离散时间单生过程的判别准则*

白晶晶　李培森　张余辉　赵　盼†
(北京师范大学数学科学学院，北京师范大学数学与复杂系统教育部重点实验室，100875，北京)

摘要　利用离散时间单生过程 Poisson 方程解的表示和最小非负解理论，用统一的方法给出了过程常返，正常返，强遍历，l 遍历，几何遍历的显式判别准则，回返概率(灭绝概率)，平稳分布及回返时的各阶矩，并给出了随机单调性的判别准则.

关键词　单生过程；常返；(强)遍历；l 遍历；几何遍历；平稳分布；回返时；随机单调
中图分类号　O211.6　　**DOI**：10.16360/j.cnki.jbnuns.2015.03.002

0　引言

状态空间 $E=\{0,1,2,\cdots\}$ 上的离散时间马氏链 $(X_n)_{n\geqslant 0}$，若其转移概率矩阵 $P=(p_{ij})$ 满足：$p_{i,i+1}>0$，$p_{ij}=0$ ($j\geqslant i+2$，i，$j\in E$)，则称其为离散时间单生过程.

单生过程是一类重要的马氏过程，在生物学，人口学，化学，经济学等学科中都有着重要的应用. 关于连续时间单生过程的研究，国外作者的文献参看[1-8]，国内作者的文献参看[9-25]，其中文献[9-10]和[14-19]给出了连续时间单生过程一些性质的显式判别准则. 而我们知道，离散时间马氏过程与连续时间马氏过程虽然有着密切联系，许多性质可以平行得到，但一些细微处有本质差别，例如在本文中将看到的随机单调性判别准则，因此对离散时间单生过程的一些基本性质，有必要研究和总结其判别准则，特别是最近文献[26]的工作，给我们带来了新思想和工具；而文献[27]的工作，也是我们的研究动机之一.

考虑离散时间单生过程 $P=(p_{ij})$. 给定函数 c，定义算子 Ω 如下

$$\Omega g=(P-I)g+cg,$$

其中 I 为单位算子. 以下记号贯穿全文：

$$\widetilde{F}_i^{(i)}=1,\quad \widetilde{F}_n^{(i)}=\frac{1}{p_{n,n+1}}\sum_{k=i}^{n-1}\widetilde{p}_n^{(k)}\widetilde{F}_k^{(i)},\quad n>i\geqslant 0,\tag{1}$$

$$\widetilde{p}_n^{(k)}=p_n^{(k)}-c_n:=\sum_{j=0}^{k}p_{nj}-c_n,\quad 0\leqslant k<n.\tag{2}$$

如果函数 $c\leqslant 0$，则 $\widetilde{p}_n^{(k)}\geqslant 0$，继而 $\widetilde{F}_n^{(k)}\geqslant 0$ ($n>k\geqslant 0$). 以后，当 $c_i\equiv 0$ 时我们会省略 $\widetilde{F}$ 和 $\widetilde{p}$ 的上标~，并约定 $\sum_{\varnothing}=0$.

在文献[26]的定理 1.1 中，取 $Q=P-I$，立刻得到离散时间单生过程 Poisson 方程解的如下表示(这是本文的主要工具之一).

定理 1　给定离散时间单生过程 $P=(p_{ij})$，2 个函数 c 和 f，则 Poisson 方程

$$\Omega g=f,\tag{3}$$

的解 g 有下列表示

$$g_n=g_0+\sum_{0\leqslant k\leqslant n-1}\sum_{0\leqslant j\leqslant k}\frac{\widetilde{F}_k^{(j)}(f_j-c_jg_0)}{p_{j,j+1}},\quad n\geqslant 0.\tag{4}$$

反之，对每个边界或初值 $g_0\in\mathbf{R}$，由式(4)定义的函数 (g_n) 是方程(3)的解.

另外，重述文献[26]的推论 2.2 如下.

命题 1　如下递归方程组

$$h_n=\frac{1}{\beta_n}\Big(\sum_{i\leqslant k\leqslant n-1}\alpha_{nk}h_k+f_n\Big),\quad n\geqslant i\tag{5}$$

的解 $(h_n)_{n\geqslant i}$ 可以表示为

$$h_n=\sum_{i\leqslant k\leqslant n}\frac{\gamma_{nk}}{\beta_k}f_k,\quad n\geqslant i,\tag{6}$$

其中对每个固定的 i，$(\gamma_{ni})_{n\geqslant i}$ ($\gamma_{ii}=1$) 是下列方程组的解：

$$\gamma_{ni}=\frac{1}{\beta_n}\sum_{i\leqslant k\leqslant n-1}\alpha_{nk}\gamma_{ki},\quad n>i.$$

等价地，

$$\gamma_{ii}=1,\ \gamma_{ni}=\sum_{i+1\leqslant k\leqslant n}\frac{\gamma_{nk}}{\beta_k}\alpha_{ki},\quad n\geqslant i+1.\tag{7}$$

在命题 1 中取 $\beta_n=p_{n,n+1}$ 和 $\alpha_{nk}=\widetilde{p}_n^{(k)}$，我们立刻

* 教育部“985”计划资助项目；高校博士点专项研究基金资助项目(20100003110005)；国家自然科学基金重点资助项目(11131003)；中央高校基本科研业务费专项基金资助项目
† 通信作者，e-mail：hebeipanpan@sina.com
收稿日期：2014-06-05

得到

推论 1 给定数列(f_n). 由

$$h_n=\frac{1}{p_{n,\,n+1}}(f_n+\sum_{i\leqslant k\leqslant n-1}\widetilde{p}_n^{(k)}h_k),\quad n\geqslant i$$

定义的数列(h_n)有如下统一的表示:

$$h_n=\sum_{k=i}^{n}\frac{\widetilde{F}_n^{(k)}}{p_{k,\,k+1}}f_k,\quad n\geqslant i.$$

特别地,式(1)中定义的数列$(\widetilde{F}_n^{(k)})$有如下表示

$$\widetilde{F}_i^{(i)}=1,\quad \widetilde{F}_n^{(i)}=\sum_{k=i+1}^{n}\frac{\widetilde{F}_n^{(k)}\widetilde{p}_k^{(i)}}{p_{k,\,k+1}},\quad n\geqslant i+1.\quad(8)$$

1 常返性和回返概率(灭绝概率)

在这节,我们考虑离散时间单生过程常返性的判别准则. 首先,在文献[10]的命题4.21(2)中取定$H=\{0\}$,则得到如下结论.

引理 1 设E上马氏链$P=(p_{ij})$不可约,则该马氏链常返当且仅当方程

$$x_i=\sum_j p_{ij}x_j+p_{i0},\quad i\in E\qquad(9)$$

的最小非负解$(x_i^*:i\in E)$对所有$i\in E$满足$x_i^*=\infty$.

以上判别准则依赖于方程解的性质,而对于离散时间单生过程,我们希望得到一个只依赖于转移概率矩阵$P=(p_{ij})$的显式判别准则,结果如下.

定理 2 设离散时间单生过程$P=(p_{ij})$不可约,则该单生过程常返当且仅当$\sum\limits_{n=0}^{\infty}F_n^{(0)}=\infty$,其中$(F_n^{(k)})$由式(1)所定义(此时$c_i\equiv 0$).

证明 改写方程(9)为

$$((P-I)x)_i=-p_{i0},\quad i\geqslant 0.$$

在定理1中取$c_i\equiv 0$和$f_i=-p_{i0}$,我们得到方程(9)的解如下:

$$x_n=x_0-\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k}\frac{F_k^{(j)}p_{j0}}{p_{j,j+1}},\quad n\geqslant 0.$$

再由式(8)和$p_{00}+p_{01}=1$推出

$$x_n=x_0-\frac{p_{00}}{p_{01}}-\sum_{k=1}^{n-1}(\sum_{j=1}^{k}\frac{F_k^{(j)}p_j^{(0)}}{p_{j,j+1}}+\frac{F_k^{(0)}p_{00}}{p_{01}})=$$
$$x_0+1-\frac{1}{p_{01}}-\sum_{k=1}^{n-1}(F_k^{(0)}+\frac{F_k^{(0)}p_{00}}{p_{01}})=$$
$$x_0+1-\frac{1}{p_{01}}\sum_{k=0}^{n-1}F_k^{(0)},\quad n\geqslant 1.$$

由最小非负性质知

$$x_0^*=\frac{1}{p_{01}}\sum_{k=0}^{\infty}F_k^{(0)}-1,\quad x_n^*=\frac{1}{p_{01}}\sum_{k=n}^{\infty}F_k^{(0)},\quad n\geqslant 1.$$

由引理1并综合以上,定理结论立刻得证.

