离散时间单生过程的判别准则

白晶晶 李培森 张余辉 赵盼†
(北京师范大学数学科学学院, 北京师范大学数学与系统科学教育部重点实验室, 100875, 北京)

摘要 利用离散时间单生过程 Poisson 方程解的表示和最小非负解理论，用统一的方法给出了过程常返、正常返、强返差、弱返差、几何返差的显式判别准则，递返概率(灭绝概率)、平稳分布及递返时的各阶距，并给出了随机单调性的判别准则。

关键词 单生过程；常返；(强)返差；弱返差；几何返差；平稳分布；递返时；随机单调

DOI: 10.16360/j.cnki.jbnums.2015.03.002

0 引言

状态空间 \( E = \{0, 1, 2, \cdots \} \) 上的离散时间马氏链 \( (X_n)_{n \geq 0} \), 若其转移概率矩阵 \( P = (p_{ij}) \) 满足：
\[ p_{i,j+i} \geq 0, p_{i,j} = 0 \quad (j \geq i + 2, i, j \in E), \]
则称其为离散时间单生过程。


考虑离散时间单生过程 \( P = (p_{ij}) \)，给定函数 \( c \)，定义算子 \( \Omega \) 如下
\[ \Omega_{g} = (P - I)_{g} + cg, \]
其中 \( I \) 为单位算子。以下记号贯穿全文：
\[ \widetilde{F}^{(i)} = 1, \quad \widetilde{F}^{(i)} = \frac{1}{p_{\sigma_{i+1}}} \sum_{k=1}^{n-1} \tilde{p}^{(k)} \widetilde{F}^{(i)}, \quad n \geq i > 0, \]
\[ \tilde{p}_{n} = p_{n} - c_{n} := \sum_{j=0}^{n} p_{nj} - c_{n}, \quad 0 \leq k < n, \]
如果函数 \( c \leq 0 \)，则 \( \tilde{p}^{(k)} > 0 \)，继而 \( \widetilde{F}^{(i)} \geq 0 (n \geq k > 0) \)。
得到

推论 1 给定数列 \((f_n)\)，由

\[
h_n = \frac{1}{p_{n+1}} (f_n + \sum_{k=0}^{n} \tilde{F}_k^{(n)} h_k), \quad n \geq i
\]

定义的数列 \((h_n)\) 有如下统一的表示:

\[
h_n = \sum_{k=i}^{n} \frac{\tilde{F}_k^{(n)}}{p_{k+1}} f_k, \quad n \geq i.
\]

特别地，式 (1) 中定义的数列 \((\tilde{F}_k^{(n)})\) 有如下表示

\[
\tilde{F}_k^{(n)} = 1, \quad \tilde{F}_k^{(n)} = \sum_{j=k+1}^{n} \frac{\tilde{F}_j^{(n)}}{p_{k+1}}, \quad n \geq i + 1. \tag{8}
\]

1 常返性和回收概率 (灭绝概率)

在这节，我们考虑离散时间单生过程常返性的判别准则。首先，在文献 [10] 的命题 4.21(2) 中取定

\(H = \{0\}\)，则得到如下结论。

引理 1 设 \(E\) 上马氏链 \(P = (p_{ij})\) 不可约，则该马氏链常返当且仅当方程

\[
x_i = \sum_{j \in E} p_{ij} x_j + p_{ii}, \quad i \in E
\]
的最小非负解 \((x^*_i; i \in E)\) 对所有 \(i \in E\) 满足 \(x^*_i = \infty\)。

以上判别准则依赖于方程解的性质，而对于离散时间单生过程，我们希望得到一个只依赖于转移概率矩阵 \(P = (p_{ij})\) 的显式判别准则，结果如下。

定理 2 设离散时间单生过程 \(P = (p_{ij})\) 不可约，则该单生过程常返当且仅当

\[
\sum_{n=0}^{\infty} F_k^{(n)} = \infty,
\]
其中 \((F_k^{(n)})\) 由式 (1) 所定义 (此时 \(c_i = 0\))。

证明 改写方程 (9) 为

\[(P - I) x_i = -p_{ii}, \quad i \geq 0.\]

在定理 1 中取 \(c_i = 0\) 和 \(f_i = -p_{ii}\)，我们得到方程 (9) 的解如下：

\[
x_n = x_0 - \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n} F_k^{(n)} p_{ij}, \quad n \geq 0.
\]

再由式 (8) 和 \(p_{ii} > 0\) 推出

\[
x_n = x_0 - \frac{p_{ii}}{p_{01}} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{p_{01}} \left( \frac{\sum_{j=k+1}^{n} F_k^{(n)} p_{ij}}{p_{ij+1}} + \frac{F_k^{(n)} p_{ii}}{p_{01}} \right) = \]

\[
x_0 + 1 - \frac{1}{p_{01}} \sum_{k=0}^{n-1} \left( F_k^{(n)} + F_k^{(n)} p_{ii} \right) = \]

\[
x_0 + 1 - \frac{1}{p_{01}} \sum_{k=0}^{n-1} F_k^{(n)}, \quad n \geq 1.
\]

由最小非负性质知

\[
x_0^* = \frac{1}{p_{01}} \sum_{k=0}^{n-1} F_k^{(n)}, \quad x_n^* = \frac{1}{p_{01}} \sum_{k=0}^{n-1} F_k^{(n)}, \quad n \geq 1.
\]

由引理 1 并综合以上，定理结论立刻得证。

注 1 实际上，取单生 \(Q\) 矩阵为 \(Q = P - I\)，则其显然正则。故由文献 [10] 的定理 4.40(2) 和定理 4.52 的 (1) 可以立刻得到上述定理的结论。

