对偶方法及其在 Q 过程唯一性相关问题中的应用*

张余辉
(北京师范大学数学科学学院，数学与复杂系统教育部重点实验室，100875，北京)

摘要　概述了经典的 Siegmund 对偶方法并应用于跳过程唯一性相关问题的研究. 给出了存在唯一随机单调跳过程的一个充分条件，同时研究了对偶 Q 矩阵之间零流入和零流出的关系.

关键词　对偶方法；随机单调；零流入；零流出；生灭过程；单生过程；分支过程

对偶方法是粒子系统研究中主要工具之一[1-2]. 最近，在生灭过程稳定性理论的研究中，对偶方法又一次体现了其独特的价值[3]. 因此，有必要从理论上对对偶方法本身进行研究. 基于此目的，本文先回顾和总结了经典的对偶方法，然后进一步发展该方法的理论,并应用于跳过程唯一性相关问题的研究.

1　对偶方法

先复习一些经典对偶理论中用到的基本概念. 本节内容大多取自文献[4-5]. 给定概率空间$(\Omega,\mathrm{F},\mathbb{P})$，考虑其上状态空间为 $E:=\{0,1,2,\cdots\}$的随机过程.

定义 1　给定 E 上 2 个过程$(X_t)_{t\geqslant 0}$和$(\widetilde{X}_t)_{t\geqslant 0}$，其转移函数分别为 $P(t)=(p_{ij}(t))$和 $\widetilde{P}(t)=(\widetilde{p}_{ij}(t))$. 如果

$$\mathbb{P}_i(X_t\geqslant j)=\mathbb{P}_j(\widetilde{X}_t\leqslant i),\quad i,j\in E,t\geqslant 0,\tag{1}$$

即

$$\sum_{k=j}^{\infty}p_{ik}(t)=\sum_{k=0}^{i}\widetilde{p}_{jk}(t),\quad i,j\in E,t\geqslant 0,\tag{2}$$

则$(\widetilde{X}_t)_{t\geqslant 0}$称为$(X_t)_{t\geqslant 0}$的对偶过程，也将 $\widetilde{P}(t)$称为 $P(t)$的对偶转移函数.

上述定义首次出现于文献[6]，故也称为 Siegmund 对偶.

定义 2　给定 E 上过程$(X_t)_{t\geqslant 0}$，其转移函数为 $P(t)=(p_{ij}(t))$(在下面的叙述中也称后者为过程). 若对所有 $i\leqslant m$ 和 $t\geqslant 0$,下式成立:

$$\sum_{k=j}^{\infty}p_{ik}(t)\leqslant\sum_{k=j}^{\infty}p_{mk}(t),\quad j\in E,\tag{3}$$

则称该过程 $P(t)$随机单调.

注意下式与式(3)等价:

$$\sum_{k=j}^{\infty}p_{ik}(t)\leqslant\sum_{k=j}^{\infty}p_{i+1,k}(t),\quad i,j\in E,t\geqslant 0.\tag{4}$$

关于对偶过程，在文献[6]中有一个重要命题，我们复述并证明如下.

命题 1　给定 E 上转移函数 $P(t)$. 则存在(唯一)对偶转移函数 $\widetilde{P}(t)$当且仅当 $P(t)$随机单调.

证明　若存在对偶转移函数 $\widetilde{P}(t)$，由式(2)显然有式(3)成立，此即$\mathbb{P}_i(X_t\geqslant j)$关于 i 单调增(任意 $j\in E$ 和 $t\geqslant 0$)，亦即 $P(t)$随机单调. 反之，若 $P(t)$随机单调，令

$$\widetilde{p}_{ij}(t)=\sum_{k=i}^{\infty}(p_{jk}(t)-p_{j-1,k}(t)),\quad i,j\in E,t\geqslant 0,\tag{5}$$

其中 $p_{-1,k}(t):=0$. 首先，由 $P(t)$随机单调知

$$\widetilde{p}_{ij}(t)=\sum_{k=i}^{\infty}p_{jk}(t)-\sum_{k=i}^{\infty}p_{j-1,k}(t)\geqslant 0,\quad i,j\in E,t\geqslant 0.$$

其次，注意到对任意 $i,j\in E$ 和 $t\geqslant 0$,

$$\sum_{k=0}^{i}\widetilde{p}_{jk}(t)=\sum_{k=0}^{i}\sum_{l=j}^{\infty}(p_{kl}(t)-p_{k-1,l}(t))=\sum_{l=j}^{\infty}\sum_{k=0}^{i}(p_{kl}(t)-p_{k-1,l}(t))=\sum_{l=j}^{\infty}p_{il}(t),$$

即式(2)成立. 由此得到

$$\sum_{k=0}^{\infty}\widetilde{p}_{jk}(t)\leqslant 1\ (j\in E,\ t\geqslant 0).$$

而对任意 $i,j\in E$ 和 $t,s\geqslant 0$，由式(2)、(5)和 Fubini 定理可以推出

$$\widetilde{p}_{ij}(t+s)=\sum_{k=i}^{\infty}(p_{jk}(t+s)-p_{j-1,k}(t+s))=\sum_{k=i}^{\infty}\Big(\sum_{m=0}^{\infty}p_{jm}(s)p_{mk}(t)-\sum_{m=0}^{\infty}p_{j-1,m}(s)p_{mk}(t)\Big)=\sum_{k=i}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(p_{jm}(s)-p_{j-1,m}(s))p_{mk}(t)=$$

* 国家教育部“985”计划资助项目；高校博士点专项研究基金资助项目(20100003110005)；国家自然科学基金重点资助项目(11131003)；中央高校基本科研业务费专项资金资助项目
收稿日期:2013-11-05

$$\sum_{m=0}^{\infty}(p_{jm}(s)-p_{j-1,m}(s))\sum_{k=i}^{\infty}p_{mk}(t)=$$
$$\sum_{m=0}^{\infty}(p_{jm}(s)-p_{j-1,m}(s))\sum_{k=0}^{m}\tilde{p}_{ik}(t)=$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{p}_{ik}(t)\sum_{m=k}^{\infty}(p_{jm}(s)-p_{j-1,m}(s))=$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{p}_{ik}(t)\tilde{p}_{kj}(s).$$

