第57卷第4期 数学学报中文版 Vol.57, No.4
2014年7月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Jul., 2014

文章编号: 0583-1431(2014)04-0681-12 **文献标识码:** A

单生 (死) Q 矩阵零流出 (入) 的判别准则

王玲娣

河南大学数学与信息科学学院 开封 475004
E-mail: wanglingdi@mail.bnu.edu.cn

张余辉

北京师范大学数学科学学院 数学与复杂系统教育部重点实验室 北京 100875
E-mail: zhangyh@bnu.edu.cn

摘 要 用分析的方法分别给出了单生 Q 矩阵零流出和单死 Q 矩阵零流入的判别准则, 统一处理了保守和非保守两种情形, 再次得到了非保守的生灭 Q 矩阵零流出和零流入的判别准则. 同时, 还类比处理了保守和非保守两种情形下带移民的单生 Q 矩阵的相应问题.

关键词 单生过程; 单死过程; 流出解; 流入解

MR(2010) 主题分类 60J25, 60J75, 60J80

中图分类 O211.6

Criteria for Zero-Exit (-Entrance) of Single-Birth (-Death) Q-Matrices

Ling Di WANG

School of Mathematics and Information Sciences,
He'nan University, Kaifeng 475001*, P. R. China*
E-mail: *wanglingdi@mail.bnu.edu.cn*

Yu Hui ZHANG

School of Mathematical Sciences, Beijing Normal University,
Laboratory of Mathematics and Complex Systems (*Beijing Normal University*),
Ministry of Education, Beijing 100875*, P. R. China*
E-mail: *zhangyh@bnu.edu.cn*

Abstract In the paper, the explicit criteria for zero-exit (resp., zero-entrance) of (possible non-conservative) single birth (resp., single death) Q-matrices are presented

收稿日期: 2012-06-01; 接受日期: 2013-09-16
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11131003); 国家教育部 "985" 计划和高校博士点专项研究基金资助项目 (20100003110005); 中央高校基本科研业务费专向资金资助项目
通讯作者: 张余辉

with an analytic proof and a unified treatment is given for the conservative and non-conservative cases. Moreover, the criteria for zero-exit and zero-entrance of non-conservative birth-death Q-matrices are obtained again. Meanwhile, a similar treatment is given for the corresponding problem of single birth Q-matrices with immigration.

Keywords single birth processes; single death processes; exit-solution; entrance-solution
MR(2010) Subject Classification 60J25, 60J75, 60J80
Chinese Library Classification O211.6

1 引言及主要结果

考虑状态空间 $\mathbb{Z}_+ := \{0,1,2,\ldots\}$ 上的马氏链 $(X(t))_{t\geq 0}$, 记其转移概率矩阵为 $P(t)=(p_{ij}(t), i,j\in\mathbb{Z}_+)$, 则其转移速率矩阵 $Q=(q_{ij}, i,j\in\mathbb{Z}_+)$ 即是 $P(t)$ 在时刻 0 的导数矩阵

$$q_{ij} := \lim_{t\to 0}\frac{p_{ij}(t)-\delta_{ij}}{t},\quad i,j\in\mathbb{Z}_+.$$

转移速率矩阵通常称为 Q 矩阵, 有如下性质

$$0\leq q_{ij}<\infty,\quad i\neq j;\quad \sum_{j\neq i} q_{ij}\leq -q_{ii} =: q_i\leq\infty,\quad i\in\mathbb{Z}_+.$$

若对所有 $i\in\mathbb{Z}_+$ 都有 $q_i<\infty$, 则称该 Q 矩阵为全稳定的; 若对所有 $i\in\mathbb{Z}_+$ 都有 $q_i=\sum_{j\neq i} q_{ij}$ (等价地, $\sum_{j\in\mathbb{Z}_+} q_{ij}=0$), 则称该 Q 矩阵为保守的. 本文的 Q 矩阵可以保守, 也可以非保守, 但均假定是全稳定的.

给定一个矩阵 Q, 总存在过程 $P(t)$, 使得其转移速率矩阵为 Q (见文 [5, 第 75 页定理 2.21]), 称该过程为 Q 矩阵决定的跳过程, 简称 Q 过程. 跳过程的唯一性问题是指, Q 矩阵决定的 Q 过程是否唯一. 该问题重要的原因之一在于, 实际中通常能够得到的数据是 Q 矩阵而不是转移概率矩阵 $P(t)$, 若唯一性不成立, 则多个过程对应到同一个速率矩阵, 对 Q 过程性质等问题的讨论将会麻烦许多. 为排除此类情形, 需要判断 Q 过程的唯一性. 跳过程唯一性问题既与 Q 矩阵保守与非保守相关, 也与 Q 矩阵所谓的零流出和零流入密切联系着.