令 \(H \subseteq E\) 且 \(H \neq \emptyset\)。定义 \(\sigma_{H^c} = \inf \{n \geq 1 : X_n \in H\}\)。当 \(H\) 是单点集，例如 \(H = \{i\}\)，简记 \(\sigma_{\{i\}}\) 为 \(\sigma_i\)，称之为状态 \(i\) 的回收时，称 \(P_i[\sigma_i < \infty]\) 为过程从 \(n\) 出发到状态 \(i\) 的回收概率，特别地，当 \(0\) 为吸收态即 \(p_{ii} = 1\) 时，由于过程在到达 \(0\) 之前的行为与状态 \(0\) 无关，所以我们可以修改 \(p_{ii}\) 和 \(p_{01}\) 使得后者大于零，从而保证新过程是不可约的。此时新过程从 \(n\) 出发到状态 \(0\) 的回收概率就是原过程从 \(n\) 出发的灭绝概率 (\(n \geq 1\))。所以，以下我们只推论离散时间不可约单生过程的回收概率。

定理 3 设离散时间单生过程 \(P = (p_{ij})\) 不可约，则回收概率有如下表示：

\[
P_x(\sigma_0 < \infty) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} F_k^{(n)} + p_{01}}{\sum_{k=0}^{\infty} F_k^{(n)}},
\]

\[
P_x(\sigma_0 < \infty) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} F_k^{(n)} + p_{01}}{\sum_{k=0}^{\infty} F_k^{(n)}}, \quad n \geq 1.
\]

进而，对所有 \(n \geq 0\) 有 \(P_x(\sigma_0 < \infty) = 1\) 当且仅当

\[
P_x(\sigma_0 < \infty) = 1, \quad \text{等价地，当且仅当} \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(n)} = \infty.
\]

证明 在文献 [10] 的引理 4.46 中取定 \(H = \{0\}\)，则 \(P_x(\sigma_0 < \infty; i \in E)\) 是下列方程的最小非负解：

\[
x_i = \sum_{k=0}^{\infty} p_{i0} x_0 + p_{01}, \quad i \in E.
\]

改写上述方程为

\[(P - I) x_i = -p_{ii} (1 - x_0), \quad i \geq 0.
\]

在定理 1 中取 \(c_i = 0\) 和 \(f_i = -p_{ii} (1 - x_0)\)，得到前述方程的解如下：

\[
x_n = x_0 - \sum_{0 \leq k < n \leq 1} \sum_{j=k+1}^{n} \frac{F_k^{(n)} p_{ij}}{p_{ij+1}} (1 - x_0) = \]

\[
x_0 - \sum_{0 \leq k < n \leq 1} \frac{F_k^{(n)} p_{01}}{p_{01}} + \sum_{1 \leq k < n} \frac{F_k^{(n)} p_{01}}{p_{01}} (1 - x_0) = \]

\[
x_0 - \sum_{1 \leq k < n} \frac{F_k^{(n)} p_{01}}{p_{01}} + F_1^{(n)} (1 - x_0) - \]

\[
\frac{p_{01}}{p_{01}} (1 - x_0) = x_0 \sum_{0 \leq k < n \leq 1} F_k^{(n)} - \frac{1}{p_{01}} \sum_{k=0}^{\infty} F_k^{(n)} + 1, \quad n \geq 1.
\]

由非负性推出

\[
x_0 \geq \sup_{n \geq 1} (1 - \frac{p_{01}}{p_{01}}) = 1 - \frac{p_{01}}{p_{01}}.
\]

再由最小性质得到最小非负解为
先假定对某个 \( i \in E \) 有 \( x_i^* < \infty \)（则由不可约性知对所有 \( i \) 成立），令 \( (x_i^*) \) 为方程(12)的一个有限解，则有
\[
(P - I)x_i = p_{ii}x_i - 1, \quad i \geq 1.
\]
在定理 1 中取定 \( c_i = 0 \) 且 \( f_i = p_{ii}x_i - 1 \)，得到方程的解为
\[
x_n = x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{k} \frac{F_k^{(j)}f_j}{p_{j+1}} = \\
x_0(1 + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{k} \frac{F_k^{(j)}f_j}{p_{j+1}}) - \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{k} \frac{F_k^{(j)}}{p_{j+1}}, \quad n \geq 1.
\]
由式(8)和(11)得出
\[
x_n = \frac{x_0}{p_{01}} \sum_{k=0}^{n-1} F_k^{(0)} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{F_k^{(j)}}{p_{j+1}}, \quad n \geq 1.
\]
再由最小非负性质推出
\[
x_{n+*} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{d_k}{p_{j+1}}, \quad n \geq 1.
\]
因此得出 \((E, \sigma; i \in E)\)。下面我们证明在上两式中的上确界只能在无穷远处达到。否则，假设在某个有限的 \( n_0 \geq 1 \) 处取到上确界，则
\[
x_0^* = 1 + p_{01} \sum_{j=0}^{n_0-1} \frac{d_j}{p_{j+1}}, \quad \sum_{j=0}^{n_0-1} \frac{F_j^{(0)}}{p_{j+1}} = d.
\]
再由 Stolz 定理得到 \( d \) 的表示中的后一个极限。注意此时由于假定 \( x_i^* < \infty \)，所以 \( d < \infty \)。为了去掉 \( (x_i^*) \) 有限的假定，我们证明即使 \( x_i^* = \infty \)，定理第一个结论依然成立。因为此时必定 \( d = \infty \)，否则，若 \( d < \infty \)，由定理 1 的后一结论，我们可以得到方程(12)的一个有限解，由非负解的比较定理立刻得出 \( x_i^* < \infty \)，这与假定 \( x_i^* = \infty \) 矛盾。因此，定理第一个结论证毕。

最后，由文献[10]的定理 4.30 知，过程遍历当且仅当 \( \exists \sigma; \sigma_0 < \infty \)，过程强遍历当且仅当 \( \sup_{i \in E} \sigma_0 < \infty \)。现在，可以由定理的第一个结论立刻得到，分别等价
地，过程遍历当且仅当 $d \ll \infty$，过程强遍历当且仅当

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} \left( F_k^{(n)} d - d_k \right) < \infty,$$

定理证毕。

注 2 取单生 $Q$ 阵面为 $Q = P - I$，则其显然正则，故由文献[10]的定理 4.40(2) 和文献[26]的命题 5.2 可以立刻得到上述定理中关于遍历性和强遍历性的判断准则。