注 1 实际上,取单生Q矩阵为$Q=P-I$,则其显然正则. 故由文献[10]的定理4.40(2)和定理4.52的(1)可以立刻得到上述定理的结论.

令$H\subset E$且$H\neq\varnothing$, E. 定义$\sigma_H:=\inf\{n\geqslant 1:X_n\in H\}$. 当$H$是单点集,例如$H=\{i\}$,简记$\sigma_{\{i\}}$为$\sigma_i$,称之为状态$i$的回返时. 称$P_n[\sigma_i<\infty]$为过程从$n$出发到状态$i$的回返概率. 特别地,当0为吸收态即$p_{00}=1$时,由于过程在到达0之前的行为与状态0无关,所以我们可以修改p_{00}和p_{01}使得后者大于零,从而保证新过程是不可约的. 此时新过程从n出发到状态0的回返概率就是原过程从n出发的灭绝概率($n\geqslant 1$). 所以,以下我们只推论离散时间不可约单生过程的回返概率.

定理 3 设离散时间单生过程$P=(p_{ij})$不可约. 则回返概率有如下表示:

$$P_0(\sigma_0<\infty)=\frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty}F_k^{(0)}+p_{00}}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}F_k^{(0)}},$$

$$P_n(\sigma_0<\infty)=\frac{\sum\limits_{k=n}^{\infty}F_k^{(0)}}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}F_k^{(0)}},\quad n\geqslant 1.$$

进而,对所有$n\geqslant 0$有$P_n(\sigma_0<\infty)=1$当且仅当$P_0(\sigma_0<\infty)=1$,等价地,当且仅当$\sum\limits_{n=0}^{\infty}F_n^{(0)}=\infty$.

证明 在文献[10]的引理4.46中取定$H=\{0\}$,则$(P_i(\sigma_0<\infty):i\in E)$是下列方程的最小非负解:

$$x_i=\sum_{k\neq 0}p_{ik}x_k+p_{i0},\quad i\in E.$$

改写上述方程为

$$((P-I)x)_i=-p_{i0}(1-x_0),\quad i\geqslant 0.$$

在定理1中取$c_i\equiv 0$和$f_i=-p_{i0}(1-x_0)$,得到前述方程的解如下:

$$x_n=x_0-\sum_{0\leqslant k\leqslant n-1}\sum_{0\leqslant j\leqslant k}\frac{F_k^{(j)}}{p_{j,j+1}}p_{j0}(1-x_0)=$$
$$x_0-\sum_{0\leqslant k\leqslant n-1}(\frac{F_k^{(0)}p_{00}}{p_{01}}+\sum_{1\leqslant j\leqslant k}\frac{F_k^{(j)}p_j^{(0)}}{p_{j,j+1}})(1-x_0)=$$
$$x_0-\sum_{1\leqslant k\leqslant n-1}(\frac{F_k^{(0)}p_{00}}{p_{01}}+F_k^{(0)})(1-x_0)-$$
$$\frac{p_{00}}{p_{01}}(1-x_0)=\frac{x_0}{p_{01}}\sum_{0\leqslant k\leqslant n-1}F_k^{(0)}-\frac{1}{p_{01}}\sum_{0\leqslant k\leqslant n-1}F_k^{(0)}+1,$$
$$n\geqslant 1.$$

由非负性推出

$$x_0\geqslant\sup_{n\geqslant 1}(1-\frac{p_{01}}{\sum\limits_{k=0}^{n-1}F_k^{(0)}})=1-\frac{p_{01}}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}F_k^{(0)}}.$$

再由最小性质得到最小非负解为

$$x_0^* = 1 - \frac{p_{01}}{\sum_{k=0}^{\infty} F_k^{(0)}} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} F_k^{(0)} + p_{00}}{\sum_{k=0}^{\infty} F_k^{(0)}},$$

$$x_n{}^* = 1 - \frac{\sum_{k=0}^{n-1} F_k^{(0)}}{\sum_{k=0}^{\infty} F_k^{(0)}} = \frac{\sum_{k=n}^{\infty} F_k^{(0)}}{\sum_{k=0}^{\infty} F_k^{(0)}}, \quad n \geqslant 1.$$

因此，我们证明定理结论的第 1 部分. 第 2 部分结论显然成立.

2　遍历性,强遍历性和回返时的一阶矩

下面我们考虑回返时 σ_0 的一阶矩. 为此，先介绍一个引理. 此引理可以由文献[10]的命题 4.21(1)和引理 4.29 直接得到.

引理 2　设 E 上马氏链的转移概率矩阵 P 不可约且马氏链常返. 则($x_i^* := E_i \sigma_H$：$i \in E$)是下列方程的最小非负解(可能为∞)：

$$x_i = \sum_{k \notin H} p_{ik} x_k + 1, \quad i \in E,$$

这里约定 $1 \cdot \infty = \infty$，$0 \cdot \infty = 0$.

下面我们定义另一个数列($\widetilde{d}_n$).

$$\widetilde{d}_0 = 0, \quad \widetilde{d}_n = \frac{1}{p_{n,n+1}} \left(1 + \sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{p}_n^{(k)} \widetilde{d}_k\right), \quad n \geqslant 1, \tag{10}$$

其中 $\widetilde{p}_n^{(k)}$ 的定义见式(2). 由推论 1 得出

$$\widetilde{d}_n = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} \frac{\widetilde{F}_n^{(j)}}{p_{j,j+1}}, \quad n \geqslant 0. \tag{11}$$

当 $c_i \equiv 0$ 时，我们省去($\widetilde{d}_n$)的上标~.

本节的主要结果如下.

定理 4　设离散时间单生过程 $P = (p_{ij})$不可约非周期且常返. 则

$$\mathbb{E}_0 \sigma_0 = 1 + p_{01} d, \ \mathbb{E}_n \sigma_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (F_k^{(0)} d - d_k), \ n \geqslant 1,$$

其中

$$d = \varlimsup_{k \to \infty} \frac{\sum_{n=0}^{k} d_n}{\sum_{n=0}^{k} F_n^{(0)}} = \lim_{n \to \infty} \frac{d_n}{F_n^{(0)}}, \text{如果极限存在.}$$

进而，该过程遍历即正常返当且仅当 $d < \infty$；该过程强遍历当且仅当

$$\sup_{k \in E} \sum_{n=0}^{k} (F_n^{(0)} d - d_n) < \infty.$$

证明　在引理 2 中取定 $H = \{0\}$，则($\mathbb{E}_i \sigma_0$)是下列方程的最小非负解(x_i^*)：

$$x_i = \sum_{k \neq 0} p_{ik} x_k + 1, \quad i \in E. \tag{12}$$

先假定对某个 $i \in E$ 有 $x_i^* < \infty$(则由不可约性知对所有 i 成立). 令(x_i)为方程(12)的一个有限解. 则有

$$((P - I)x)_i = p_{i0} x_0 - 1, \quad i \geqslant 1.$$

在定理 1 中取定 $c_i \equiv 0$ 和 $f_i = p_{i0} x_0 - 1$，得到方程的解为

$$x_n = x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{k} \frac{F_k^{(j)} f_j}{p_{j,j+1}} =$$

$$x_0 \left(1 + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{k} \frac{F_k^{(j)} p_{j0}}{p_{j,j+1}}\right) - \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{k} \frac{F_k^{(j)}}{p_{j,j+1}}, \quad n \geqslant 1.$$