给定 Q 矩阵 $Q=(q_{ij}: i,j\in\mathbb{Z}_+)$, 若对某个 (等价地, 对所有) $\lambda>0$, 方程

$$\lambda x_i=\sum_{j=0}^{\infty} q_{ij}x_j,\quad 0\leq x_i\leq 1,\ \ i\in\mathbb{Z}_+ \tag{1.1}$$

只有平凡解 (零解), 则称该 Q 矩阵是零流出的; 若对某个 (等价地, 对所有) $\lambda>0$, 方程

$$\lambda y_i=\sum_{j=0}^{\infty} y_j q_{ji},\quad y_i\geq 0,\ \ i\in\mathbb{Z}_+\quad 且\quad \sum_{i=0}^{\infty} y_i<\infty \tag{1.2}$$

只有平凡解, 则称该 Q 矩阵为零流入的.

众所周知, 方程 (1.1) 和方程 (1.2) 的解空间均与 λ 无关 (见文 [5, 第 91 页定理 2.37]), 故可以将解空间的维数分别记作 $\dim\mathscr{U}$ 及 $\dim\mathscr{V}$. 而 $\dim\mathscr{U}=0$ 即 Q 矩阵零流出, $\dim\mathscr{V}=0$ 即 Q 矩阵零流入; 类似地, $\dim\mathscr{U}=1$ 和 $\dim\mathscr{V}=1$ 分别称为 Q 矩阵单流出和单流入.

在 Q 矩阵决定的 Q 过程中, 满足 Kolmogorov 向后方程的称为 BQ 过程, 满足 Kolmogorov 向前方程的称为 FQ 过程. 由文 [5, 第 75 页定理 2.21]) 知, 最小 Q 过程总存在且既是 BQ 过程也是 FQ 过程. 由文 [5, 第 97 页定理 3.2] 知, BQ 过程唯一当且仅当 Q 矩阵零流出; 由文 [5, 第 101 页定理 3.6] 知, FQ 过程唯一当且仅当最小 Q 过程不中断或者 Q 矩阵零流入. 而关于 Q 过程唯一性, 一般性的结论可见文 [5, 第 102 页定理 3.8, 第 115 页定理 3.26].

流出和流入的判别还关系到最小过程的爆炸行为, 过程的构造理论和不变测度的问题等. 例如, 若某 Q 矩阵正则 (即 Q 矩阵保守且决定的 Q 过程唯一) 且零流入, 则 Q 矩阵的 μ 不变概率测度必是最小 Q 过程的 μ 不变概率测度 (见文 [7, 8]).

本文目的是, 对所谓的单生 Q 矩阵和单死 Q 矩阵分别给出其零流出或零流入的显式判别.

定义 1.1 对 Q 矩阵 $Q=(q_{ij}: i,j\in\mathbb{Z}_+)$, 若对所有 $i,j\in\mathbb{Z}_+$, $j\geq i+2$ 都有 $q_{ij}=0$, 且

$$N:=\sup\{i+1: q_{i,i+1}=0,\ i\in\mathbb{Z}_+\}=\inf\{i: \text{对 } k\geq i \text{ 都有 } q_{k,k+1}>0\}<\infty,$$

则称其为单生 Q 矩阵, 对应的 Q 过程称为单生 Q 过程. 当 $N\geq 1$ 时, 也称该 Q 矩阵 (或过程) 为带吸收边界的单生 Q 矩阵 (或过程).

若对所有 $i,j\in\mathbb{Z}_+$, $j\leq i-2$, 都有 $q_{ij}=0$, $q_{i,i-1}>0$, 则称其为单死 Q 矩阵, 对应的 Q 过程称为单死 Q 过程.