注 3 (1) 设离散时间单生过程 $P = (p_k)$ 不可约非周期且常返。若 $\lim_{k \to \infty} p_k > 0$，则该过程遍历。事实上，由合分比性质及式(8)和(11)可得

$$d \leq \lim_{k \to \infty} \frac{d_k}{F_k^{(0)} p_k} \leq \lim_{k \to \infty} \frac{1}{p_k^{(0)}} - \frac{1}{\lim_{k \to \infty} p_k} < \infty.$$

(2) 设离散时间马氏过程 $P = (p_k)$ 不可约非周期且常返。若存在某个 $k \in E$ 使得 $c^* = \inf_{k \in E} p_k > 0$，则该过程强遍历。事实上，令 $k \geq 0, y_k = 1/c (i \neq k)$，则可验证 $(y_k)$ 是下列方程

$$\begin{cases}
\sum p_{i \to j} y_j \leq y_i - 1, & i \neq k, \\
\sum p_{i \to j} y_j < \infty
\end{cases}$$

的一个有界非负解。因此，由文献[10]的定理 3.31 知，该过程是强遍历的。

3 回返时的多项式阶矩，$\ell$ 遍历性和平稳分布

上一节我们讨论了回返时的一阶矩，现在研究回返时的多项式阶矩。为此，给定正整数 $\ell \geq 1$，

$$a_{\ell}^{(n)} = 1 + 2^{-1} + \cdots + n^{-1}.$$

文献[12]的引理 3.1 给出了如下引理。

引理 3 给定不可约马氏链 $P = (p_k)$。固定 $\sigma \in E$，则 $(x \sigma: = \sum a_{\ell}^{(n)} P(\sigma, n))$ 是下列方程

$$x_l = \sum_{k \in E} p_{k \to l} x_k + E \sigma^{-1}, \quad i \in E$$

（13）的最小非负解。

回忆若常返马氏链存在某个 $i \in E$（从而对所有 $i \in E$ 有 $E \sigma^{-1} \leq \infty$），则称该马氏链为 $\ell$ 遍历的。1 遍历即正常返，我们约定常返为 0 遍历。本节的主要结果如下。

定理 5 设离散时间单生过程 $P = (p_k)$ 不可约非周期且 $\ell(1)$ 遍历 $\ell(1) \geq 1$，即 $E \sigma^{-1} \leq \infty$ 对所有 $i \in E$ 成立。记

$$m_{\ell}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\ell}^{(n)} P, (\sigma = n),$$

则

$$m_{\ell}^{(0)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\ell}^{(n)} P, (\sigma = n),$$

其中

$$u_k = \left\{ \begin{array}{ll}
\sum_{i=1}^{k} F_i^{(0)} p_{i \to j}, & k \geq i_0, \\
1, & k = i_0 - 1, \\
0, & 0 \leq \sigma \leq i_0 - 2,
\end{array} \right.$$

$$m_{\ell}^{(n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{i_0 - \sum_{i \in E} u_k} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{a_{\ell}^{(n)}},$$

取 $n = i_0$，推出

$$x_l = \sum_{i \in E} v_{k}^{(0)} + x_{i_0} (1 - \sum_{i \in E} u_k),$$

进而得出

$$x_l = \sum_{i \in E} v_{k}^{(0)} - \sum_{i \in E} u_k + x_{i_0} (1 - \sum_{i \in E} u_k),$$

当 $n \leq i_0$，由 $u_k$ 的定义有 $\sum_{i \in E} u_k \leq 1$，显然推出 $x_l \geq 0$。当 $n > i_0 - 1$，要使得 $x_l > 0$，就需

$$m_{\ell}^{(n)} = \sum_{i \in E} v_{k}^{(0)}.$$
再由最小非负性质以及同上节一样的讨论，可以推出

\[ x_{j_0}^x = \lim_{n \to \infty} \sum_{k \in \mathbb{K}^2 \cap 0 < j < n} v_k^{(i)} \]

再由 Stolz 定理得到 \( x_{j_0}^x \) 的表示中的后一个极限，注意此时需要证明 \( \sum_{k=0}^{n} u_k = \infty \)，事实上，任意固定 \( j_0 \in \mathbb{E} \)，将 \( \{0, 1, \ldots, j_0 \} \) 视为棒点，在 \( \{j_0, j_0 + 1, \ldots \} \) 上构造一个新的离散时间单生过程

\[
\tilde{p}_j = \begin{cases} 
    p_{j_0}, & j \geq j_0 + 1, \\
    \sum_{k=j_0}^{n} p_{j_0}, & j = j_0.
\end{cases}
\]

则由 \( P \) 不可约非周期且常返知，\( P = (\tilde{p}_j) \) 不可约非周期且常返，因此，由定理 2 知，\( \sum_{n=j_0}^{\infty} \bar{F}_n^{(i)} = \infty \)，其中

\[ \bar{F}_n^{(i)} = 1, \quad \bar{F}_n^{(i)} = \frac{1}{p_{n+1}} \sum_{k=0}^{n-1} \bar{F}_k^{(i)}, \quad n \geq i \geq j_0, \]

这里

\[ \bar{p}_n = \sum_{j=j_0}^{n} \bar{p}_{j_0} (j_0 \leq k < n). \]

注意到 \( \bar{p}_n = \bar{p}_{j_0} (j_0 \leq k < n) \)，所以可证 \( F_n^{(i)} = F_n^{(i)} (n \geq i \geq j_0) \)。因此，\( \sum_{n=j_0}^{\infty} F_n^{(i)} = \infty \)，由 \( j_0 \) 的任意性知，\( \sum_{n=j_0}^{\infty} F_n^{(i)} = \infty \) 对所有 \( j \in \mathbb{E} \) 成立。进而

\[ \sum_{k=j_0}^{n} u_k = \sum_{k=j_0}^{n} \sum_{j=j_0+1}^{n} \bar{F}_k^{(i)} \bar{p}_{j_0+1} = \sum_{j=j_0}^{n} \bar{p}_{j_0+1} \sum_{k=j_0}^{n} \bar{F}_k^{(i)} = \infty. \]