由式(8)和(11)得出

$$x_n = \frac{x_0}{p_{01}} \sum_{k=0}^{n-1} F_k^{(0)} - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{F_k^{(0)}}{p_{01}} + d_k\right) =$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(F_k^{(0)} \frac{x_0 - 1}{p_{01}} - d_k\right), \quad n \geqslant 1.$$

再由最小非负性质推出

$$x_0^* = 1 + p_{01} \sup_{n \geqslant 1} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} d_k}{\sum_{k=0}^{n-1} F_k^{(0)}}$$

和

$$x_n{}^* = \sum_{k=0}^{n-1} \left(F_k^{(0)} \sup_{n \geqslant 1} \frac{\sum_{j=0}^{n-1} d_j}{\sum_{j=0}^{n-1} F_j^{(0)}} - d_k\right), \quad n \geqslant 1.$$

因此得到($\mathbb{E}_i \sigma_0$：$i \in E$). 下面我们证明在上两式中的上确界只能在无穷远处达到. 否则，假定在某个有限的 $n_0 \geqslant 1$ 处取到上确界,则

$$x_0^* = 1 + p_{01} \frac{\sum_{j=0}^{n_0 - 1} d_j}{\sum_{j=0}^{n_0 - 1} F_j^{(0)}},$$

进而 $x_{n_0}^* = 0$，这与 $x_i^* = \mathbb{E}_i \sigma_0 \geqslant 1 > 0$ 矛盾. 因此，

$$\sup_{n \geqslant 1} \frac{\sum_{j=0}^{n-1} d_j}{\sum_{j=0}^{n-1} F_j^{(0)}} = \varlimsup_{n \to \infty} \frac{\sum_{j=0}^{n} d_j}{\sum_{j=0}^{n} F_j^{(0)}} =: d.$$

再由 Stolz 定理得到 d 的表示中的后一个极限. 注意此时由于假定 $x_0^* < \infty$，所以 $d < \infty$. 为了去掉(x_i^*)有限的假定，我们证明即使 $x_i^* = \infty$，定理第一个结论依然成立. 因为此时必定 $d = \infty$. 否则，若 $d < \infty$，由定理 1 的后一结论，我们可以得到方程(12)的一个有限解，由非负解的比较定理立刻得出 $x_i^* < \infty$，这与假定 $x_i^* = \infty$矛盾. 至此，定理第一个结论证毕.

最后，由文献[10]的定理 4.30 知，过程遍历当且仅当$\mathbb{E}_0 \sigma_0 < \infty$，过程强遍历当且仅当$\sup_{i \in E} \mathbb{E}_i \sigma_0 < \infty$. 现在，可以由定理的第一个结论立刻得到，分别等价

地，过程遍历当且仅当 $d<\infty$，过程强遍历当且仅当 $\sup_{n\in E}\sum_{k=0}^{n}(F_k^{(0)}d-d_k)<\infty$. 定理证毕.

注 2 取单生 Q 矩阵为 $Q=P-I$，则其显然正则. 故由文献[10]的定理 4.40(2)和文献[26]的命题 5.2 可以立刻得到上述定理中关于遍历性和强遍历性的判别准则.

注 3 (1) 设离散时间单生过程 $P=(p_{ij})$ 不可约非周期且常返. 若 $\varliminf_{k\to\infty}p_{k0}>0$，则该过程遍历. 事实上，由合分比性质及式(8)和(11)可得

$$d\leqslant\lim_{k\to\infty}\frac{d_k}{F_k^{(0)}}\leqslant\varlimsup_{k\to\infty}\frac{1}{p_k^{(0)}}=\frac{1}{\varliminf_{k\to\infty}p_{k0}}<\infty.$$

(2) 设离散时间马氏过程 $P=(p_{ij})$ 不可约非周期且常返. 若存在某个 $k\in E$ 使得 $c:=\inf_{i\neq k}p_{ik}>0$，则该过程强遍历. 事实上，令 $y_k=0, y_i=1/c\ (i\neq k)$. 则可验证 (y_i) 是下列方程

$$\begin{cases}\sum_j p_{ij}y_j\leqslant y_i-1, & i\neq k,\\ \sum_j p_{kj}y_j<\infty\end{cases}$$

的一个有界非负解. 因此，由文献[10]的定理 4.31 知，该过程是强遍历的.

3 回返时的多项式阶矩，ℓ 遍历性和平稳分布

上一节我们讨论了回返时的一阶矩，现在研究回返时的多项式阶矩. 为此，给定正整数 $\ell\geqslant 1$，

$$\alpha_n^{(\ell)}=1+2^{\ell-1}+\cdots+n^{\ell-1}.$$

文献[12]的引理 3.1 给出了如下引理.

引理 3 给定不可约马氏链 $P=(p_{ij})$. 固定 $i_0\in E$. 则 $(x_i^*:=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^{(\ell)}P_i(\sigma_{i_0}=n))$ 是下列方程

$$x_i=\sum_{k\neq i_0}p_{ik}x_k+\mathbb{E}_i\sigma_{i_0}^{\ell-1},\quad i\in E \tag{13}$$

的最小非负解.

回忆若常返马氏链存在某个 $i_0\in E$(从而对所有的 $i\in E$)有 $\mathbb{E}_{i_0}\sigma_{i_0}^{\ell}<\infty$，则称该马氏链为 ℓ 遍历的. 1 遍历即正常返，我们约定常返为 0 遍历. 本节的主要结果如下.

定理 5 设离散时间单生过程 $P=(p_{ij})$ 不可约非周期且 $(\ell-1)$ 遍历 $(\ell\geqslant 1)$，即 $\mathbb{E}_i\sigma_{i_0}^{\ell-1}<\infty$ 对所有 $i\in E$ 成立. 记

$$m_{ii_0}^{(\ell)}:=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^{(\ell)}P_i(\sigma_{i_0}=n).$$

则

$$m_{ni_0}^{(\ell)}=\begin{cases}\sum_{n\leqslant k\leqslant i_0-1}v_k^{(\ell)}+m_{i_0i_0}^{(\ell)}(1-\sum_{n\leqslant k\leqslant i_0-1}u_k),\\ \qquad 0\leqslant n\leqslant i_0,\\ -\sum_{i_0\leqslant k\leqslant n-1}v_k^{(\ell)}+m_{i_0i_0}^{(\ell)}(1+\sum_{i_0\leqslant k\leqslant n-1}u_k),\\ \qquad n\geqslant i_0+1,\end{cases}$$

其中

$$u_k=\begin{cases}\sum_{j=i_0-1}^{k}\frac{F_k^{(j)}p_{ji_0}}{p_{j,j+1}}, & k\geqslant i_0,\\ 1, & k=i_0-1,\\ 0, & 0\leqslant k\leqslant i_0-2,\end{cases}$$

$$v_k^{(\ell)}=\sum_{j=0}^{k}\frac{F_k^{(j)}\,\mathbb{E}_j\sigma_{i_0}^{\ell-1}}{p_{j,j+1}},\quad k\geqslant 0,$$

$$m_{i_0i_0}^{(\ell)}=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\sum_{i_0\leqslant k\leqslant n}v_k^{(\ell)}}{1+\sum_{i_0\leqslant k\leqslant n}u_k}=\lim_{n\to\infty}\frac{v_n^{(\ell)}}{u_n}，如果极限存在.$$

进而，该过程 ℓ 遍历当且仅当 $m_{i_0i_0}^{(\ell)}<\infty$.