因此，对 $\tilde{P}(t)$ 而言，Chapman-Kolmogorov 方程成立．而由文献[1]的定理 1.2 知，$P(t)\mathbf{1}_A$ 是 t 关于 A 的一致连续函数，则

$$\lim_{t\to 0}\tilde{p}_{ij}(t)=\sum_{k=i}^{\infty}p_{jk}(0)-\sum_{k=i}^{\infty}p_{j-1,k}(0)=$$
$$\sum_{k=i}^{\infty}\delta_{jk}-\sum_{k=i}^{\infty}\delta_{j-1,k}=\delta_{ij},\quad i,j\in E.$$

综合以上知 $\tilde{P}(t)$ 是转移函数且满足式(2)，因此是对偶转移函数．唯一性由式(2)和(5)直接得出．

由式(5)显然有 $\lim_{i\to\infty}\tilde{p}_{ij}(t)=0$ $(j\in E,\ t\geqslant 0)$．具备此性质的转移函数称为 Feller-Reuter-Riley 转移函数．所以 $\tilde{P}(t)$ 是 Feller-Reuter-Riley 转移函数．而由式(2)可以看出，对任意 $i\in E$ 和 $t\geqslant 0$，$\sum_{k=0}^{i}\tilde{p}_{jk}(t)$ 关于 j 单调减．由此，我们可以得到下面的命题．

命题 2　给定 E 上转移函数 $\tilde{P}(t)$．如果 $\tilde{P}(t)$ 是 Feller-Reuter-Riley 转移函数且对任意 $i\in E$ 和 $t\geqslant 0$，$\sum_{k=0}^{i}\tilde{p}_{jk}(t)$ 关于 j 单调减，则存在唯一转移函数 $P(t)$ 使得 $\tilde{P}(t)$ 成为其对偶转移函数．

证明　令

$$p_{ij}(t)=\sum_{k=0}^{i}(\tilde{p}_{jk}(t)-\tilde{p}_{j+1,k}(t)),\quad i,j\in E,t\geqslant 0. \tag{6}$$

首先，由 $\sum_{k=0}^{i}\tilde{p}_{jk}(t)$ 关于 j 单调减知

$$p_{ij}(t)=\sum_{k=0}^{i}\tilde{p}_{jk}(t)-\sum_{k=0}^{i}\tilde{p}_{j+1,k}(t)\geqslant 0,$$
$$i,j\in E,t\geqslant 0.$$

其次，由 $\tilde{P}(t)$ 是 Feller-Reuter-Riley 转移函数，得到：对任意 $i,j\in E$ 和 $t\geqslant 0$，

$$\sum_{k=j}^{\infty}p_{ik}(t)=\sum_{k=j}^{\infty}\sum_{l=0}^{i}(\tilde{p}_{kl}(t)-\tilde{p}_{k+1,l}(t))=$$
$$\sum_{l=0}^{i}\sum_{k=j}^{\infty}(\tilde{p}_{kl}(t)-\tilde{p}_{k+1,l}(t))=\sum_{l=0}^{i}\tilde{p}_{jl}(t),$$

即式(2)成立．由此得到 $\sum_{k=0}^{\infty}p_{ik}(t)\leqslant 1(i\in E,\ t\geqslant 0)$．而对任意 $i,j\in E$ 和 $t,s\geqslant 0$，由式(2)、(5)和 Fubini 定理可以推出

$$p_{ij}(t+s)=\sum_{k=0}^{i}(\tilde{p}_{jk}(t+s)-\tilde{p}_{j+1,k}(t+s))=$$
$$\sum_{k=0}^{i}\sum_{m=0}^{\infty}(\tilde{p}_{jm}(s)-\tilde{p}_{j+1,m}(s))\tilde{p}_{mk}(t)=$$
$$\sum_{m=0}^{\infty}(\tilde{p}_{jm}(s)-\tilde{p}_{j+1,m}(s))\sum_{k=0}^{i}\tilde{p}_{mk}(t)=$$
$$\sum_{m=0}^{\infty}(\tilde{p}_{jm}(s)-\tilde{p}_{j+1,m}(s))\sum_{k=m}^{\infty}p_{ik}(t)=$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}p_{ik}(t)\sum_{m=0}^{k}(\tilde{p}_{jm}(s)-\tilde{p}_{j+1,m}(s))=$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}p_{ik}(t)\ p_{kj}(s).$$

因此，Chapman-Kolmogorov 方程对 $P(t)$ 成立．而由式(6)得出

$$\lim_{t\to 0}p_{ij}(t)=\sum_{k=0}^{i}(\delta_{jk}-\delta_{j+1,k})=\delta_{ij},\quad i,j\in E.$$

综合以上知 $P(t)$ 是转移函数且满足(2)，而唯一性由式(2)和(6)直接得出．因此结论成立．

将 E 上随机单调转移函数全体记为 P，定义

$\tilde{\mathrm{P}}=\{E$ 上 Feller-Reuter-Riley 转移函数 $\tilde{P}(t)$ 且对任意 $i\in E$ 和 $t\geqslant 0$，$\sum_{k=0}^{i}\tilde{p}_{jk}(t)$ 关于 j 单调减$\}$．

由以上 2 个命题及对偶关系可以知道，实际上式(5)定义了从 P 到 $\tilde{\mathrm{P}}$ 的一一映射，式(6)是其逆映射．由此，P 和 $\tilde{\mathrm{P}}$ 的元素可以称作互为对偶的．另外，对偶转移函数之间还有以下关系：

$$p_{ij}(t)-p_{i-1,j}(t)=\tilde{p}_{ji}(t)-\tilde{p}_{j+1,i}(t),$$
$$i,j\in E,\ t\geqslant 0.$$

注 1　（ⅰ）由式(2)可以看出，$P(t)$ 不中断当且仅当 $\tilde{p}_{00}(t)\equiv 1$ 即状态 0 是过程 $(\tilde{X}_t)_{t\geqslant 0}$ 的吸收态(对 Q 过程而言，即为 $\tilde{q}_0=0$)．