注意最后一个等号当 \( i_0 = 0 \) 时成立是因为 \( P \) 不可约，即存在 \( j \geq 1 \) 使得 \( p_{j_0} > 0 \)。

至于最后一个结论，注意到 \( n/n^2 \leq a_n^{(i)} \leq (n+1)/n \leq 2^{-1} (n+1)/n \)，由此推出

\[ E \sigma^{(i)} \leq t \leq m_{n_0}^{(i)} \leq 2^{-1} (E \sigma^{(i)} + 1). \]

故 \( E \sigma^{(i)} \leq \infty \) 等价于 \( m_{n_0}^{(i)} \leq \infty \)，由此得到该过程 \( \bar{v}_n \) 趋近当且仅当 \( m_{n_0}^{(i)} \leq \infty \) 至此，定理结论得证。

**注 4**（1）在判断 \( t \) 趋近时，为便于计算，一般取 \( i_0 = 0 \) 即判断 \( m_{n_0}^{(i)} \leq \infty \) 是否成立。

（2）当 \( t \) 时，\( a_{n_0}^{(i)} = n_0 \)，进而 \( m_{n_0}^{(i)} = E \sigma_{n_0} \)。取 \( i_0 = 0 \)，由于 \( u_0 = p_{n_0}/p_{n_0} \) 和

\[ u_k = \sum_{j=j_0}^{n} \bar{F}_k^{(i)} \bar{p}_{j_0+1} = \frac{F_k^{(i)} \bar{p}_{j_0+1}}{p_{n_0}} + \sum_{j=j_0}^{n} \bar{F}_k^{(i)} \bar{p}_{j_0+1} = \frac{F_k^{(i)} \bar{p}_{j_0+1}}{p_{n_0}} + \frac{F_k^{(i)} \bar{p}_{j_0+1}}{p_{n_0}} = \bar{v}_k^{(i)} + d_k, \quad k \geq 1, \]

以及

\[ v_k^{(i)} = \frac{F_k^{(i)}}{p_{n_0}} + d_k, \quad k \geq 1. \]

则得到与定理 4 相同的结论：

\[
m_{n_0}^{(1)} = E_0 \sigma_0 + 1 + p_{n_0} \lim_{n \to \infty} \sum_{k=j_0}^{n} d_k = 1 + p_{n_0} d,
\]

\[
m_{n_0}^{(2)} = E_0 \sigma_0 = \sum_{k=0}^{n_0} (F_k^{(i)} d - d_k), \quad n \geq n_0.
\]

（3）实际上，由数学归纳法和推论 1 可不难证明

\[ F_k^{(i)} = p_{n_0} \delta_{n_0}, \quad k \geq n_0. \]

注意，连续时间则相应为

\[ F_k^{(i)} = \frac{q_k^{(i)+1}}{q_k^{(i)}} (u_k + \delta_{n_0}), \quad k \geq n_0. \]

实际上，对于 \( E_0 \sigma_{n_0}^{(i)} \)，也有类似引理 3 的如下结论（参照文献[11]的定理 6.7.4）。

**引理 4** 给定不可约马氏链 \( P = (p_j) \) 和 \( H \subset \mathbb{E} \)。则对 \( i \geq 1 \)，\( x_i := E_0 \sigma_{n_0}^{(i)} \) 是下列方程

\[ x_i = \sum_{k \in H} p_{x_k}, \quad i \in \mathbb{E}, \quad \text{的最小非负解} \]

其中 \( C_i \) 表示从 \( i \) 个元素中每次取出 \( s \) 个的所有不同的组合数。由此引理，我们可以得到关于 \( E_0 \sigma_{n_0}^{(i)} \) 的结论如下。

**定理 6** 设离散时间单生过程 \( P = (p_j) \) 不可约非周期且 \( (t-1) \) 趋近 \( (t \geq 1) \) 则

\[ E_0 \sigma_{n_0}^{(i)} = \begin{cases}
    \sum_{i \in \mathbb{E}} v_i^{(i)} + E_0 \sigma_0 (1 - \sum_{i \in \mathbb{E}} u_i), & 0 \leq n \leq n_0, \\
    - \sum_{i \in \mathbb{E}} v_i^{(i)} + E_0 \sigma_0 (1 + \sum_{i \in \mathbb{E}} u_i), & n \geq n_0 + 1,
\end{cases} \]

其中 \( u_i \) 的定义同定理 5 中，

\[ v_i^{(i)} = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=1}^{C_i - 1} \sum_{k \leq \mathbb{E} \cap x_k = 0} (C_i - 1)^{-1} E_0 \sigma_{n_0}^{(i)}, \quad k \geq 0, \]

\[ E_0 \sigma_0 = \lim_{n \to \infty} \sum_{i \in \mathbb{E}} v_i^{(i)} = \lim_{n \to \infty} n_u, \]

如果极限存在。

**证明** 由引理 4，\( E_0 \sigma_{n_0}^{(i)} \) 是方程

\[ x_i = \sum_{k \in \mathbb{E}} p_{x_k}, \quad i \in \mathbb{E}, \]

(14) 的最小非负解 \( (x_i^{(i)}) \)，如同上节，我们可以先假定 \( x_i^{(i)} \leq \infty \)，改写方程 (14) 为

\[ (P - I) x_i = p_{x_k}, \quad i \in \mathbb{E}, \]

在定理 1 中取定 \( c_i = 0 \) 和

\[ f_i = p_{x_k} x_k - \sum_{i=1}^{C_i - 1} E_0 \sigma_{n_0}^{(i)}, \]

得到方程的解为
\[ x_n = x_0 + \sum_{0 \leq k, l = 0} \sum_{i = 1} F^{(i)} \frac{f_i}{p_{j, i+1}} = \]

取 \( n = i_0 \)，推出

\[ x_0 = \sum_{0 \leq k, l = 0} \sum_{i = 1} \frac{u_k}{p_{j, i+1}} + n \geq 0. \]