证明 由引理 3，$(m_{ii_0}^{(\ell)})$ 是方程(13)的最小非负解 (x_i^*). 如同上节，我们可以先假定 $x_i^*<\infty$. 改写方程(13)为

$$((P-I)x)_i=p_{ii_0}x_{i_0}-\mathbb{E}_i\sigma_{i_0}^{\ell-1},\quad i\in E.$$

在定理 1 中取定 $c_i\equiv 0$ 和 $f_i=p_{ii_0}x_{i_0}-\mathbb{E}_i\sigma_{i_0}^{\ell-1}$，得到方程的解为

$$x_n=x_0+\sum_{0\leqslant k\leqslant n-1}\sum_{j=0}^{k}\frac{F_k^{(j)}f_j}{p_{j,j+1}}=$$

$$x_0+x_{i_0}\sum_{0\leqslant k\leqslant n-1}u_k-\sum_{0\leqslant k\leqslant n-1}v_k^{(\ell)},\quad n\geqslant 0.$$

取 $n=i_0$，推出

$$x_0=\sum_{0\leqslant k\leqslant i_0-1}v_k^{(\ell)}+x_{i_0}(1-\sum_{0\leqslant k\leqslant i_0-1}u_k),$$

进而得出

$$x_n=\sum_{0\leqslant k\leqslant i_0-1}v_k^{(\ell)}-\sum_{0\leqslant k\leqslant n-1}v_k^{(\ell)}+$$

$$x_{i_0}(1-\sum_{0\leqslant k\leqslant i_0-1}u_k+\sum_{0\leqslant k\leqslant n-1}u_k)=$$

$$\begin{cases}\sum_{n\leqslant k\leqslant i_0-1}v_k^{(\ell)}+x_{i_0}(1-\sum_{n\leqslant k\leqslant i_0-1}u_k),\\ \qquad 0\leqslant n\leqslant i_0,\\ -\sum_{i_0\leqslant k\leqslant n-1}v_k^{(\ell)}+x_{i_0}(1+\sum_{i_0\leqslant k\leqslant n-1}u_k),\\ \qquad n\geqslant i_0+1.\end{cases}$$

当 $n\leqslant i_0$，由 u_k 的定义有 $\sum_{n\leqslant k\leqslant i_0-1}u_k\leqslant 1$，显然推出 $x_n>0$. 当 $n\geqslant i_0+1$，要使得 $x_n>0$，就需要

$$x_{i_0}\geqslant\sup_{n\geqslant i_0+1}\frac{\sum_{i_0\leqslant k\leqslant n-1}v_k^{(\ell)}}{1+\sum_{i_0\leqslant k\leqslant n-1}u_k}.$$

再由最小非负性质以及同上节一样的讨论，可以推出

$$x_{i_0}^* = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\sum_{i_0\leqslant k\leqslant n} v_k^{(\ell)}}{1+\sum_{i_0\leqslant k\leqslant n} u_k}.$$

再由 Stolz 定理得到 $x_{i_0}^*$ 的表示中的后一个极限，注意此时需要证明$\sum_k u_k=\infty$. 事实上，任意固定 $j_0\in E$，将$\{0,1,\cdots,j_0\}$视为单点，在$\{j_0, j_0+1,\cdots\}$上构造一个新的离散时间单生过程：

$$\bar{p}_{ij} = \begin{cases} p_{ij}, & j\geqslant j_0+1, \\ \sum_{k\leqslant j_0} p_{ik}, & j=j_0. \end{cases}$$

则由 P 不可约非周期且常返知，$\bar{P}=(\bar{p}_{ij})$不可约非周期且常返. 因此，由定理 2 知 $\sum_{n=j_0}^{\infty}\bar{F}_n^{(j_0)}=\infty$，其中

$$\bar{F}_i^{(i)}=1,\quad \bar{F}_n^{(i)}=\frac{1}{p_{n,n+1}}\sum_{k=i}^{n-1}\bar{p}_n^{(k)}\bar{F}_k^{(i)},\quad n>i\geqslant j_0,$$

这里 $\quad \bar{p}_n^{(k)}=\sum_{j=j_0}^{k}\bar{p}_{nj}\,(j_0\leqslant k<n).$

注意到 $\bar{p}_n^{(k)}=p_n^{(k)}\,(j_0\leqslant k<n)$，所以可证 $\bar{F}_n^{(i)}=F_n^{(i)}\,(n\geqslant i\geqslant j_0)$. 因此，$\sum_{n=j_0}^{\infty}F_n^{(j_0)}=\infty$. 由 j_0 的任意性知，$\sum_{n=j}^{\infty}F_n^{(j)}=\infty$ 对所有 $j\in E$ 成立. 进而

$$\sum_k u_k=\sum_{k=i_0-1}^{\infty}\sum_{j=i_0-1}^{k}\frac{F_k^{(j)}p_{ji_0}}{p_{j,j+1}}=\sum_{j=i_0-1}^{\infty}\frac{p_{ji_0}}{p_{j,j+1}}\sum_{k=j}^{\infty}F_k^{(j)}=\infty.$$

注意最后一个等号当 $i_0=0$ 时成立是因为 P 不可约，即存在 $j\geqslant1$ 使得 $p_{j0}>0$.

至于最后一个结论，注意到 $n^\ell/\ell\leqslant\alpha_n^{(\ell)}\leqslant(n+1)^\ell/\ell\leqslant 2^{\ell-1}(n^\ell+1)/\ell$，由此推出

$$\mathbb{E}_{i_0}\sigma_{i_0}^\ell\leqslant \ell\, m_{i_0i_0}^{(\ell)}\leqslant 2^{\ell-1}(\mathbb{E}_{i_0}\sigma_{i_0}^\ell+1).$$

故$\mathbb{E}_{i_0}\sigma_{i_0}^\ell<\infty$等价于 $m_{i_0i_0}^{(\ell)}<\infty$，由此得到该过程 ℓ 遍历当且仅当 $m_{i_0i_0}^{(\ell)}<\infty$. 至此，定理结论证毕.

注 4　(1) 在判别 ℓ 遍历时，为便于计算，一般取 $i_0=0$，即判断 $m_{00}{}^{(\ell)}<\infty$是否成立.

(2) 当 $\ell=1$ 时，$\alpha_n^{(1)}=n$，进而 $m_{ii_0}^{(1)}=\mathbb{E}_i\sigma_{i_0}$. 取 $i_0=0$，由于 $u_0=p_{00}/p_{01}$ 和

$$u_k=\sum_{j=0}^{k}\frac{F_k^{(j)}p_{j0}}{p_{j,j+1}}=\frac{F_k^{(0)}p_{00}}{p_{01}}+\sum_{j=1}^{k}\frac{F_k^{(j)}p_j^{(0)}}{p_{j,j+1}}= \frac{F_k^{(0)}p_{00}}{p_{01}}+F_k^{(0)}=\frac{F_k^{(0)}}{p_{01}},\quad k\geqslant1,$$

以及

$$v_k^{(1)}=\frac{F_k^{(0)}}{p_{01}}+d_k,\quad k\geqslant0,$$

则得到与定理 4 相同的结论：

$$m_{00}^{(1)}=\mathbb{E}_0\sigma_0=1+p_{01}\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\sum_{0\leqslant k\leqslant n}d_k}{\sum_{0\leqslant k\leqslant n}F_k^{(0)}}=1+p_{01}d,$$

$$m_{n0}^{(1)}=\mathbb{E}_n\sigma_0=\sum_{k=0}^{n-1}(F_k^{(0)}d-d_k),\quad n\geqslant1.$$

(3) 实际上，由数学归纳法和推论 1 不难证明

$$F_k^{(i_0)}=p_{i_0,i_0+1}(u_k+\delta_{ki_0}),\quad k\geqslant i_0.$$

注意，连续时间则相应为

$$F_k^{(i_0)}=\frac{q_{i_0,i_0+1}}{q_{i_0}}(u_k+\delta_{ki_0}),\quad k\geqslant i_0.$$

实际上，对于$\mathbb{E}_n\sigma_{i_0}^\ell$，也有类似引理 3 的如下结论(参见文献[11]的定理 6.7.4).

引理 4　给定不可约马氏链 $P=(p_{ij})$和 $H\subset E$. 则对 $\ell\geqslant1$，$(x_i^*:=\mathbb{E}_i\sigma_H^\ell)$是下列方程

$$x_i=\sum_{k\notin H}p_{ik}x_k+\sum_{s=1}^{\ell}C_\ell^s(-1)^{s-1}\,\mathbb{E}_i\sigma_H^{\ell-s},\quad i\in E$$

的最小非负解，其中 C_ℓ^s 表示从 ℓ 个元素里每次取出 s 个的所有不同的组合种数.

