$ 有如下表示:

$$\pi_n=\frac{\mu_n}{\mu},\quad n\geqslant 0,\text{其中 }\mu:=\sum_{n=0}^{\infty}\mu_n.$$

实质上,求单死 $Q$ 过程的平稳分布就是解方程

$$\pi Q=\mathbf{0},$$

将方程两边转置后即是 $Q^{\mathrm{T}}\pi^{\mathrm{T}}=\mathbf{0}^{\mathrm{T}}$.

注意到单死 $Q$ 矩阵 $Q=(q_{ij}:i,j\in\mathbf{Z}_+)$ 的转置 $Q^{\mathrm{T}}=(q_{ij}{}^{\mathrm{T}}:i,j\in\mathbf{Z}_+)$ 是一个与单生 $Q$ 矩阵有关的矩阵,它恰是文献[3]的算子 $\Omega$,因此上述问题变成单生 $Q$ 过程 Poisson 方程 $\Omega g=f$ 的解问题,而我们最近的工作(见文献[3])给出了单生 $Q$ 过程 Poisson 方程解的显式表达,基于此,本文能够得到单死 $Q$ 过程平稳分布的一个新表示.具体结果如下.

定义函数 $c$:

$$c_i=\sum_{j=0}^{i-1}q_{ji}+q_{i+1,i}-\sum_{j=i+1}^{\infty}q_{ij}-q_{i,i-1},\quad i\geqslant 0.\tag{1}$$

再定义

$$\widetilde{F}_i^{(i)}=1,\ \widetilde{F}_n^{(i)}=\frac{1}{q_{n+1,n}}\sum_{k=i}^{n-1}\tilde{q}_n^{(k)}\widetilde{F}_k^{(i)},\ n>i\geqslant 0,\tag{2}$$

$$\tilde{q}_n^{(k)}=\sum_{j=0}^{k}q_{jn}-c_n,\quad n>k\geqslant 0.\tag{3}$$

**定理2** 给定正则单死 $Q$ 矩阵 $Q=(q_{ij}:i,j\in\mathbf{Z}_+)$,设其对应的过程遍历,则该过程的平稳分布 $\pi=(\pi_n:n\geqslant 0)$ 有如下表示:$\pi_n=\dfrac{\mu_n}{\mu}$, $n\geqslant 0$,其中

$$\mu_0=1,\mu_n=1-\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k}\frac{\widetilde{F}_k^{(j)}c_j}{q_{j+1,j}},n\geqslant 1;\mu:=\sum_{n=0}^{\infty}\mu_n.$$

**证明** 下面我们逐步推导该新表示.对于单死 $Q$ 矩阵 $Q=(q_{ij}:i,j\in\mathbf{Z}_+)$,定义相关单生 $Q$ 矩阵 $Q^*=(q_{ij}^*:i,j\in\mathbf{Z}_+)$ 如下:

$$q_{ij}^*=q_{ji},j\neq i;q_{ii}^*=-\sum_{j\neq i}q_{ij}^*=-\sum_{j\neq i}q_{ji},i\geqslant 0.$$

* 国家教育部"985"计划资助项目;国家自然科学基金重点资助项目(11131003);国家自然科学基金面上资助项目(11571043);中央高校基本科研业务费专项资金资助项目

† 通信作者,e-mail:zhangyh@bnu.edu.cn

收稿日期:2015-11-10

式(1)中定义的函数 $c$ 显然满足：$c_i=-q_{ii}^*+q_{ii}(i\geqslant 0)$. 定义算子 $\Omega$ 如下：

$$\Omega g=Q^* g+cg\text{，其中}(Q^* g)_i=\sum_j q_{ij}^*(g_j-g_i).$$

显然，算子 $\Omega=Q^*+\mathrm{diag}\{c_0,c_1,c_2,\cdots\}=Q^{\mathrm{T}}$. 因此，方程 $Q^{\mathrm{T}}\pi^{\mathrm{T}}=\mathbf{0}^{\mathrm{T}}$，即是单生 $Q$ 过程的 Poisson 方程 $\Omega g=\mathbf{0}^{\mathrm{T}}$. 注意到 $\widetilde{F}_i^{(i)}=1$，

$$\widetilde{F}_n^{(i)}=\frac{1}{q_{n,n+1}^*}\sum_{k=i}^{n-1}\widetilde{q}_n^{(k)}\widetilde{F}_k^{(i)},\ n>i\geqslant 0,\tag{4}$$

$$\widetilde{q}_n^{(k)}=\sum_{j=0}^{k}q_{nj}^*-c_n,\ n>k\geqslant 0,\tag{5}$$

结合式(4)和(5)，由文献[3]的定理1.1知，$\Omega$ 的调和函数 $g$(即 $\Omega g=\mathbf{0}^{\mathrm{T}}$)能够表示为

$$g_n=g_0\Big(1-\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k}\frac{\widetilde{F}_k^{(j)}c_j}{q_{j,j+1}^*}\Big),\quad n\geqslant 0.$$

取定 $g_0=1$，$\mu_n=g_n(n\geqslant 0)$，再规范化就得到了单死过程平稳分布的新表示. 定理结论得证.