进而得出

\[ x_n = \sum_{0 \leq k, l = 0} \sum_{i = 1} \frac{u_k}{p_{j, i+1}} = \]

\[ x_0 (1 - \sum_{0 \leq k, l = 0} \sum_{i = 1} u_k) + \]

\[ \sum_{n \leq k, l = 0} \frac{u_k}{p_{j, i+1}} + x_0 (1 - \sum_{n \leq k, l = 0} u_k), \]

\[ 0 \leq n \leq i_0, \]

\[ - \sum_{i_0 \leq k, l = 0} \frac{u_k}{p_{j, i+1}} + x_0 (1 + \sum_{i_0 \leq k, l = 0} u_k), \]

\[ n \geq i_0 + 1. \]

当 \( n \leq i_0 \)，由 \( u_k \) 的定义有 \( \sum_{n \leq k, l = 0} u_k \leq 1 \)，显然推出 \( x_n > 0 \)。当 \( n \geq i_0 + 1 \)，要使得 \( x_n \geq 0 \)，就需要

\[ x_n \geq \sup_{n \leq k, l = 0} \frac{u_k}{1 + \sum_{i_0 \leq k, l = 0} u_k}. \]

再由最小非负性质以及上同节一样的讨论，可以推出

\[ x_n^\ast = \lim_{n \to \infty} \frac{u_k}{1 + \sum_{i_0 \leq k, l = 0} u_k}. \]

由于定理 5 中已经证明 \( \sum u_k = \infty \)，再由 Stolz 定理得到 \( x_n^\ast \) 的表示中的后一个极限，定理结论证毕。

注 5 比较定理 5 和定理 6，则有 \( \overline{v}_n(t) = \sum C_i (-1)^i \overline{v}_n^{(i+1)} \)。虽然 2 个定理都能够得到 \( \nu \) 通界的判断，但前者的表达和计算显然更为简洁。

而对于首次击中时 \( \tau_1 := \inf \{ n \geq 0; X_n = i_0 \} \) 由局部化定理 (参见文献 [10] 的定理 2.13) 和定理 3，我们得到下面的引理。

引理 5 给定不可约马氏链 \( P = (p_{i,j}) \)。固定 \( i_0 \in E \)，则下列方程

\[ x_i = \sum_{i = 1} p_{i,x_i} + E_0 \sigma_i^{-1}, \quad i \neq i_0; \quad x_{i_0} = 0 \] (15)

的最小非负解 \( (x_i^\ast) \) 为：\( x_i^\ast = m_{x_i}^{(i_0, E)} (i \in E) \)，其中

\[ m_{x_i}^{(i_0, E)} := \sum_{i = 1} \alpha_{i_0} P_i (\tau_{x_i} = n). \]

注意当出发点 \( i \neq i_0 \) 时，\( \sigma_i = \tau_{x_i} \)，所以 \( m_{x_i}^{(i_0, E)} = m_{x_i}^{(i_0, E)} \) (\( i \neq i_0 \)) (后续的定义见定理 5)。由上述引理，我们可以得到的结果如下。

定理 7 设离散时间单生过程 \( P = (p_{i,j}) \) 不可约非周期且 \( (t-1) \) 遍历（\( t \geq 1 \)），则

\[ m_{x_i}^{(i_0, E)} = \left\{ \begin{aligned} \sum_{i \leq x_i} u_i, \\
0 \leq n \leq i_0, \\
- \sum_{i_0 \leq x_i} u_i + c_{i_0}^{(i_0)} \sum_{i_0 \leq x_i} F^{(i_0)}, \\
n \geq i_0 + 1, \end{aligned} \right. \]

其中 \( v^{(i_0)} \) 的定义同定理 5 中，

\[ \sum_{i_0 \leq x_i} v^{(i_0)} \]

\[ c_{i_0}^{(i_0)} = \lim_{n \to \infty} \frac{v^{(i_0)}}{F^{(i_0)}} = \lim_{n \to \infty} \frac{v^{(i_0)}}{F^{(i_0)}}， \]

如果极限存在。

进而，该过程 \( \nu \) 通界且当且仅当 \( c_{i_0}^{(i_0)} < \infty \)。

证明 由引理 5，方程 (15) 的最小非负解 \( (x_i) \) 是

\[ x_i = m_{x_i}^{(i_0, E)} (i \neq i_0), \quad x_{i_0} = 0. \]

如同上节，我们可以先假定 \( x_i^\ast < \infty \)。改写方程 (15) 为

\[ (P - 1) x_i = E_0 \sigma_i^{-1}, \quad i \neq i_0,
\]

\[ (P - 1) x_{i_0} = f_{i_0}, \]

其中 \( f_{i_0} \) 待定。在定理 1 中取 \( c_{i_0} = 0 \) 和 \( f_i = E_0 \sigma_i^{-1} \)，得到方程的解为

\[ x_n = x_0 + \sum_{0 \leq k, l = 0} \sum_{i = 1} \frac{F^{(i)} f_i}{p_{j, i+1}}, \quad n \geq 0. \]

则

\[ x_n = x_0 - \sum_{0 \leq k, l = 0} \frac{v^{(i_0)}}{p_{j, i+1}}, \quad n \leq i_0. \]

由 \( x_{i_0} = 0 \) 推出

\[ x_n = \sum_{0 \leq k, l = 0} \frac{v^{(i_0)}}{1 + \sum_{i_0 \leq k, l = 0} u_k}. \]

注意到

\[ f_{i_0} = (P - 1) x_{i_0} = p_{i_0, i_0+1} x_{i_0+1} + \sum_{j = 0}^{i_0-1} p_{i_0, j} x_j = \]

\[ p_{i_0, i_0+1} x_{i_0+1} + \sum_{j = 0}^{i_0-1} p_{i_0, j} (x_j - x_{i_0}) = \]

\[ p_{i_0, i_0+1} x_{i_0+1} + \sum_{j = 0}^{i_0-1} p_{i_0, j} \sum_{i = j}^{i_0} (x_i - x_{i+1}) = \]

\[ p_{i_0, i_0+1} x_{i_0+1} + \sum_{j = 0}^{i_0-1} p_{i_0, j} v^{(i_0)}. \]