注意这里的 Q 矩阵可以是非保守的. 对无吸收边界的保守单生 Q 矩阵, 张建康 [12] 用概率方法在 1984 年首先给出了零流出的判别准则, 随后严士健和陈木法 [11] 在 1986 年给出该准则的分析证明, 1999 年陈木法 [6] 对带吸收边界的保守单生 Q 矩阵, 用同样的分析方法得到零流出的判别准则, 文 [5, 定理 3.16] 则是其简化证明. Chen 等在 2005 年用类似于文 [10] 中的分析方法, 研究了无吸收边界的保守单生 Q 矩阵零流出和保守单死 Q 矩阵零流入的判别准则, 并根据文 [3, 4, 9] 指出, 保守 Q 矩阵的正则和拟正则的判别可以归结为相应非保守情形下的零流出和单流入问题 (见文 [2, 第 5 节]), 并且给出了非保守生灭 Q 矩阵的零流出和零流入的判别. 本文的主要贡献则是将单生 Q 矩阵零流出和单死 Q 矩阵零流入的判别准则推广至非保守情形, 而且将保守和非保守两种情形下的判别相统一. 除此之外, 本文还统一处理了保守和非保守两种情形下带移民的单生 Q 矩阵零流出的判别问题.

对于单生 Q 矩阵, 不是零流出, 就是单流出; 对于单死 Q 矩阵, 不是零流入就是单流入. 自然地, 若得到零流入零流出的判别准则, 我们也就知晓了单生 Q 矩阵单流出和单死 Q 矩阵单流入的判别. 这依然是有意义的, 例如单流出与过程的构造有关, 而单流入联系于过程的拟正则性.

记 $c_i:=q_i-\sum_{j\neq i}q_{ij}$ 为 Q 矩阵在 i 点的非保守量. 主要结果如下.

定理 1.2 给定单生 Q 矩阵 $Q=(q_{ij}: i,j\in\mathbb{Z}_+)$. 定义 $q_n^{(k)}=\sum_{j=0}^k q_{nj}$ $(k<n)$, 则 Q 矩阵是零流出的 (等价地, BQ 过程唯一) 当且仅当 $R:=\sum_{n=N}^\infty m_n=\infty$, 其中

$$m_N=\frac{1}{q_{N,N+1}}(1+c_N+q_N^{(N-1)}),\quad m_n=\frac{1}{q_{n,n+1}}\left(1+c_n+q_n^{(N-1)}+\sum_{k=N}^{n-1}(c_n+q_n^{(k)})m_k\right),\quad n>N; \tag{1.3}$$

等价地, 当且仅当 $\widetilde{R}:=\sum_{n=N}^\infty \widetilde{m}_n=\infty$, 其中

$$\widetilde{m}_N=\frac{1}{q_{N,N+1}}(1+c_N+q_N^{(N-1)}),\quad \widetilde{m}_n=\frac{1}{q_{n,n+1}}\left(1+c_n+q_n^{(N-1)}+\sum_{k=N}^{n-1}q_n^{(k)}\widetilde{m}_k\right),\quad n>N. \tag{1.4}$$

定理 1.3 给定单死 Q 矩阵 $Q=(q_{ij}:i,j\in\mathbb{Z}_+)$. 定义 $\bar{q}_k^{(n)}=\sum_{j=n}^\infty q_{kj}$ $(n>k)$, 则 Q 矩阵是零流入的当且仅当 $\overline{R}:=\sum_{n=0}^\infty \overline{m}_n=\infty$, 其中

$$\overline{m}_0=0,\quad \overline{m}_n=\frac{1}{q_{n,n-1}}\left(1+\sum_{k=0}^{n-1}(c_k+\bar{q}_k^{(n)})\overline{m}_k\right),\quad n\geq 1.$$

若该 Q 矩阵非保守, 则 FQ 过程唯一当且仅当 $\overline{R}=\infty$.

下节给出了定理 1.2 的证明以及非保守生灭 Q 矩阵零流出的判别准则; 此外, 还统一处理了保守和非保守两种情形下带移民的单生 Q 矩阵的零流出判别问题, 定理 1.3 的详细证明和 (保守或者非保守) 生灭 Q 矩阵零流入的判别以及相关推论将在第 3 节给出.

2 单生 Q 矩阵的零流出

先证明定理 1.2, 再用其证明思想去处理 (可能非保守) 带移民的单生 Q 矩阵的相应问题.

定理 1.2 的证明 (a) 我们首先在扩大的状态空间 $\overline{\mathbb{Z}}_+:=\{-1,0,1,\dots\}$ 上定义一个新的带吸收边界的保守单生 Q 矩阵 $\widehat{Q}=(\hat{q}_{ij}:i,j\in\overline{\mathbb{Z}}_+)$ 如下

$$\hat{q}_{-1,j}=0,\quad j\in\overline{\mathbb{Z}}_+;\quad \hat{q}_{i,-1}=c_i,\quad \hat{q}_{ij}=q_{ij},\quad i,j\in\mathbb{Z}_+.$$

(b) 容易验证矩阵 Q 是零流出的当且仅当 $\widehat{Q}$ 是零流出的, 可见文 [5, 第 97 页定理 3.2] 的证明. 因此, 我们将状态空间 $\mathbb{Z}_+$ 上非保守单生 Q 矩阵零流出的判定转化成了扩大状态空间 $\overline{\mathbb{Z}}_+$ 上带吸收边界的保守单生 Q 矩阵零流出的判定.