（ⅱ）由式(2)知，若 $P(t)$ 不中断且是 Feller-Reuter-Riley 转移函数，则 $\tilde{P}(t)$ 亦然．

（ⅲ）由式(6)知，若 $\tilde{P}(t)$ 不中断，则 $P(t)$ 是 Feller-Reuter-Riley 转移函数．注意，此时 $\tilde{P}(t)$ 亦为随机单调的．

现在回到 Q 矩阵．我们只考虑状态空间 $E=\{0,1,2,\cdots\}$ 上的全稳定 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$，即对所有 $i\neq j$ 有 $q_{ij}\geqslant 0$，且对每个 $i\in E$ 有 $\sum_{j\neq i}q_{ij}\leqslant -q_{ii}=:q_i<\infty$．回顾几个概念和结果．

定义 3　给定 E 上的全稳定 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$．

1）若对所有 $j\in E$ 有 $\lim_{i\to\infty}q_{ij}=0$ 成立，则称该 Q 矩阵为 Feller Q 矩阵．若对所有 $j\in E$ 有 $\lim_{i\to\infty}\sum_{k=j}^{\infty}q_{ik}=0$ 成

立，则称该 Q 矩阵为 Reuter Q 矩阵.

2）若下式成立：

$$\sum_{k=j}^{\infty} q_{ik} \leqslant \sum_{k=j}^{\infty} q_{mk}, \quad i \leqslant m,\ j \leqslant i \text{ 或 } j > m, \tag{7}$$

则称该 Q 矩阵单调.

3）若对某个（等价地，对所有）$\lambda>0$，下列方程只有平凡解（零解）$x=(x_i)$：

$$(\lambda I - Q)x = 0, \quad 0 \leqslant x_i \leqslant 1,\ i \in E, \tag{8}$$

则称该 Q 矩阵零流出. 若对某个（等价地，对所有）$\lambda>0$，下列方程只有平凡解（零解）$y=(y_i)$：

$$y(\lambda I - Q) = 0, \quad y_i \geqslant 0,\ i \in E,\ \sum_{i\in E} y_i < \infty, \tag{9}$$

则称该 Q 矩阵零流入.

如果 Q 矩阵保守即 $-q_{ii} = \sum_{j\neq i} q_{ij}$，此时对任意 $j \in E$ 和 $i > j$，$\sum_{k=j}^{\infty} q_{ik} = -\sum_{k=0}^{j-1} q_{ik}$. 由此可以看出，保守的 Feller Q 矩阵一定是 Reuter Q 矩阵，自然地，非保守状态只有有限个的 Feller Q 矩阵也是 Reuter Q 矩阵. 另外，式（7）与下式等价：

$$\sum_{k=j}^{\infty} q_{ik} \leqslant \sum_{k=j}^{\infty} q_{i+1,k}, \quad j \neq i+1,\ i \in E. \tag{10}$$

例 1　给定全稳定（可能非保守）生灭 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$ 如下：

$$b_i := q_{i,i+1} > 0,\ i \geqslant 0,$$
$$a_i := q_{i,i-1} > 0,\ i \geqslant 1,$$
$$c_i := q_i - (a_i + b_i) \geqslant 0,\ i \geqslant 0,$$

其中 $a_0 := 0$. 这是 Feller Q 矩阵，但要成为 Reuter Q 矩阵当且仅当 $\lim_{i\to\infty} c_i = 0$，要成为单调 Q 矩阵当且仅当 c_i 单调减少. 所以就保守生灭 Q 矩阵而言，由于 $c_i \equiv 0$，自然是单调 Reuter Q 矩阵.

例 2　给定全稳定（可能非保守）分支 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$ 如下：

$$q_{ij} = \begin{cases} i b_{j-i+1}, & \text{当 } j \geqslant i-1, \\ 0, & \text{当 } j < i-1, \end{cases}$$

其中 $b_k \geqslant 0\ (k \neq 1)$ 且 $\sum_{k\geqslant 0} b_k \leqslant 0$. 显然，0 是吸收态且分支 Q 矩阵是 Feller Q 矩阵，但要成为 Reuter Q 矩阵当且仅当 $\sum_{k\geqslant 0} b_k = 0$，即是保守 Q 矩阵. 保守的分支 Q 矩阵是单调 Reuter Q 矩阵.

对于 Q 矩阵对应的最小 Q 过程随机单调的研究，如与该 Q 矩阵某些性质的关系等，文献[5,7,12]得到如下结论：

定理 1　给定 E 上的全稳定 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$. 则其对应的最小 Q 过程 $P^{\min}(t)$ 随机单调，当且仅当该 Q 矩阵单调且零流出.

定理 1 研究的随机单调转移函数是集合 P 的元素；而文献[5]研究了 $\sum_{k=0}^{j} p_{ik}(t)$ 关于 i 单调减（对任意 $j\in E$ 和 $t\geqslant 0$）的转移函数，得到如下结论：

定理 2　给定 E 上的全稳定 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$. 则该 Q 矩阵对应的最小 Q 过程 $P^{\min}(t)$ 满足：

$$\sum_{k=0}^{j} p_{ik}^{\min}(t) \geqslant \sum_{k=0}^{j} p_{mk}^{\min}(t), \quad i \leqslant m,\ j \in E,$$

当且仅当该 Q 矩阵满足

$$\sum_{k=0}^{j} q_{ik} \geqslant \sum_{k=0}^{j} q_{mk}, \quad i \leqslant m,\ j < i \text{ 或 } j \geqslant m, \tag{11}$$

等价地，

$$\sum_{k=0}^{j} q_{ik} \geqslant \sum_{k=0}^{j} q_{i+1,k}, \quad j \neq i. \tag{12}$$

注 2　就例 1 中的全稳定（可能非保守）生灭 Q 矩阵而言，要满足式（11）当且仅当 c_i 单调增加. 保守生灭 Q 矩阵自然也满足式（11）.

文献[8]和[4]研究了 Feller-Reuter-Riley 转移函数，给出了以下结果.