再由推论 1 知，

\[ f_{i_0} = p_{i_0, i_0+1} x_{i_0+1} + p_{i_0, i_0+1} v^{(i_0)} - E_0 \sigma_i^{-1}, \]

即

\[ f_{i_0} + E_0 \sigma_i^{-1} = x_{i_0+1} + v^{(i_0)} \]

因此，对 \( n \geq i_0 + 1 \)，由以上讨论得出

\[ x_n = x_0 + \sum_{0 \leq k, l = 0} \sum_{j = 0}^{i_0-1} \frac{F^{(i)} f_i}{p_{j, i+1}} = \sum_{n \leq k, l = 0} \sum_{j = 0}^{i_0-1} \frac{F^{(i)} f_i}{p_{j, i+1}} = \]

\[ - \sum_{n \leq k, l = 0} \sum_{j = 0}^{i_0-1} F^{(i)} E_0 \sigma_i^{-1} x_{i_0+1} + \sum_{k = 0}^{i_0-1} F^{(i)} (x_{i_0} + E_0 \sigma_i^{-1}) = \]
(x_{i+1} + v^{(i)}_0 + n)^{\sum_{k=1}^{n-1} F_{i+k}^{(i)} - n^{\sum_{k=0}^{n-1} F_{i+k}^{(i)}}.}

当 n \geq i_0 + 1, 使 x_n > 0, 就需要

\[ x_{i+1} + v^{(i)}_0 \geq \sup_{n \geq i_0 + 1} \sum_{k \leq n} v^{(i)}_k. \]

再由 Stolz 定理得到 c^{(i)}_k 的表示中的后一个极限，注意此时需要 F_{i+k}^{(i)} = \infty，这个事实见定理 5 中的证明。进而得到

\[ x_{i+1} + v^{(i)}_0 = \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k \leq n} v^{(i)}_k}{\sum_{k \leq n} F_{i+k}^{(i)}} = c^{(i)}_0. \]

再由 Stolz 定理得到 c^{(i)}_0 的表示中的后一个极限，注意此时需要 F_{i+k}^{(i)} = \infty，这个事实见定理 5 中的证明。进而得到

\[ x_{i+1} = \sum_{k \geq 0} v^{(i)}_k + c^{(i)}_0 \sum_{k=0}^{n-1} F_{i+k}^{(i)}, \quad n \geq i_0 + 1. \]

当 i \neq i_0 时，m^{(i)}_k = m^{(i)}_0，所以将上述结果与定理 5 比较，由注 4 的 (3)，可以得到

\[ m^{(i)}_k = \rho p_{i+k} + c^{(i)}_0. \]

因此，由定理 5 知，该过程 i 遍历且当且仅当 c^{(i)}_0 < \infty，定理证明。

由定理 5、定理 6 和注 4 的（3）直接得到如下推论。

**推论 2** 设离散时间单生过程 P = (p_i) 不可约非周期且遍历，则过程的平稳分布 = (x_1, \ldots, x_i) 为

\[ \pi_i = \frac{1}{m^{(i)}_i} = \frac{1}{p_{i+1} + c^{(i)}_0}, \quad i \geq 0, \]

其中

\[ c^{(i)}_0 = \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} v^{(i)}_k}{\sum_{k=0}^{n-1} F_{i+k}^{(i)}} = \lim_{n \to \infty} \frac{v^{(i)}_0}{F_{i+k}^{(i)}}. \]

如果极限存在，则

\[ v^{(i)}_k = \sum_{j=0}^{k} F_{i+k}^{(i)} / p_{i+j+1}, \quad k \geq 0. \]

\[ (n \geq 1)。由最小非负解的第二递归逼近法（参见[10]的定理 2.9）知，方程 (16) 的最小非负解为 x_i = \sum_{n=1}^{\infty} x_i^{(n)}。注意到 x_i^{(n)} = \rho P_i[\sigma_H = 1],

\[ x_i^{(n)} = \sum_{k \leq n} \rho p_{i+k} x_i^{(n)} = \sum_{k \leq n} \rho p_{i+k} x_i^{(n)} = \rho P_i[\sigma_H = n]. \]

由数学归纳法不难证明 x_i^{(n)} = \rho^n P_i[\sigma_H = n] \quad (n \geq 1)。进而

\[ x_i = \sum_{n=1}^{\infty} x_i^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n P_i[\sigma_H = n] = E \rho^n. \]

上式对任意 i \in E 成立。结论证毕。

关于回返时的几何阶矩，我们得到如下结果。

**定理 8** 设离散时间单生过程 P = (p_i) 不可约非周期且遍历，在 (F_k^{(i)}) 和 (d_k) 的定义中（参见式（1）和（10）），取 c_{\infty} = (\rho^{-1}/\rho) \in (0, 1)，其中 \rho > 1。对于接近 1 的 \rho，则有

\[ E_\rho \rho^{n} = \rho p_1 (\rho - 1) \bar{d} + \rho < \infty, \]

\[ E_\rho \rho^{n} = 1 + \frac{\rho - 1}{\rho} \sum_{k=0}^{n} (\bar{F}_k^{(i)} \bar{d} - \bar{d}_k) < \infty, \quad n \geq 1 \]

当且仅当

\[ \bar{d} = \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} \bar{d}_k}{\sum_{k=0}^{n} \bar{F}_k^{(i)}} < \infty. \]

如果此极限存在。

此外，过程是几何遍历的当且仅当 \bar{d} < \infty 和式 (17) 两者成立。

**证明** 在引理 6 中取 H = (0)，方程 (16) 的最小非负解 (x_i) 是 x_i = E_\rho \rho^n。如同上节，我们可以先假定 x_i < \infty。令 (x_i) 为方程 (16) 的一个有限非负解，改写方程 (16) 为

\[ (P - I) x_i + \rho - \frac{1}{\rho} x_i = \rho p_i (x_i - 1), \quad i \in E. \]