由此引理，我们可以得到关于$\mathbb{E}_n\sigma_{i_0}^\ell$ 的结果如下.

定理 6　设离散时间单生过程 $P=(p_{ij})$不可约非周期且$(\ell-1)$遍历$(\ell\geqslant1)$. 则

$$\mathbb{E}_n\sigma_{i_0}^\ell=\begin{cases}\sum_{n\leqslant k\leqslant i_0-1}\bar{v}_k^{(\ell)}+\mathbb{E}_{i_0}\sigma_{i_0}^\ell\Big(1-\sum_{n\leqslant k\leqslant i_0-1}u_k\Big), \\ \qquad 0\leqslant n\leqslant i_0, \\ -\sum_{i_0\leqslant k\leqslant n-1}\bar{v}_k^{(\ell)}+\mathbb{E}_{i_0}\sigma_{i_0}^\ell\Big(1+\sum_{i_0\leqslant k\leqslant n-1}u_k\Big), \\ \qquad n\geqslant i_0+1,\end{cases}$$

其中 u_k 的定义同定理 5 中，

$$\bar{v}_k^{(\ell)}=\sum_{j=0}^{k}\frac{F_k^{(j)}}{p_{j,j+1}}\sum_{s=1}^{\ell}C_\ell^s(-1)^{s-1}\,\mathbb{E}_j\sigma_{i_0}^{\ell-s},\quad k\geqslant0,$$

$$\mathbb{E}_{i_0}\sigma_{i_0}^\ell=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\sum_{i_0\leqslant k\leqslant n}\bar{v}_k^{(\ell)}}{1+\sum_{i_0\leqslant k\leqslant n}u_k}=\lim_{n\to\infty}\frac{\bar{v}_n^{(\ell)}}{u_n},$$

如果极限存在.

证明　由引理 4，$(\mathbb{E}_i\sigma_{i_0}^\ell)$是方程

$$x_i=\sum_{k\neq i_0}p_{ik}x_k+\sum_{s=1}^{\ell}C_\ell^s(-1)^{s-1}\,\mathbb{E}_i\sigma_{i_0}^{\ell-s},\quad i\in E \tag{14}$$

的最小非负解(x_i^*). 如同上节，我们可以先假定 $x_i^*<\infty$. 改写方程(14)为

$$((P-I)x)_i=p_{ii_0}x_{i_0}-\sum_{s=1}^{\ell}C_\ell^s(-1)^{s-1}\,\mathbb{E}_i\sigma_{i_0}^{\ell-s},\ i\in E.$$

在定理 1 中取定 $c_i\equiv0$ 和

$$f_i=p_{ii_0}x_{i_0}-\sum_{s=1}^{\ell}C_\ell^s(-1)^{s-1}\mathbb{E}_i\sigma_{i_0}^{\ell-s},$$

得到方程的解为

$$x_n=x_0+\sum_{0\leqslant k\leqslant n-1}\sum_{j=0}^{k}\frac{F_k^{(j)}f_j}{p_{j,j+1}}=$$
$$x_0+x_{i_0}\sum_{0\leqslant k\leqslant n-1}u_k-\sum_{0\leqslant k\leqslant n-1}\bar{v}_k^{(\ell)},\quad n\geqslant 0.$$

取 $n=i_0$，推出

$$x_0=\sum_{0\leqslant k\leqslant i_0-1}\bar{v}_k^{(\ell)}+x_{i_0}(1-\sum_{0\leqslant k\leqslant i_0-1}u_k),$$

进而得出

$$x_n=\sum_{0\leqslant k\leqslant i_0-1}\bar{v}_k^{(\ell)}-\sum_{0\leqslant k\leqslant n-1}\bar{v}_k^{(\ell)}+$$
$$x_{i_0}(1-\sum_{0\leqslant k\leqslant i_0-1}u_k+\sum_{0\leqslant k\leqslant n-1}u_k)=$$
$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{n\leqslant k\leqslant i_0-1}\bar{v}_k^{(\ell)}+x_{i_0}(1-\sum_{n\leqslant k\leqslant i_0-1}u_k),\\ \qquad 0\leqslant n\leqslant i_0,\\ \displaystyle-\sum_{i_0\leqslant k\leqslant n-1}\bar{v}_k^{(\ell)}+x_{i_0}(1+\sum_{i_0\leqslant k\leqslant n-1}u_k),\\ \qquad n\geqslant i_0+1.\end{cases}$$

当 $n\leqslant i_0$，由 u_k 的定义有 $\sum_{n\leqslant k\leqslant i_0-1}u_k\leqslant 1$，显然推出 $x_n>0$. 当 $n\geqslant i_0+1$，要使得 $x_n>0$，就需要

$$x_{i_0}\geqslant\sup_{n\geqslant i_0+1}\frac{\sum_{i_0\leqslant k\leqslant n-1}\bar{v}_k^{(\ell)}}{1+\sum_{i_0\leqslant k\leqslant n-1}u_k}.$$

再由最小非负性质以及同上节一样的讨论，可以推出

$$x_{i_0}^*=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\sum_{i_0\leqslant k\leqslant n}\bar{v}_k^{(\ell)}}{1+\sum_{i_0\leqslant k\leqslant n}u_k}.$$

由于定理 5 中已经证明 $\sum_k u_k=\infty$，再由 Stolz 定理得到 $x_{i_0}^*$ 的表示中的后一个极限. 定理结论证毕.

注 5 比较定理 5 和定理 6，则有 $\bar{v}_k^{(\ell)}=\sum_{s=1}^{\ell}C_\ell^s(-1)^{s-1}v_k^{(\ell-s+1)}$. 虽然 2 个定理都能够得到 ℓ 遍历的判定，但前者的表达和计算显然更为简洁.

而对于首次击中时 $\tau_{i_0}:=\inf\{n\geqslant 0:X_n=i_0\}$，由局部化定理(参见文献[10]的定理 2.13)和引理 3，我们得到下面的引理.

引理 5 给定不可约马氏链 $P=(p_{ij})$. 固定 $i_0\in E$. 则下列方程

$$x_i=\sum_k p_{ik}x_k+\mathbb{E}_i\sigma_{i_0}^{\ell-1},\quad i\neq i_0;\quad x_{i_0}=0\qquad(15)$$

的最小非负解 (x_i^*) 为：$x_i^*=\bar{m}_{ii_0}^{(\ell)}(i\in E)$，其中

$$\bar{m}_{ii_0}^{(\ell)}:=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^{(\ell)}P_i(\tau_{i_0}=n).$$

注意当出发点 $i\neq i_0$ 时，$\sigma_{i_0}=\tau_{i_0}$，所以 $\bar{m}_{ii_0}^{(\ell)}=m_{ii_0}^{(\ell)}$ $(i\neq i_0)$(后者的定义见定理 5). 由上述引理，我们可以得到的结果如下.

定理 7 设离散时间单生过程 $P=(p_{ij})$ 不可约非周期且 $(\ell-1)$ 遍历 $(\ell\geqslant 1)$. 则

$$\bar{m}_{ni_0}^{(\ell)}=\begin{cases}\displaystyle\sum_{n\leqslant k\leqslant i_0-1}v_k^{(\ell)},\\ \qquad 0\leqslant n\leqslant i_0,\\ \displaystyle-\sum_{i_0\leqslant k\leqslant n-1}v_k^{(\ell)}+c_{i_0}^{(\ell)}\sum_{i_0\leqslant k\leqslant n-1}F_k^{(i_0)},\\ \qquad n\geqslant i_0+1,\end{cases}$$

其中 $v_k^{(\ell)}$ 的定义同定理 5 中，

$$c_{i_0}^{(\ell)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i_0\leqslant k\leqslant n}v_k^{(\ell)}}{\sum_{i_0\leqslant k\leqslant n}F_k^{(i_0)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{v_n^{(\ell)}}{F_n^{(i_0)}},\text{如果极限存在.}$$

进而，该过程 ℓ 遍历当且仅当 $c_{i_0}^{(\ell)}<\infty$.