注意，在定理1中，由于 $\mu_n$ 是递推定义的，因而该平稳分布的表示是递推的. 而在定理2的平稳分布新表示中，初看起来平稳分布不再是递推的，是直接的，但其表示中用到 $\widetilde{F}_k^{(j)}$，而在式(2)中 $\widetilde{F}_k^{(j)}$ 依然是递推定义的. 在实际计算中，对定理1的 $\mu_n$ 一般需要用数学归纳法推导，而定理2的 $\widetilde{F}_k^{(j)}$，有时可以直接递推得到. 下面看一个例子.

**例1** 给定正则单死 $Q$ 矩阵 $Q=(q_{ij}:i,j\in\mathbf{Z}_+)$ 为

$$q_{ij}=\frac{b-1}{b^{j-i+2}},\quad j\geqslant i+1;$$

$$q_{i,i-1}=\frac{b-1}{b},\quad q_i=-q_{ii}=\frac{b^2-b+1}{b^2},\quad i\geqslant 1;$$

$$q_{0j}=\frac{b-1}{b^{j+1}},\quad j\geqslant 1;\quad q_0=-q_{00}=\frac{1}{b},$$

其中常数 $b>2$(以保证其对应的过程遍历). 则过程的平稳分布为 $\pi_i=\dfrac{b-2}{(b-1)^{i+1}}$，$i\geqslant 0$.

按定理1的方法计算，可以得到：$\bar{q}_0^{(n)}=1/b^n(n>0)$，$\bar{q}_k^{(n)}=1/b^{n-k+1}(n>k\geqslant 1)$. 继而由定理1的结果用数学归纳法可以证明 $\mu_i=1/(b-1)^i(i\geqslant 0)$，因此，$\mu=(b-1)/(b-2)$，进而可以得到上述平稳分布.

按定理2的方法，由式(1)可得到 $c_i=(b-2)/b^{i+1}(i\geqslant 0)$；继而由式(3)得到 $\widetilde{q}_n^{(k)}=1/b^{n-k+1}(n>k\geqslant 0)$. 结合 $\widetilde{q}_n^{(k)}=\widetilde{q}_{n-1}^{(k)}/b(n-1>k\geqslant 0)$ 的事实，由式(2)推出

$$\widetilde{F}_n^{(i)}=\Big(\frac{1}{b}+\frac{b}{b-1}\widetilde{q}^{(n-1)}\Big)_n\widetilde{F}_{n-1}^{(i)}=\frac{1}{b-1}\widetilde{F}_{n-1}^{(i)},$$

$$n\geqslant i+2;$$

$$\widetilde{F}_{i+1}^{(i)}=\frac{1}{(b-1)b},i\geqslant 0.$$

由此得到

$$\widetilde{F}_n^{(i)}=\frac{1}{(b-1)^{n-i}b},\quad n>i\geqslant 0.$$

由以上结果和 $\widetilde{F}_i^{(i)}=1(i\geqslant 0)$，可以用定理2的结论直接计算出 $\mu_i=\dfrac{1}{(b-1)^i}(i\geqslant 0)$，进而，$\mu=\dfrac{b-1}{b-2}$，由此得到平稳分布.

## 参考文献


[1] 张余辉. 单生过程击中时与平稳分布[J]. 北京师范大学学报(自然科学版)，2004，40(2)：157

[2] 王玲娣，张余辉. 单生(死)Q矩阵零流出(入)的判别准则[J]. 数学学报，2014，57(4)：681

[3] Chen Mufa，Zhang Yuhui. Unified representation of formulas for single birth processes[J]. Frontiers of Mathematics in China，2014，9(4)：761


# A new representation of stationary distribution of single death processes


ZHANG Yuhui

(School of Mathematical Sciences，Key Laboratory of Mathematics and Complex Systems of Ministry of Education，Beijing Normal University，100875，Beijing，China)



**Abstract** The representation of a solution of Poisson equation for single birth processes is used in this paper to obtain a new representation of stationary distribution of ergodic single death processes.



**Keywords** single death process；single birth process；stationary distribution