(18)

在定理 1 中取定 c_{\infty} = (\rho^{-1}/\rho) \in (0, 1)，得到上述方程的解为

\[ x_i = x_0 (1 - \frac{\rho - 1}{\rho} \sum_{k=0}^{n} \frac{\bar{F}_k^{(i)}}{\rho p_{i+k+1}}) + \]

\[ x_i = x_0 (1 - \frac{\rho - 1}{\rho} \sum_{k=0}^{n} \frac{\bar{F}_k^{(i)}}{\rho p_{i+k+1}}) + \]

\[ x_i = x_0 (1 - \frac{\rho - 1}{\rho} \sum_{k=0}^{n} \frac{\bar{F}_k^{(i)}}{\rho p_{i+k+1}}) + \]

\[ x_i = x_0 (1 - \frac{\rho - 1}{\rho} \sum_{k=0}^{n} \frac{\bar{F}_k^{(i)}}{\rho p_{i+k+1}}) + \]

\[ x_i = x_0 (1 - \frac{\rho - 1}{\rho} \sum_{k=0}^{n} \frac{\bar{F}_k^{(i)}}{\rho p_{i+k+1}}) + \]

\[ x_i = x_0 (1 - \frac{\rho - 1}{\rho} \sum_{k=0}^{n} \frac{\bar{F}_k^{(i)}}{\rho p_{i+k+1}}) + \]

\[ x_i = x_0 (1 - \frac{\rho - 1}{\rho} \sum_{k=0}^{n} \frac{\bar{F}_k^{(i)}}{\rho p_{i+k+1}}) + \]

\[ x_i = x_0 (1 - \frac{\rho - 1}{\rho} \sum_{k=0}^{n} \frac{\bar{F}_k^{(i)}}{\rho p_{i+k+1}}) + \]

\[ x_i = x_0 (1 - \frac{\rho - 1}{\rho} \sum_{k=0}^{n} \frac{\bar{F}_k^{(i)}}{\rho p_{i+k+1}}) + \]

\[ x_i = x_0 (1 - \frac{\rho - 1}{\rho} \sum_{k=0}^{n} \frac{\bar{F}_k^{(i)}}{\rho p_{i+k+1}}) + \]

\[ x_i = x_0 (1 - \frac{\rho - 1}{\rho} \sum_{k=0}^{n} \frac{\bar{F}_k^{(i)}}{\rho p_{i+k+1}}) + \]

\[ x_i = x_0 (1 - \frac{\rho - 1}{\rho} \sum_{k=0}^{n} \frac{\bar{F}_k^{(i)}}{\rho p_{i+k+1}}) + \]

\[ x_i = x_0 (1 - \frac{\rho - 1}{\rho} \sum_{k=0}^{n} \frac{\bar{F}_k^{(i)}}{\rho p_{i+k+1}}) + \]

\[ x_i = x_0 (1 - \frac{\rho - 1}{\rho} \sum_{k=0}^{n} \frac{\bar{F}_k^{(i)}}{\rho p_{i+k+1}}) + \]

\[ x_i = x_0 (1 - \frac{\rho - 1}{\rho} \sum_{k=0}^{n} \frac{\bar{F}_k^{(i)}}{\rho p_{i+k+1}}) + \]

\[ x_i = x_0 (1 - \frac{\rho - 1}{\rho} \sum_{k=0}^{n} \frac{\bar{F}_k^{(i)}}{\rho p_{i+k+1}}) + \]

\[ x_i = x_0 (1 - \frac{\rho - 1}{\rho} \sum_{k=0}^{n} \frac{\bar{F}_k^{(i)}}{\rho p_{i+k+1}}) + \]

\[ x_i = x_0 (1 - \frac{\rho - 1}{\rho} \sum_{k=0}^{n} \frac{\bar{F}_k^{(i)}}{\rho p_{i+k+1}}) + \]

\[ x_i = x_0 (1 - \frac{\rho - 1}{\rho} \sum_{k=0}^{n} \frac{\bar{F}_k^{(i)}}{\rho p_{i+k+1}}) + \]
\[(x_0 - 1) \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{l} \tilde{F}_i^{(j)} p_{0j} = \]
\[x_0 (1 - \frac{\rho - 1}{\rho} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{l} \tilde{F}_i^{(j)} p_{0j}) + (x_0 - 1) \cdot \sum_{0 \leq k \leq n-1} (\tilde{F}_i^{(k)} p_{0k} + \sum_{j=1}^{l} (\tilde{F}_i^{(j)} \tilde{p}_{0j} + 1 - \frac{1}{\rho}), n \geq 1,\]

由分别在式(8)和(11)给出的 \(\tilde{F}_i^{(k)}\) 和 \(\tilde{d}_i\) 的显式表示，我们推出

\[x_0 = x_0 (1 - \frac{\rho - 1}{\rho} \sum_{k=0}^{n-1} (\tilde{F}_i^{(k)} p_{0k} + \tilde{d}_k)) + \]

\[(x_0 - 1) \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{F}_i^{(k)} p_{0k} + \]

\[(x_0 - 1) \sum_{k=0}^{n-1} (\tilde{F}_i^{(k)} + \frac{\rho - 1}{\rho} \tilde{d}_k) = \]

\[\frac{x_0}{\rho} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{F}_i^{(k)} > \sum_{k=0}^{n-1} (\tilde{F}_i^{(k)} p_{0k} + \frac{\rho - 1}{\rho} \tilde{d}_k), n \geq 1.\]

此即为

\[\frac{x_0 - 1}{\rho} p_{0i} > \frac{\rho - 1}{\rho} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{d}_k, n \geq 1.\]