定理 3　给定 E 上全稳定 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$. 若该 Q 矩阵零流入且是 Feller Q 矩阵，则其对应的最小 Q 过程 $P^{\min}(t)$ 是 Feller-Reuter-Riley 转移函数.

顺便提一句，根据文献[4]第 81 页的注记知，对全稳定 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$ 而言，至多存在一个 Feller-Reuter-Riley 转移函数，因此，如果其对应的 Q 过程 $P(t)$ 是 Feller-Reuter-Riley 转移函数，此时该 Q 矩阵对应的最小 Q 过程 $P^{\min}(t)$ 自然也是 Feller-Reuter-Riley 转移函数，所以 $P(t)=P^{\min}(t)$. 这也是在 $\tilde{\mathrm{P}}$ 中我们只研究最小 Q 过程的原因. 文献[5]在定理 3 基础上对 Feller-Reuter-Riley 转移函数作了进一步研究，得到的结论是：

定理 4　给定 E 上全稳定 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$. 假定其满足式（11）. 则其对应的最小 Q 过程 $P^{\min}(t)$ 是 Feller-Reuter-Riley 转移函数当且仅当以下之一成立：

（ⅰ）该 Q 矩阵零流入且是 Feller Q 矩阵；

（ⅱ）对任意 $\lambda>0$ 下述方程有解 $x=(x_i)$：

$$(\lambda I - Q)x = c, \quad 0 \leqslant x_i \leqslant 1,\ i \in E,\ \sup_{i\in E} x_i = 1,$$

其中 $c=(c_i)$，而 $c_i = q_i - \sum_{j\neq i} q_{ij}$ 即 i 的非保守量.

综合定理 1、定理 3 和定理 4 得到以下命题：

命题 3　给定 E 上全稳定 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$. 则其对应的最小 Q 过程 $P^{\min}(t) \in \tilde{\mathrm{P}}$ 当且仅当该 Q 矩阵满足式（11），且定理 4 中的（ⅰ）、（ⅱ）之一成立.

下面我们考虑全稳定 Q 矩阵之间的对偶.

定义 4　给定 E 上 2 个全稳定 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$ 和

$\widetilde{Q}=(\widetilde{q}_{ij})$. 如果

$$\sum_{k=j}^{\infty} q_{ik}=\sum_{k=0}^{i} \widetilde{q}_{jk}, \quad i,j\in E, \tag{13}$$

则 $\widetilde{Q}$ 称为对偶 Q 矩阵.

命题 4 给定 E 上全稳定 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$. 则存在 Q 的唯一对偶 Q 矩阵 $\widetilde{Q}$ 当且仅当 Q 是单调的.

证明 若存在 Q 的对偶 Q 矩阵 $\widetilde{Q}$, 由式(13)显然有式(7)成立, 此即 Q 单调. 反之, 若 Q 单调, 令

$$\widetilde{q}_{ij}=\sum_{k=i}^{\infty}(q_{jk}-q_{j-1,k}), \quad i,j\in E, \tag{14}$$

其中 $q_{-1,k}:=0$. 首先, 由 Q 的单调性和(10)知

$$\widetilde{q}_{ij}=\sum_{k=i}^{\infty} q_{jk}-\sum_{k=i}^{\infty} q_{j-1,k}\geqslant 0, \quad j\neq i.$$

其次, 注意到对任意 $i,j\in E$,

$$\sum_{k=0}^{i}\widetilde{q}_{jk}=\sum_{k=0}^{i}\sum_{l=j}^{\infty}(q_{kl}-q_{k-1,l})=$$
$$\sum_{l=j}^{\infty}\sum_{k=0}^{i}(q_{kl}-q_{k-1,l})=\sum_{l=j}^{\infty}q_{il},$$

即式(13)成立. 由此得到 $\sum_{k=0}^{i}\widetilde{q}_{jk}\leqslant 0(i\geqslant j)$, 进而 $\sum_{k=0}^{\infty}\widetilde{q}_{jk}\leqslant 0$. 因此, $\widetilde{Q}$ 是 Q 矩阵. 而 $\widetilde{Q}$ 的全稳定性由式(13)和 Q 的全稳定性得出, 所以 $\widetilde{Q}$ 是 Q 的对偶 Q 矩阵. 对偶 Q 矩阵的唯一性由式(13)和(14)直接得出.

命题 5 给定 E 上全稳定 Q 矩阵 $\widetilde{Q}=(\widetilde{q}_{ij})$. 如果 $\widetilde{Q}$ 是 Feller Q 矩阵且满足式(12), 则存在唯一 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$ 使得 $\widetilde{Q}$ 成为其对偶 Q 矩阵.

证明 令

$$q_{ij}=\sum_{k=0}^{i}(\widetilde{q}_{jk}-\widetilde{q}_{j+1,k}), \quad i,j\in E. \tag{15}$$

首先, 由式(12)知

$$q_{ij}=\sum_{k=0}^{i}\widetilde{q}_{jk}-\sum_{k=0}^{i}\widetilde{q}_{j+1,k}\geqslant 0, \quad j\neq i.$$

其次, 由 $\widetilde{Q}$ 是 Feller Q 矩阵, 得到: 对任意 $i,j\in E$,

$$\sum_{k=j}^{\infty}q_{ik}=\sum_{k=j}^{\infty}\sum_{l=0}^{i}(\widetilde{q}_{kl}-\widetilde{q}_{k+1,l})=$$
$$\sum_{l=0}^{i}\sum_{k=j}^{\infty}(\widetilde{q}_{kl}-\widetilde{q}_{k+1,l})=\sum_{l=0}^{i}\widetilde{q}_{jl},$$

即式(13)成立. 由此得到 $\sum_{k=j}^{\infty}q_{ik}\leqslant 0\ (i\geqslant j)$, 进而 $\sum_{k=0}^{\infty}q_{ik}\leqslant 0(i\in E)$. 另外, Q 的全稳定性可以由式(13)和 $\widetilde{Q}$ 的全稳定性得出, 因此, Q 是全稳定 Q 矩阵, 而且, $\widetilde{Q}$ 是其对偶 Q 矩阵. 唯一性可以由式(13)和(15)直接看出.