(c) 由文 [5, 定理 3.16] 知, $\widehat{Q}$ 零流出 (等价地, Q 过程唯一) 当且仅当 $R:=\sum_{n=N}^\infty m_n=\infty$, 其中 m_n 由 (1.3) 定义, 从而第一个结论得证.

(d) 下面证明两个级数 $\sum_{n=N}^\infty \widetilde{m}_n$ 和 $\sum_{n=N}^\infty m_n$ 同敛散.

首先, 易知 $m_n\geq\widetilde{m}_n$ $(n\geq N)$. 因此, 若 $\sum_{n=N}^\infty\widetilde{m}_n=\infty$, 则 $\sum_{n=N}^\infty m_n=\infty$. 其次, 当 $\sum_{n=N}^\infty m_n=\infty$ 时, 若 $\sum_{n=N}^\infty\widetilde{m}_n<\infty$, 则存在充分大的正数 $N_0\geq N$, 使得对所有的 $n\geq N_0$,

$$M_n:=\sum_{k=N}^n m_k>1\quad 且\quad K:=2\sum_{k=N_0+1}^\infty\widetilde{m}_k<1,$$

由于 M_n 关于 n 单调递增至 ∞, 故对任意的 $n>N_0$, 可以通过归纳法证明

$$m_k\leq 2\widetilde{m}_kM_{n-1},\quad N\leq k\leq n. \tag{2.1}$$

事实上, 由 $m_N=\widetilde{m}_N$ 及 $M_{n-1}>1$ (注意此时 $n-1\geq N_0$) 知, $k=N$ 时结论 (2.1) 式成立. 假设直至 $\ell-1(<n)$ 结论 (2.1) 均成立, 则对于 $k=\ell(\leq n)$, 有

$$\begin{aligned}m_\ell&\leq\frac{1}{q_{\ell,\ell+1}}\left(1+c_\ell+q_\ell^{(N-1)}+\sum_{k=N}^{\ell-1}q_\ell^{(k)}2\widetilde{m}_kM_{n-1}+c_\ell M_{\ell-1}\right)\\&\leq\frac{1}{q_{\ell,\ell+1}}\left(1+c_\ell+q_\ell^{(N-1)}+\sum_{k=N}^{\ell-1}q_\ell^{(k)}\widetilde{m}_k\right)2M_{n-1}=2\widetilde{m}_\ell M_{n-1}.\end{aligned}$$

即 $k=\ell$ 时 (2.1) 式依然成立. 因此, 由归纳法知, 对任意的 $N\leq k\leq n$, (2.1) 式成立. 令 $L=\sum_{k=N}^{N_0}m_k$, 则对任意的 $n>N_0$, 有

$$M_n=L+\sum_{k=N_0+1}^n m_k\leq L+\sum_{k=N_0+1}^n 2\widetilde{m}_kM_{n-1}\leq L+KM_{n-1};$$

进一步

$$M_n \le L + LK + \cdots + LK^{n-N_0-1} + K^{n-N_0}M_{N_0} = \frac{L - LK^{n-N_0}}{1-K} + K^{n-N_0}M_{N_0}.$$

令 $n \to \infty$, 推出矛盾结论: $\infty \le L/(1-K)$. 因此 $\sum_{n=N}^{\infty} \widetilde{m}_n = \infty$. 至此, 证明了定理的第二个结论. 证毕.

由定理 1.2 可直接得到下面两个推论.

推论 2.1 给定单生 Q 矩阵 $Q = (q_{ij} : i, j \in \mathbb{Z}_+)$. 若

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1 + c_n + q_n^{(N-1)}}{q_{n,n+1}} = \infty,$$

特别地, 若 $\sup_n q_{n,n+1} < \infty$, 则该单生 Q 矩阵零流出. 若存在 $N_0 \ge N$, 使得当 $n \ge N_0$ 时, 都有 $q_n^{(n-1)} \ge q_{n,n+1}$, 则该 Q 矩阵亦零流出.