（20）

注意到，一方面，如果 \(x_0 \leq x_0^* (\rho_0) < \infty\)，则由比较定理（参见[10]的定理 2.6）知，对所有 \(\rho \in (1, \rho_0)\) 有 \(x_0 = x_0^* (\rho_0) < \infty\) 成立。另一方面，当 \(\rho = 1\) 时，有

\[\sum_{k=0}^{n-1} \tilde{F}_i^{(k)} = \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{F}_i^{(0)} > 0, \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{d}_k = \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{d}_k > 0, n \geq 1.\]

对于固定的 \(n\)，\(\sum_{k=0}^{n-1} \tilde{F}_i^{(k)}\) 和 \(\sum_{k=0}^{n-1} \tilde{d}_k\) 与 \(\rho\) 是解的，所以对充分接近于 1 的 \(\rho\)（即存在某个 \(\rho_1 \in (1, \rho_0]\)，对所有 \(\rho \in (1, \rho_1]\)，它们都应该是一致的。再由式（20），有

\[\frac{x_0}{\rho} - 1 > 0, \rho \in (1, \rho_1].\]

成立，与 \(n\) 无关。因此，由最小非负性质，我们得到

\[\frac{x_0}{\rho} - 1 = \frac{\rho - 1}{\rho} \lim_{n \to \infty} \left| \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{F}_i^{(k)} \right| = \frac{\rho - 1}{\rho} \tilde{d}_i, \]

即

\[E_x \rho^x = x_0 = \rho p_0 (\rho - 1) \tilde{d} + \rho.\]

（21）

因为 \(x_0\) 满足式（20），我们得到条件（17），此时，

\[E_x \rho^x = 1 + \frac{\rho - 1}{\rho} \sum_{k=0}^{n-1} (\tilde{F}_i^{(k)} \tilde{d} - \tilde{d}_k), n \geq 1.\]

反之，如果 \(\tilde{d} < \infty\) 和式（17）成立，则从式（21）定义 \(x_0 = x_0^*\) 出发，由式（19）定义其他的 \(x_i\)，由此我们构造了方程（18）的一个有限非负解 \((x_i, i \in E)\)。因此，最小非负解 \((x_0^* = E, \rho^0; i \in E)\) 应该是有限的。

最后，由文献[10]的定理 4.30，过程几何遍历当且仅当对某个 \(\rho > 1\) 有 \(E_x \rho^x < \infty\)，等价地，\(\tilde{d} < \infty\) 和式（17）同时成立，定理的最后一个结论得证。

5 随机单调性

对于状态空间 \(E = \{0, 1, 2, \ldots\}\) 上的 2 个离散时间马氏链 \((X_n)_{n \geq 0}\) 和 \((X_n)_{n > 0}\)，其转移概率矩阵分别记为 \(P=(p_0)\) 与 \(P=(p_{0n})\)，n 步转移概率矩阵记为 \(P^!=\left((p_0^{(n)})\right)\) 与 \(P^!=\left((p_{0n})\right)\)。若对任意的 \(i \leq m\)，有

\[\sum_{j=0}^{n-1} p_{0j} \leq \sum_{j=0}^{n-1} p_{0j}(k), k \in E, n \geq 1\]

成立，则称 \((X_n)_{n \geq 0}\) 和 \((X_n)_{n > 0}\) 随机可比，也称 \(P\) 与 \(P^\prime\) 是随机可比的。若对任意的 \(i \leq m\)，有

\[\sum_{j=0}^{n-1} p_{0j}(k) \leq \sum_{j=0}^{n-1} p_{0j}(k), k \in E, n \geq 1\]

成立，则称 \((X_n)_{n \geq 0}\) 随机可比，也称 \(P\) 是随机可比的。

由上述定义，不难证明下列结论（参看文献[1]的引理 7.3.3）。

引理 7 \(P\) 和 \(P\) 随机可比当且仅当

\[\sum_{j=0}^{n-1} p_{0j} \leq \sum_{j=0}^{n-1} p_{0j}(k), i \in m, k \in E.\]

\(P\) 随机单调当且仅当任意的 \(k \in E, \sum p_{0j}\) 关于 \(i\) 是单调递增的。

定理 9 给定离散时间单生过程 \(P=(p_0)\)，则 \(P\) 是随机单调的当且仅当

\[\sum_{j=0}^{n-1} p_{0j} \geq \sum_{j=0}^{n-1} p_{0j}(i), 0 \leq k \leq i.\]

特别地，对于离散时间单生过程 \(P=(p_0)\)，则 \(P\) 随机单调当且仅当

\[p_{0i+1} + p_{0i+1} \leq 1, i \in E.\]

证明 由引理 7 知，\(P\) 随机单调当且仅当对任意的 \(k \in E, \sum p_{0j}\) 关于 \(i\) 是单调递增的，后者显然等价于对任意的 \(k \in E, \sum p_{0j}\) 关于 \(i\) 是单调递减的，即对任意的 \(k \in E, \sum p_{0j} \leq \sum p_{0j}(i), i \in E, \sum p_{0j}\) 关于 \(i\) 是单调递减的，由此，结合单生性质，得证前一结论。再由离散时间单生过程转移矩阵的特点，容易验证 \(P\) 随机单调当且仅当

\[p_{0i+1} + p_{0i+1} \leq 1, i \in E.\]

此即

\[p_{0i+1} + p_{0i+1} \leq 1, i \in E,\]

所以后一结论成立。定理结论证毕。
Some criteria on discrete time single birth processes

BAI Jingjing LI Peisen ZHANG Yuhui ZHAO Pan
(School of Mathematical Sciences, Laboratory of Mathematics and Complex Systems of Ministry of Education, Beijing Normal University, 100875, Beijing, China)

Abstract Based on the representation of solution of Poisson equation for discrete time single birth processes and the theory of minimum non-negative solutions, we obtain explicit criteria on recurrence, (strong) ergodicity, $\ell$-ergodicity, geometric ergodicity, representations for return probability (extinction probability), stationary distribution and polynomial moments of return time by one unified treatment. Criterion on stochastic monotonicity for single birth processes is also presented.

Keywords single birth process; recurrent; (strongly)ergodic; $\ell$-ergodic; geometrically ergodic; stationary distribution; return time; stochastically monotone