证明 由引理 5，方程(15)的最小非负解 (x_i^*) 是 $x_i^*=\bar{m}_{ii_0}^{(\ell)}(i\neq i_0)$，$x_{i_0}^*=0$. 如同上节，我们可以先假定 $x_i^*<\infty$. 改写方程(15)为

$$((P-I)x)_i=-\mathbb{E}_i\sigma_{i_0}^{\ell-1},\quad i\neq i_0,$$
$$((P-I)x)_{i_0}=f_{i_0},$$

其中 f_{i_0} 待定. 在定理 1 中取定 $c_i\equiv 0$ 和 $f_i=-\mathbb{E}_i\sigma_{i_0}^{\ell-1}$ $(i\neq i_0)$，得到方程的解为

$$x_n=x_0+\sum_{0\leqslant k\leqslant n-1}\sum_{0\leqslant j\leqslant k}\frac{F_k^{(j)}f_j}{p_{j,j+1}},\quad n\geqslant 0.$$

则

$$x_n=x_0-\sum_{0\leqslant k\leqslant n-1}v_k^{(\ell)},\quad n\leqslant i_0.$$

由 $x_{i_0}=0$ 推出

$$x_n=\sum_{n\leqslant k\leqslant i_0-1}v_k^{(\ell)},\quad 0\leqslant n\leqslant i_0.$$

注意到

$$f_{i_0}=((P-I)x)_{i_0}=p_{i_0,i_0+1}x_{i_0+1}+\sum_{j=0}^{i_0-1}p_{i_0j}x_j=$$
$$p_{i_0,i_0+1}x_{i_0+1}+\sum_{j=0}^{i_0-1}p_{i_0j}(x_j-x_{i_0})=$$
$$p_{i_0,i_0+1}x_{i_0+1}+\sum_{j=0}^{i_0-1}p_{i_0j}\sum_{i=j}^{i_0-1}(x_i-x_{i+1})=$$
$$p_{i_0,i_0+1}x_{i_0+1}+\sum_{i=0}^{i_0-1}p_{i_0}^{(i)}v_i^{(\ell)}.$$

再由推论 1 知，

$$f_{i_0}=p_{i_0,i_0+1}x_{i_0+1}+p_{i_0,i_0+1}v_{i_0}^{(\ell)}-\mathbb{E}_{i_0}\sigma_{i_0}^{\ell-1},$$

即

$$\frac{f_{i_0}+\mathbb{E}_{i_0}\sigma_{i_0}^{\ell-1}}{p_{i_0,i_0+1}}=x_{i_0+1}+v_{i_0}^{(\ell)}.$$

因此，对 $n\geqslant i_0+1$，由以上讨论得出

$$x_n=x_0+\sum_{0\leqslant k\leqslant n-1}\sum_{j=0}^{k}\frac{F_k^{(j)}f_j}{p_{j,j+1}}=\sum_{k=i_0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k}\frac{F_k^{(j)}f_j}{p_{j,j+1}}=$$
$$-\sum_{k=i_0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k}\frac{F_k^{(j)}\mathbb{E}_j\sigma_{i_0}^{\ell-1}}{p_{j,j+1}}+\sum_{k=i_0}^{n-1}\frac{F_k^{(i_0)}(f_{i_0}+\mathbb{E}_{i_0}\sigma_{i_0}^{\ell-1})}{p_{i_0,i_0+1}}=$$

$$(x_{i_0+1}+v_{i_0}^{(l)})\sum_{k=i_0}^{n-1}F_k^{(i_0)}-\sum_{k=i_0}^{n-1}v_k^{(l)}.$$

当 $n\geqslant i_0+1$，要使得 $x_n>0$，就需要

$$x_{i_0+1}+v_{i_0}^{(l)}\geqslant\sup_{n\geqslant i_0+1}\frac{\sum\limits_{i_0\leqslant k\leqslant n-1}v_k^{(l)}}{\sum\limits_{i_0\leqslant k\leqslant n-1}F_k^{(i_0)}}.$$

再由最小非负性质以及同上节一样的讨论，可以推出

$$x_{i_0+1}^*+v_{i_0}^{(l)}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\sum\limits_{i_0\leqslant k\leqslant n}v_k^{(l)}}{\sum\limits_{i_0\leqslant k\leqslant n}F_k^{(i_0)}}=:c_{i_0}^{(l)}.$$

再由 Stolz 定理得到 $c_{i_0}^{(l)}$ 的表示中的后一个极限，注意此时需要 $\sum_{k=i_0}^{\infty}F_k^{(i_0)}=\infty$，这个事实见定理 5 中的证明. 进而得到

$$x_n^*=-\sum_{k=i_0}^{n-1}v_k^{(l)}+c_{i_0}^{(l)}\sum_{k=i_0}^{n-1}F_k^{(i_0)},\quad n\geqslant i_0+1.$$

当 $i\neq i_0$ 时，$\overline{m}_{ii_0}^{(l)}=m_{ii_0}^{(l)}$. 所以将上述结果与定理 5 比较，由注 4 的(3)，可以得到

$$m_{i_0i_0}{}^{(l)}=p_{i_0,i_0+1}c_{i_0}^{(l)}.$$

因此，由定理 5 知，该过程 l 遍历当且仅当 $c_{i_0}^{(l)}<\infty$. 定理证毕.

由定理 5、定理 6 和注 4 的(3)直接得到如下推论.

推论 2　设离散时间单生过程 $P=(p_{ij})$不可约非周期且遍历. 则过程的平稳分布 $\pi=(\pi_i)$为：

$$\pi_i=\frac{1}{m_{ii}^{(1)}}=\frac{1}{p_{i,i+1}c_i^{(1)}},\quad i\geqslant 0,$$

其中

$$c_i^{(1)}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\sum\limits_{i\leqslant k\leqslant n}v_k^{(1)}}{\sum\limits_{i\leqslant k\leqslant n}F_k^{(i)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{v_n{}^{(1)}}{F_n^{(i)}},$$

如果极限存在；

$$v_k^{(1)}=\sum_{j=0}^{k}\frac{F_k^{(j)}}{p_{j,j+1}},\quad k\geqslant 0.$$

4　回返时的几何阶矩

这节我们研究回返时的几何阶矩. 为此，先给出如下引理.

引理 6　给定不可约马氏链 $P=(p_{ij})$和 $H\subset E$. 则$(x_i^*:=\mathbb{E}_i\rho^{\sigma_H})$是下列方程

$$x_i=\sum_{k\notin H}\rho p_{ik}x_k+\rho p_{iH},\quad i\in E \tag{16}$$

的最小非负解，其中常数 $\rho>1$，$p_{iH}=\sum_{j\in H}p_{ij}$.

证明　定义 $x_i{}^{(1)}=\rho p_{iH}$，$x_i{}^{(n+1)}=\sum_{k\notin H}\rho p_{ik}x_k{}^{(n)}$ $(n\geqslant 1)$. 由最小非负解的第二递归逼近法(参见[10]的定理 2.9)知，方程(16)的最小非负解为 $x_i^*=\sum_{n=1}^{\infty}x_i^{(n)}$. 注意到 $x_i^{(1)}=\rho P_i[\sigma_H=1]$，

$$x_i^{(2)}=\sum_{k\notin H}\rho p_{ik}x_k^{(1)}=\sum_{k\notin H}\rho p_{ik}\rho p_{kH}=\rho^2P_i[\sigma_H=2].$$

由数学归纳法不难证明 $x_i^{(n)}=\rho^nP_i[\sigma_H=n]$ $(n\geqslant 1)$. 进而

$$x_i^*=\sum_{n=1}^{\infty}x_i^{(n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\rho^nP_i[\sigma_H=n]=\mathbb{E}_i\rho^{\sigma_H},$$

上式对任意 $i\in E$ 成立. 结论证毕.