定义

$\mathbb{Q}:=\{E$ 上全稳定单调 Q 矩阵$\}$,

$\widetilde{\mathbb{Q}}:=\{E$ 上满足式(12)的全稳定 Feller Q 矩阵$\}$.

由以上 2 个命题知道, 式(14)定义了从 $\mathbb{Q}$ 到 $\widetilde{\mathbb{Q}}$ 的一一映射, 式(15)是其逆映射. 因此, $\mathbb{Q}$ 和 $\widetilde{\mathbb{Q}}$ 的元素可以称作互为对偶的. 另外, 2 个对偶 Q 矩阵之间还有以下关系:

$$q_{ij}-q_{i-1,j}=\widetilde{q}_{ji}-\widetilde{q}_{j+1,i}, \quad i,j\in E. \tag{16}$$

注 3 由式(13)可以看出, Q 为 Reuter Q 矩阵当且仅当 $\widetilde{Q}$ 保守, 此时 $\widetilde{Q}$ 自然也是 Reuter Q 矩阵; Q 保守当且仅当 $\widetilde{q}_0=0$, 即 0 是 $\widetilde{Q}$ 的吸收态.

注 4 就例 1 中的全稳定单调生灭 Q 矩阵而言, 其对偶 Q 矩阵 $\widetilde{Q}=(\widetilde{q}_{ij})$ 是如下单死 Q 矩阵:

$$\widetilde{q}_{i,i-1}=b_{i-1},\ i\geqslant 1;\ \widetilde{q}_{i,i}=-b_{i-1}-a_i-c_i,$$
$$\widetilde{q}_{i,i+1}=a_i+c_i-c_{i+1},$$
$$\widetilde{q}_{ij}=c_{j-1}-c_j,\ j\geqslant i+2,\ i\geqslant 0.$$

其中 $b_{-1}:=0$. 注意此时 c_i 单调减少. 由注 3, 若还有 $\lim\limits_{i\to\infty}c_i=0$, 则 $\widetilde{Q}$ 保守. 若原生灭 Q 矩阵还是保守的, 则对偶 Q 矩阵 $\widetilde{Q}=(\widetilde{q}_{ij})$ 是如下 0 为吸收态的保守生灭 Q 矩阵:

$$\widetilde{a}_i:=\widetilde{q}_{i,i-1}=b_{i-1},\ i\geqslant 1;$$
$$\widetilde{b}_i:=\widetilde{q}_{i,i+1}=a_i, i\geqslant 0.$$

注 5 对如下全稳定(可能非保守)生灭 Q 矩阵 $\widetilde{Q}=(\widetilde{q}_{ij})$:

$$\widetilde{b}_i:=\widetilde{q}_{i,i+1}>0,\ i\geqslant 0;\ \widetilde{a}_i:=\widetilde{q}_{i,i-1}>0,\ i\geqslant 1;$$
$$\widetilde{c}_i:=\widetilde{q}_i-(\widetilde{a}_i+\widetilde{b}_i)\geqslant 0,\ i\geqslant 0,$$

其中 $\widetilde{a}_0:=0$, 当 $\widetilde{c}_i$ 单调增加时, 由注 2, $\widetilde{Q}\in\widetilde{\mathbb{Q}}$. 其对偶 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$ 是如下(可能非保守)单生 Q 矩阵:

$$q_{i,i+1}=\widetilde{a}_{i+1},\ q_{i,i}=-\widetilde{a}_{i+1}-\widetilde{b}_i-\widetilde{c}_i,\ i\geqslant 0;$$
$$q_{i,i-1}=\widetilde{b}_i+\widetilde{c}_i-\widetilde{c}_{i-1},\ i\geqslant 1;$$
$$q_{ij}=\widetilde{c}_{j+1}-\widetilde{c}_j,\ 0\leqslant j\leqslant i-2.$$

当 $\widetilde{c}_0=0$ 时, $i\geqslant 1$ 均是该对偶 Q 矩阵的保守态; 若还有 $\widetilde{b}_0=0$, 则由注 3 知, 0 也是保守态, 因此此时该对偶 Q 矩阵 Q 是保守的.

注 6 回忆例 2 中的全稳定(可能非保守)分支 Q 矩阵 $\widetilde{Q}=(\widetilde{q}_{ij})$:

$$\widetilde{q}_{ij}=\begin{cases} ib_{j-i+1}, & \text{当 } j\geqslant i-1;\\ 0, & \text{当 } j<i-1;\end{cases}$$

其中 $b_k\geqslant 0\ (k\neq 1)$ 且 $\sum_{k\geqslant 0}b_k\leqslant 0$. 显然, $\widetilde{Q}\in\widetilde{\mathbb{Q}}$. 其对偶 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})\in\mathbb{Q}$ 是保守单生 Q 矩阵:

$$q_{ij}=\begin{cases} (j+1)a_{i-j}-ja_{i-j+1}, & \text{当 } j\leqslant i+1;\\ 0, & \text{当 } j>i+1;\end{cases}$$

其中 $a_k:=-\sum_{j=0}^{k}b_j(k\geqslant 0)$, $a_{-1}=0$. 此时, $a_0\leqslant 0$, $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_k\geqslant\cdots\geqslant 0$. 参看文献[9].

在下面 2 节, 我们将分别给出对偶方法在唯一性

相关问题方面的应用，如在随机单调 Q 过程的唯一性，生灭过程的零流出和零流入等. 这里给出的仅仅是经典的对偶方法,在粒子系统的研究中应用的是更为广泛的对偶.

2　随机单调 Q 过程的唯一性

定理 1 给出了最小 Q 过程随机单调的充分必要条件，而这节我们关心的是 Q 矩阵在何条件下，对应的随机单调 Q 过程是唯一的. 得到的结果如下：

定理 4　给定 E 上的全稳定 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$. 若该 Q 矩阵单调，零流出且是 Reuter Q 矩阵，则其对应的随机单调 Q 过程 $P(t)$ 唯一，即为最小 Q 过程 $(P(t)=P^{\min}(t))$.