关于回返时的几何阶矩，我们得到如下结果.

定理 8　设离散时间单生过程 $P=(p_{ij})$不可约非周期且遍历. 在$(\widetilde{F}_k^{(i)})$和$(\widetilde{d}_k)$的定义中(参见式(1)和(10)). 取 $c_i\equiv(\rho-1)/\rho\in(0,1)$，其中 $\rho>1$. 对于接近 1 的 ρ，则有

$$\mathbb{E}_0\rho^{\sigma_0}=p_{01}(\rho-1)\widetilde{d}+\rho<\infty,$$

$$\mathbb{E}_n\rho^{\sigma_0}=1+\frac{\rho-1}{\rho}\sum_{k=0}^{n-1}(\widetilde{F}_k^{(0)}\widetilde{d}-\widetilde{d}_k)<\infty,\quad n\geqslant 1$$

当且仅当

$$\widetilde{d}:=\overline{\lim_{n\to\infty}}1_{\{\sum_{k=0}^{n}\widetilde{F}_k^{(0)}>0\}}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\widetilde{d}_k}{\sum\limits_{k=0}^{n}\widetilde{F}_k^{(0)}}<\infty$$

以及当 $n\geqslant 2$，$\sum_{k=0}^{n-1}\widetilde{F}_k^{(0)}\leqslant 0$ 时

$$\widetilde{d}\sum_{k=0}^{n-1}\widetilde{F}_k^{(0)}>\sum_{k=0}^{n-1}\widetilde{d}_k \tag{17}$$

同时成立. 进而，一旦对充分大的 n 有$\widetilde{F}_n^{(0)}>0$ 和 $\sum_n\widetilde{F}_n^{(0)}=\infty$，则

$$\widetilde{d}=\lim_{n\to\infty}\frac{\widetilde{d}_n}{\widetilde{F}_n^{(0)}},$$

如果此极限存在.

此外，过程是几何遍历的当且仅当 $\widetilde{d}<\infty$ 和式(17)两者成立.

证明　在引理 6 中取 $H=\{0\}$，方程(16)的最小非负解(x_i^*)是 $x_i^*=\mathbb{E}_i\rho^{\sigma_0}$. 如同上节，我们可以先假定 $x_i^*<\infty$. 令(x_i)为方程(16)的一个有限非负解，改写方程(16)为

$$((P-I)x)_i+\frac{\rho-1}{\rho}x_i=p_{i0}(x_0-1),\quad i\in E. \tag{18}$$

在定理 1 中取定 $c_i\equiv(\rho-1)/\rho$ 和 $f_i=p_{i0}(x_0-1)$ $(i\geqslant 0)$，得到上述方程的解为

$$x_n=x_0\Big(1-\frac{\rho-1}{\rho}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k}\frac{\widetilde{F}_k^{(j)}}{p_{j,j+1}}\Big)+$$

$$(x_0-1)\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k}\frac{\widetilde{F}_k^{(j)}p_{j0}}{p_{j,j+1}}=$$
$$x_0(1-\frac{\rho-1}{\rho}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k}\frac{\widetilde{F}_k^{(j)}}{p_{j,j+1}})+(x_0-1)\cdot$$
$$\sum_{0\leqslant k\leqslant n-1}(\frac{\widetilde{F}_k^{(0)}p_{00}}{p_{01}}+\sum_{j=1}^{k}\frac{\widetilde{F}_k^{(j)}(\widetilde{p}_j^{(0)}+1-\rho^{-1})}{p_{j,j+1}}),$$
$$n\geqslant 1.$$

由分别在式(8)和(11)给出的 $\widetilde{F}_n^{(k)}$ 和 $\widetilde{d}_n$ 的显式表示，我们推出

$$x_n=x_0(1-\frac{\rho-1}{\rho}\sum_{k=0}^{n-1}(\frac{\widetilde{F}_k^{(0)}}{p_{01}}+\widetilde{d}_k))+$$
$$(x_0-1)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\widetilde{F}_k^{(0)}p_{00}}{p_{01}}+$$
$$(x_0-1)\sum_{k=1}^{n-1}(\widetilde{F}_k^{(0)}+\frac{\rho-1}{\rho}\widetilde{d}_k)=$$
$$\frac{x_0}{\rho p_{01}}\sum_{k=0}^{n-1}\widetilde{F}_k^{(0)}-\sum_{k=0}^{n-1}(\frac{\widetilde{F}_k^{(0)}}{p_{01}}+\frac{\rho-1}{\rho}\widetilde{d}_k)+1,\quad n\geqslant 1. \tag{19}$$

因为 $x_n>1$，所以得到

$$\frac{x_0}{\rho p_{01}}\sum_{k=0}^{n-1}\widetilde{F}_k^{(0)}>\sum_{k=0}^{n-1}(\frac{\widetilde{F}_k^{(0)}}{p_{01}}+\frac{\rho-1}{\rho}\widetilde{d}_k),\quad n\geqslant 1.$$

此即为

$$[\frac{x_0}{\rho p_{01}}-\frac{1}{p_{01}}]\sum_{k=0}^{n-1}\widetilde{F}_k^{(0)}>\frac{\rho-1}{\rho}\sum_{k=0}^{n-1}\widetilde{d}_k,\quad n\geqslant 1. \tag{20}$$

注意到，一方面,如果 $x_0^*=x_0^*(\rho_0)<\infty$，则由比较定理(参见[10]的定理 2.6)知，对所有 $\rho\in(1,\rho_0)$ 有 $x_0^*=x_0^*(\rho)<\infty$ 成立. 另一方面，当 $\rho=1$ 时，有

$$\sum_{k=0}^{n}\widetilde{F}_k^{(0)}=\sum_{k=0}^{n}F_k^{(0)}>0,\ \sum_{k=0}^{n}\widetilde{d}_k=\sum_{k=0}^{n}d_k>0,\ n\geqslant 1.$$

对于固定的 n，$\sum_{k=0}^{n}\widetilde{F}_k^{(0)}$ 和 $\sum_{k=0}^{n}\widetilde{d}_k$ 关于 ρ 是解析的，所以对充分接近于 1 的 ρ(即存在某个 $\rho_1\in(1,\rho_0]$，对所有 $\rho\in(1,\rho_1]$)，它们都应该是正的. 再由式(20)，有

$$\frac{x_0}{\rho p_{01}}-\frac{1}{p_{01}}>0,\quad \rho\in(1,\rho_1)$$

成立，与 n 无关. 因此，由最小非负性质，我们得到

$$\frac{x_0^*}{\rho p_{01}}-\frac{1}{p_{01}}=\frac{\rho-1}{\rho}\overline{\lim_{n\to\infty}}1_{\{\sum_{k=0}^{n}\widetilde{F}_k^{(0)}>0\}}\cdot$$
$$[\sum_{k=0}^{n}\widetilde{d}_k][\sum_{k=0}^{n}\widetilde{F}_k^{(0)}]^{-1}=\frac{\rho-1}{\rho}\widetilde{d},$$

即

$$\mathbb{E}_0\rho^{\sigma_0}=x_0^*=p_{01}(\rho-1)\widetilde{d}+\rho. \tag{21}$$

因为 x_0^* 满足式(20)，我们得到条件(17)，此时，

$$\mathbb{E}_n\rho^{\sigma_0}=1+\frac{\rho-1}{\rho}\sum_{k=0}^{n-1}(\widetilde{F}_k^{(0)}\widetilde{d}-\widetilde{d}_k),\quad n\geqslant 1.$$

反之，如果 $\widetilde{d}<\infty$ 和式(17)成立. 则从式(21)定义 $x_0=x_0^*$ 出发，由式(19)定义其他的 x_n，由此我们构造了方程(18)的一个有限非负解($x_i>1$：$i\in E$). 因此，最小非负解($x_i^*=\mathbb{E}_i\rho^{\sigma_0}$：$i\in E$)应该是有限的.

最后，由文献[10]的定理 4.30，过程几何遍历当且仅当对某个 $\rho>1$ 有 $\mathbb{E}_0\rho^{\sigma_0}<\infty$，等价地，$\widetilde{d}<\infty$ 和式(17)同时成立. 定理的最后一个结论得证.

5 随机单调性

对于状态空间 $E=\{0,1,2,\cdots\}$ 上的 2 个离散时间马氏链 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 和 $(\overline{X}_n)_{n\geqslant 0}$，其转移概率矩阵分别记为 $P=(p_{ij})$ 和 $\overline{P}=(\overline{p}_{ij})$，$n$ 步转移概率矩阵记为 $P^n=(p_{ij}^{(n)})$ 和 $\overline{P}^n=(\overline{p}_{ij}^{(n)})$. 若对任意的 $i\leqslant m$，有

$$\sum_{j\geqslant k}p_{ij}^{(n)}\leqslant\sum_{j\geqslant k}\overline{p}_{mj}^{(n)},\quad k\in E,\ n\geqslant 1$$

成立，则称 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 和 $(\overline{X}_n)_{n\geqslant 0}$ 随机可比，也称 P 和 $\overline{P}$ 是随机可比的. 若对任意的 $i\leqslant m$，有

$$\sum_{j\geqslant k}p_{ij}^{(n)}\leqslant\sum_{j\geqslant k}p_{mj}^{(n)},\quad k\in E,\ n\geqslant 1$$

成立，则称 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 随机单调，也称 P 是随机单调的.

由上述定义，不难证明下列结论(参看文献[1]的引理 7.3.3).

引理 7 P 和 $\overline{P}$ 随机可比当且仅当

$$\sum_{j\geqslant k}p_{ij}\leqslant\sum_{j\geqslant k}\overline{p}_{mj},\quad i\leqslant m,\ k\in E.$$

P 随机单调当且仅当对任意的 $k\in E$，$\sum_{j\geqslant k}p_{ij}$ 关于 i 是单调递增的.

定理 9 给定离散时间单生过程 $P=(p_{ij})$. 则 P 是随机单调的当且仅当

$$\sum_{j=0}^{k}p_{ij}\geqslant\sum_{j=0}^{k}p_{i+1,j},\quad 0\leqslant k\leqslant i.$$

特别地，对于离散时间生灭过程 $P=(p_{ij})$，则 P 随机单调当且仅当

$$p_{i,i+1}+p_{i+1,i}\leqslant 1,\quad i\in E,$$

证明 由引理 7 知，P 随机单调当且仅当对任意的 $k\in E$，$\sum_{j\geqslant k}p_{ij}$ 关于 i 是单调递增的，后者显然等价于对任意的 $k\in E$，$\sum_{0\leqslant j\leqslant k-1}p_{ij}$ 关于 i 是单调递减的，即对任意的 $k,i\in E$，$\sum_{j=0}^{k}p_{ij}\geqslant\sum_{j=0}^{k}p_{i+1,j}$. 由此，结合单生性质，得证前一结论. 再由离散时间生灭过程转移矩阵的特点，容易验证 P 随机单调当且仅当

$$p_{i,i-1}+p_{ii}\geqslant p_{i+1,i},\quad i\in E,$$

此即

$$p_{i,i+1}+p_{i+1,i}\leqslant 1,\quad i\in E,$$

所以后一结论成立. 定理结论证毕.

6 参考文献

[1] Anderson W J. Continuous-Time Markov Chains[M]. New York: Springer-Verlag, 1991

[2] Brockwell P J. The extinction time of a birth, death and catastrophe process and of a related diffusion model[J]. Adv Appl Prob, 1985, 17:42

[3] Brockwell P J. The extinction time of a general birth and death process with catastrophes[J]. J Appl Prob, 1986, 23:851

[4] Brockwell P J, Gani J, Resnick S I. Birth, immigration and catastrophe processes[J]. Adv Appl Prob, 1982, 14:709

[5] Cairns B, Pollett P K. Extinction times for a general birth, death and catastrophe process[J]. J Appl Prob, 2004, 41:1211

[6] Chen A Y, Pollett P K, Zhang H J, et al. Uniqueness criteria for continuous-time Markov chains with general transition structure[J]. Adv Appl Prob, 2005, 37:1056

[7] Fill J A. On hitting times and fastest strong stationary times for skip-free and more general chains[J]. J Theor Probab, 2009, 22:587

[8] Pakes A G. The Markov branching-catastrophe process [J]. Stochastic Proc Appl,1986, 23:1

[9] Chen Mufa. Single birth processes[J]. Chinese Ann Math, 1999, 20B:77

[10] Chen Mufa. From Markov chains to non-equilibrium particle systems (2nd edition)[M]. Singapore: World Scientific, 2004

[11] Hou Zhenting, Guo Qingfeng. Homogeneous denumerable Markov processes (in Chinese)[M]. Beijing: Science Press, 1978

[12] Mao Yonghua. Algebraic convergent for discrete-time ergodic Markov chains[J]. Sci in China Ser A, 2003, 46:621

[13] Mao Yonghua. Eigentime identity for transient Markov chains[J]. J Math Anal Appl, 2006, 315:415

[14] Mao Yonghua, Zhang Yuhui. Exponential ergodicity for single birth processes[J]. J Appl Prob, 2004, 41(4):1022

[15] Yan Shijian, Chen Mufa. Multidimensional Q-processes [J]. Chinese Ann Math, 1986, 7B:90

[16] Zhang Jiankang. On the generalized birth and death processes(I)[J]. Acta Math Sci,1984, 4: 241

[17] Zhang Yuhui. Strong ergodicity for single-birth processes[J]. J Appl Prob, 2001, 38(1): 270

[18] 张余辉. 单生过程首中时的各阶矩[J]. 北京师范大学学报(自然科学版), 2003, 39(4): 430

[19] 张余辉. 单生过程击中时与平稳分布[J]. 北京师范大学学报(自然科学版), 2004, 40(2): 157

[20] 张余辉, 赵倩倩. 几类单生 Q 矩阵[J]. 北京师范大学学报(自然科学版), 2006, 42(2): 111

[21] 张余辉, 赵倩倩. 几类单生 Q 矩阵(续)[J]. 北京师范大学学报(自然科学版), 2008, 44(1): 4

[22] 张余辉. 关于单生过程指数遍历和 l 遍历的注记[J]. 北京师范大学学报(自然科学版), 2010, 46(1): 10

[23] 张余辉. 相邻状态死亡速率成比例的单生 Q 矩阵[J]. 北京师范大学学报(自然科学版), 2010, 46(6): 651

[24] 张余辉. 生灭大灾难型单生 Q 矩阵[J]. 北京师范大学学报(自然科学版), 2011, 47(4): 347

[25] 张余辉. 无限和有限状态空间上单生过程击中时矩的表示[J]. 北京师范大学学报(自然科学版), 2013, 49(5): 445

[26] Chen Mufa, Zhang Yuhui. Unified representation of formulas for single birth processes[J]. Frontiers of Mathematics in China, 2014, 9(4):761

[27] Jiang Shuxia, Liu Yuanyuan, Yao Shuai. Poisson's equation for the discrete-time single-birth[J]. Statistics and Probability Letters, 2014, 85:78

[28] 陈木法, 毛永华. 随机过程导论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2010

Some criteria on discrete time single birth processes

BAI Jingjing　LI Peisen　ZHANG Yuhui　ZHAO Pan

(School of Mathematical Sciences, Laboratory of Mathematics and Complex Systems of Ministry of Education, Beijing Normal University, 100875, Beijing, China)

Abstract Based on the representation of solution of Poisson equation for discrete time single birth processes and the theory of minimum non-negative solutions, we obtain explicit criteria on recurrence, (strong) ergodicity, l-ergodicity, geometric ergodicity, representations for return probability (extinction probability), stationary distribution and polynomial moments of return time by one unified treatment. Criterion on stochastic monotonicity for single birth processes is also presented.

Keywords single birth process; recurrent; (strongly)ergodic; l-ergodic; geometrically ergodic; stationary distribution; return time; stochastically monotone