这个定理的证明要用到对偶方法，关键是下面的结论，参见文献[4]. 我们复述该命题及其证明如下.

命题 6　给定 E 上全稳定单调 Reuter Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$. 其对偶 Q 矩阵为 $\tilde{Q}=(\tilde{q}_{ij})$. 设 $P(t)$ 为对应于 Q 的随机单调转移函数. 则 $P(t)$ 的对偶转移函数 $\tilde{P}(t)$ 一定是对应于 $\tilde{Q}$ 的最小转移函数 $\tilde{P}^{\min}(t)$.

证明　首先，我们证明 $P(t)$ 的对偶转移函数 $\tilde{P}(t)$ 是对应于 $\tilde{Q}$ 的转移函数. 令 $\tilde{P}(t)$ 的 Q 矩阵为 $\bar{Q}=(\bar{q}_{ij})$. 由前面的讨论知 $\tilde{P}(t)$ 是 Feller-Reuter-Riley 转移函数，再根据文献[4]的命题 1.5.3 知，其 Q 矩阵 $\bar{Q}$ 是全稳定的. 由式(6)推出

$$q_{ij}=\sum_{k=0}^{i}(\bar{q}_{jk}-\bar{q}_{j+1,k}),\quad i,j\in E.$$

进而

$$q_{ij}-q_{i-1,j}=\bar{q}_{ji}-\bar{q}_{j+1,i},\quad i,j\in E.$$

因此，我们得到

$$\sum_{j=m}^{n}(q_{ij}-q_{i-1,j})=\bar{q}_{mi}-\bar{q}_{n+1,i},\quad n\geqslant m.\tag{17}$$

在式(17)中令 $n\to\infty$，由式(14)知(17)中左边收敛于 $\tilde{q}_{mi}$. 因此，$\lim\limits_{n\to\infty}\bar{q}_{ni}$ 存在记为 a_i. 注意，$a_i\geqslant 0(i\in E)$. 此时

$$\tilde{q}_{mi}+a_i=\bar{q}_{mi},\quad m,i\in E.\tag{18}$$

由注 3 知，$\tilde{Q}$ 是保守的. 因此，由式(17)得到：$0\leqslant\sum_{i=0}^{\infty}a_i=\sum_{i=0}^{\infty}\bar{q}_{mi}\leqslant 0$. 所以，$a_i=0$ 对一切 $i\in E$ 成立. 再结合式(18)知 $\tilde{q}_{mi}=\bar{q}_{mi}(m,i\in E)$，即 $\tilde{Q}=\bar{Q}$. 所以，$\tilde{P}(t)$ 是对应于 $\tilde{Q}$ 的转移函数.

最后，由于 $\tilde{P}(t)$ 是 Feller-Reuter-Riley 转移函数且 $\tilde{Q}$ 全稳定，根据定理 3 之后的讨论，我们立刻知道 $\tilde{P}(t)=\tilde{P}^{\min}(t)$.

定理 4 的证明　设 $P(t)$ 是对应于 Q 的任意随机单调 Q 过程，其对偶过程记为 $\tilde{P}(t)$. 在定理的假设下，由定理 1 知，对应于 Q 的最小 Q 过程 $P^{\min}(t)$ 也是随机单调的，其对偶过程记为 $\bar{P}(t)$.

将 Q 的对偶 Q 矩阵记为 $\tilde{Q}=(\tilde{q}_{ij})$. 注意此时 Q 为全稳定单调 Reuter Q 矩阵. 因此，由命题 6 知，$\tilde{P}(t)$ 和 $\bar{P}(t)$ 均是对应于 $\tilde{Q}$ 的最小 Q 过程 $\tilde{P}^{\min}(t)$，即 $\tilde{P}(t)=\bar{P}(t)=\tilde{P}^{\min}(t)$，而由前面的讨论知，P 和 $\tilde{\mathrm{P}}$ 的映射是一对一的，所以，$P(t)=P^{\min}(t)$，即得证对应于 Q 的随机单调 Q 过程是唯一的.

命题 7　给定 E 上 Q 矩阵 $\tilde{Q}=(\tilde{q}_{ij})\in\tilde{\mathrm{Q}}$ 且保守，零流入. 其对偶 Q 矩阵记为 $Q=(q_{ij})$. 假定 Q 为零流出的. 设 $\tilde{P}^{\min}(t)$ 为对应于 $\tilde{Q}$ 的最小 Q 过程. 则其对偶过程 $P(t)$ 一定是对应于 Q 的最小 Q 过程 $P^{\min}(t)$.

证明　由命题 3 知，$\tilde{P}^{\min}(t)\in\tilde{\mathrm{P}}$，所以存在其对偶过程 $P(t)\in\mathrm{P}$. 令 $P(t)$ 的 Q 矩阵为 $\hat{Q}=(\hat{q}_{ij})$. 由式(6)和(15)推出

$$\hat{q}_{ij}=\sum_{k=0}^{i}(\tilde{q}_{jk}-\tilde{q}_{j+1,k})=q_{ij},\quad i,j\in E,$$

即 $\hat{Q}=Q$. 所以，$P(t)$ 是对应于 Q 的随机单调过程. 由于 $\tilde{Q}$ 保守及注 3 知,Q 是 Reuter Q 矩阵，同时又是全稳定单调的，再结合其零流出的假设，由定理 4 得到 $P(t)=P^{\min}(t)$.

3　对偶 Q 矩阵的零流出和零流入关系

这节，我们研究对偶 Q 矩阵之间关于其零流出和零流入的关系.

定理 5　给定 E 上 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})\in\mathrm{Q}$. 记其对偶 Q 矩阵为 $\tilde{Q}=(\tilde{q}_{ij})\in\tilde{\mathrm{Q}}$. 则 $\tilde{Q}$ 非零流入当且仅当 Q 非零流出且方程(8)有非平凡单调增的解；进而，若 Q 零流出，则 $\tilde{Q}$ 零流入. 类似地，Q 非零流入当且仅当 $\tilde{Q}$ 非零流出且方程(8)有非平凡单调减少到 0 的解；进而，若 $\tilde{Q}$ 零流出，则 Q 零流入.

证明　(ⅰ) 假定 $\tilde{Q}$ 非零流入，即对 $\tilde{Q}$ 而言，方程(9)有非平凡解 $y=(y_i)$. 因此，由式(9)和(14)得出

$$\lambda y_i=\sum_{j=0}^{\infty}y_j\tilde{q}_{ji}=\sum_{j=0}^{\infty}y_j\sum_{k=j}^{\infty}(q_{ik}-q_{i-1,k})=\sum_{k=0}^{\infty}(q_{ik}-q_{i-1,k})\sum_{j=0}^{k}y_j,\quad i\in E.$$

令 $x_i=\sum_{l=0}^{i}y_l/\sum_{l=0}^{\infty}y_l(i\in E)$. 显然 $0\leqslant x_i\leqslant 1$，$x_i\not\equiv 0$ $(i\in E)$. 由上式得到

$$\lambda x_i=\sum_{l=0}^{i}\sum_{k=0}^{\infty}(q_{lk}-q_{l-1,k})x_k=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{i}(q_{lk}-q_{l-1,k})x_k=\sum_{k=0}^{\infty}q_{ik}x_k,\quad i\in E.$$

所以，对 Q 而言，方程(8)有非平凡单调增的解 $x=$

(x_i)，从而 Q 为非零流出.

假定方程(8)有非平凡单调增的解 $x=(x_i)$. 令 $y_0=x_0$，$y_i=x_i-x_{i-1}$ $(i\geqslant 1)$. 显然 $y_i\geqslant 0$ $(i\in E)$ 且 $y_i\neq 0$，同时 $x_i=\sum\limits_{j=0}^{i}y_j\,(i\in E)$，故 $\sum\limits_{i\in E}y_i=\lim\limits_{i\to\infty}x_i\leqslant 1$. 由方程(8)和(15)以及 $\tilde{Q}$ 是 Feller Q 矩阵的事实，我们得到

$$\lambda x_i=\sum_{j=0}^{\infty}q_{ij}x_j=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{i}(\tilde{q}_{jk}-\tilde{q}_{j+1,k})x_j=$$
$$\sum_{k=0}^{i}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{j}y_l(\tilde{q}_{jk}-\tilde{q}_{j+1,k})=$$
$$\sum_{k=0}^{i}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{j=l}^{\infty}y_l(\tilde{q}_{jk}-\tilde{q}_{j+1,k})=$$
$$\sum_{k=0}^{i}\sum_{l=0}^{\infty}y_l\tilde{q}_{lk},\quad i\in E.$$

则

$$\lambda y_i=\sum_{l=0}^{\infty}y_l\tilde{q}_{li},\quad i\in E,$$

即 $y=(y_i)$ 是方程(9)的非平凡解，因此，$\tilde{Q}$ 非零流入. 再由前面所证结果直接推出后一个结论.

(ⅱ) 假定 Q 非零流入，即方程(9)有非平凡解 $y=(y_i)$. 因此，由式(9)和(15)得出

$$\lambda y_i=\sum_{j=0}^{\infty}y_jq_{ji}=\sum_{j=0}^{\infty}y_j\sum_{k=0}^{j}(\tilde{q}_{ik}-\tilde{q}_{i+1,k})=$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}(\tilde{q}_{ik}-\tilde{q}_{i+1,k})\sum_{j=k}^{\infty}y_j,\quad i\in E.$$

令 $x_i=\sum\limits_{l=i}^{\infty}y_l/\sum\limits_{l=0}^{\infty}y_l\,(i\in E)$. 显然 $0\leqslant x_i\leqslant 1$，$x_i\neq 0$ $(i\in E)$，而且 x_i 单调减少到 0(当 $i\to\infty$ 时). 由上式及 $\tilde{Q}$ 是 Feller Q 矩阵的事实得到

$$\lambda x_i=\sum_{l=i}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(\tilde{q}_{lk}-\tilde{q}_{l+1,k})x_k=$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=i}^{\infty}\infty(\tilde{q}_{lk}-\tilde{q}_{l+1,k})x_k=\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{q}_{ik}x_k,\quad i\in E.$$

所以，对 $\tilde{Q}$ 而言，方程(8)有非平凡单调减少到 0 的解 $x=(x_i)$，从而 $\tilde{Q}$ 为非零流出.

反之，若对 $\tilde{Q}$，方程(8)有非平凡单调减少到 0 的解 $x=(x_i)$. 令 $y_i=x_i-x_{i+1}$ $(i\in E)$. 显然 $y_i\geqslant 0$ $(i\in E)$ 且 $y_i\neq 0$，同时因 $x_i=\sum\limits_{j=i}^{\infty}y_j\,(i\in E)$，所以 $\sum\limits_{i\in E}y_i=x_0\leqslant 1$. 由方程(8)和(14)，我们得到

$$\lambda x_i=\sum_{j=0}^{\infty}\tilde{q}_{ij}x_j=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=i}^{\infty}(q_{jk}-q_{j-1,k})x_j=$$
$$\sum_{k=i}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{l=j}^{\infty}y_l(q_{jk}-q_{j-1,k})=$$
$$\sum_{k=i}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{l}y_l(q_{jk}-q_{j-1,k})=$$
$$\sum_{k=i}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}y_lq_{lk},\quad i\in E.$$

则

$$\lambda y_i=\sum_{l=0}^{\infty}y_lq_{li},\quad i\in E,$$

即 $y=(y_i)$ 是方程(9)的非平凡解，因此，Q 非零流入. 最后一个结论可以由此直接推出.

命题 8 例 2 中的全稳定(可能非保守)分支 Q 矩阵 $\tilde{Q}=(\tilde{q}_{ij})$ 是零流入的，进而对应于 $\tilde{Q}$ 的满足 Kolmogorov 向前方程的分支过程是唯一的.

证明 由注 6 知，其对偶 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$ 是保守单生 Q 矩阵且 $q_{i,i+1}=-(i+1)a_0$ $(i\geqslant 0)$. 因此，$\sum\limits_{i=0}^{\infty}(1/q_{i,i+1})=\infty$. 故由文献[10]，或者[11]，或者[1]的定理 3.16 知，该单生 Q 矩阵决定的单生过程是唯一的. 结合该单生 Q 矩阵的保守性及文献[1]的定理 2.47 推出，该单生 Q 矩阵是零流出的. 进而由定理 5 知，分支 Q 矩阵 $\tilde{Q}$ 是零流入的.

另一方法是，注意到分支 Q 矩阵是单死 Q 矩阵且 $\tilde{q}_{i,i-1}=ib_0\,(i\geqslant 1)$. 因此，$\sum\limits_{i=1}^{\infty}(1/\tilde{q}_{i,i-1})=\infty$. 故由文献[13]的推论 3.1 知，该分支 Q 矩阵 $\tilde{Q}$ 是零流入的.

最后一个结论由文献[1]的定理 3.6 直接得到.

在定理 5 中，若假定当 Q 非零流出时方程(8)必有非平凡单调增的解，则 Q 零流出当且仅当 $\tilde{Q}$ 零流入；若假定 $\tilde{Q}$ 非零流出时方程(8)必有非平凡单调减少到 0 的解，则 $\tilde{Q}$ 零流出当且仅当 Q 零流入.

而由文献[1]定理 3.16 和文献[13]知，对于全稳定单生 Q 矩阵，无论是否保守，若非零流出时，则方程(8)总有非平凡单调增的解. 因此，再结合注 5 和文献[13]的定理 1.2 得到：

命题 9 给定全稳定(可能非保守)生灭 Q 矩阵 $\tilde{Q}=(\tilde{q}_{ij})$：

$$\tilde{b}_i:=\tilde{q}_{i,i+1}>0,\ i\geqslant 0;\ \tilde{a}_i:=\tilde{q}_{i,i-1}>0,\ i\geqslant 1;$$
$$\tilde{c}_i:=\tilde{q}_i-(\tilde{a}_i+\tilde{b}_i)\geqslant 0,\ i\geqslant 0,$$

其中 $\tilde{a}_0:=0$. 假定 $\tilde{c}_i$ 单调增加. 其对偶 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$ 是如下(可能非保守)单生 Q 矩阵：

$$q_{i,i+1}=\tilde{a}_{i+1},\ q_{i,i}=-\tilde{a}_{i+1}-\tilde{b}_i-\tilde{c}_i,\ i\geqslant 0;$$
$$q_{i,i-1}=\tilde{b}_i+\tilde{c}_i-\tilde{c}_{i-1},\ i\geqslant 1;$$
$$q_{ij}=\tilde{c}_{j+1}-\tilde{c}_j,\ 0\leqslant j\leqslant i-2.$$

则 $\tilde{Q}$ 零流入当且仅当 Q 零流出. 进一步，令

$$m_0=\frac{1}{\tilde{a}_1}(1+\tilde{c}_0+\tilde{b}_0),$$

$$m_n=\frac{1}{\tilde{a}_{n+1}}\left(1+\tilde{c}_0+\sum_{k=0}^{n-1}\tilde{c}_{k+1}m_k+\tilde{b}_n m_{n-1}\right),\ n\geqslant 1.$$

则 $\tilde{Q}$ 零流入当且仅当 $\sum_{n=0}^{\infty}m_n=\infty$.

注 7　由文献[13]的定理 1.3 和注记 3.1 知，对于一般的未必单调增加的 $\tilde{c}_i$，以上判别依然成立，即 $\tilde{Q}$ 零流入当且仅当 $\sum_{n=0}^{\infty}m_n=\infty$.

4　参考文献

[1] Chen Mufa. From Markov chains to non-equilibrium particle systems [M]. 2nd ed. Singapore: World Scientific, 2004

[2] Liggett T M. Interacting Particle Systems [M]. New York: Springer-Verlag, 1985

[3] Chen Mufa. Speed of stability for birth-death process[J]. Front Math China, 2010, 5(3): 379

[4] Anderson W J. Continuous-Time Markov Chains [M]. New York: Springer-Verlag, 1991

[5] Zhang Hanjun, Chen Anyue. Stochastic comparability and dual Q-functions[J]. J Math Anal Appl, 1999, 234: 482

[6] Siegmund D. The equivalence of absorbing and reflecting barrier problems for stochastically monotone Markov processes[J]. Ann Prob, 1976, 6: 914.

[7] Chen Mufa. A comment on the book "Continuous-Time Markov Chains" by W. J. Anderson[J]. Chinese J Appl Prob Stat, 1996, 12(1): 55

[8] Reuter G E H, Riley P W. The Feller property for Markov semigroups on a countable state space [J]. J London Math Soc, 1972, 5: 267

[9] Li Yangrong, Anthony G P, Li Jia, et al. The Limit behavior of dual Markov branching processes[J]. J Appl Prob, 2008, 45: 176

[10] Yan Shijian, Chen Mufa. Multidimensional Q-processes [J]. Chinese Ann Math, 1986, 7B(1): 90

[11] Zhang Jiankang. On the generalized birth and death processes (I)[J]. Acta Math Sci, 1984, 4: 241

[12] 张余辉. 最小 Q 过程的随机可比性[J]. 北京师范大学学报:自然科学版, 2000, 36(2): 156

[13] 王玲娣，张余辉. 单生(死)Q 矩阵零流出(入)的判别准则[J]. 数学学报, 2014,57(4):681

DUAL APPROACH AND ITS APPLICATIONS IN RELATED PROBLEMS WITH UNIQUENESS OF *Q*-PROCESSES

ZHANG Yuhui

(School of Mathematical Sciences, Beijing Normal University, Laboratory of Mathematics and Complex Systems, Ministry of Education, 100875, Beijing, China)

Abstract　Dual approach for Markov process is summarized and applied to related problems with uniqueness of *Q*-process. One sufficient condition on uniqueness of stochastically monotone process corresponding to *Q*-matrices is obtained. The relationships of zero entrance and zero exit between dual *Q*-matrices are also illustrated.

Key words　dual approach; stochastically monotone; zero-entrance; zero-exit; birth-death processes; single birth processes; branching processes