推论 2.2 给定生灭 Q 矩阵 $Q = (a_i, b_i, c_i : i \in \mathbb{Z}_+)$, 其中 $a_i := q_{i,i-1}$, $b_i := q_{i,i+1}$, $c_i := q_i - (a_i + b_i)$, 约定 $a_0 = 0$. 假定

$$b_i > 0, \quad i \ge N; \quad a_i > 0, \quad i \ge N+1,$$

此处 N 的意义见定义 1.1. 令

$$\mu_N = 1, \quad \mu_n = \frac{b_N b_{N+1} \cdots b_{n-1}}{a_{N+1} a_{N+2} \cdots a_n}, \quad n \ge N+1.$$

则该生灭 Q 矩阵零流出当且仅当

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{\mu_n b_n} \left(\sum_{k=N}^{n} \mu_k (1 + c_k) + \mu_N a_N \right) = \infty.$$

特别地, 当 $N = 0$ 时, 该生灭 Q 矩阵零流出当且仅当

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_n b_n} \sum_{k=0}^{n} \mu_k (1 + c_k) = \infty. \tag{2.2}$$

上面推论中 (2.2) 式处理的是无吸收边界 (可能非保守) 的生灭 Q 矩阵, 本质上由文 [2] 先获得该准则, 而后本文通讯作者用证明定理 1.2 的类似方法重新证明之, 见文 [13]. 这也是导致本文研究可能非保守单生或单死 Q 矩阵的原因之一: 推广非保守生灭矩阵的相关判别至单生或者单死 Q 矩阵.

为研究 (可能非保守) 带移民单生 Q 矩阵的零流出, 先考虑下面特殊的保守 Q 矩阵

$$q_0 = 0; \quad q_{12} > 0; \quad q_{i,i+1} > 0, \quad q_{ij} = 0, \quad i \ge 2, \quad j \ge i+2. \tag{2.3}$$

注意, 此处 0 为吸收态且 $q_{1j} \ge 0$ $(j \ge 3)$. 定义

$$F_n^{(n)} = 1, \quad F_n^{(i)} = \frac{1}{q_{n,n+1}} \sum_{k=i}^{n-1} q_n^{(k)} F_k^{(i)}, \quad 0 \le i < n. \tag{2.4}$$

引理 2.3 给定形如 (2.3) 中的保守 Q 矩阵 $Q = (q_{ij} : i, j \in \mathbb{Z}_+)$, 对任意取定的正整数 $J \ge 2$, 递归地定义数列

$$\widehat{m}_J^{(J)} = \frac{1}{q_{J,J+1}} \big(1 + q_J^{(J-1)}\big), \quad \widehat{m}_n^{(J)} = \frac{1}{q_{n,n+1}} \left(1 + q_n^{(J-1)} + \sum_{k=J}^{n-1} q_n^{(k)} \widehat{m}_k^{(J)}\right), \quad n > J.$$

再定义

$$\widehat{m}_1^{(1)} = \frac{1}{q_1}, \quad \widehat{m}_n^{(1)} = \frac{1}{q_{n,n+1}}\left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} q_n^{(k)} \widehat{m}_k^{(1)}\right), \quad n \ge 2, \tag{2.5}$$

则级数 $\sum_{n=J}^{\infty} \widehat{m}_n^{(J)}$ 的敛散性与 J 无关, 即级数 $\sum_{n=J}^{\infty} \widehat{m}_n^{(J)}$ $(J \ge 1)$ 同敛散.

证明 记 $R_J := \sum_{n=J}^{\infty} \widehat{m}_n^{(J)}$. 只需证明对任意 $J \ge 1$, 有 $R_J < \infty$ 等价于 $R_{J+1} < \infty$. 首先, 由 $\widehat{m}_n^{(J)}$ 的定义得出

$$\widehat{m}_n^{(J+1)} - \widehat{m}_n^{(J)} = \frac{1}{q_{n,n+1}}\left(q_{nJ} - q_n^{(J)} \widehat{m}_J^{(J)} + \sum_{k=J+1}^{n-1} q_n^{(k)} (\widehat{m}_k^{(J+1)} - \widehat{m}_k^{(J)})\right), \quad n > J \ge 2;$$

$$\widehat{m}_n^{(2)} - \widehat{m}_n^{(1)} = \frac{1}{q_{n,n+1}}\left(q_n^{(1)} - q_n^{(1)} \widehat{m}_1^{(1)} + \sum_{k=2}^{n-1} q_n^{(k)} (\widehat{m}_k^{(2)} - \widehat{m}_k^{(1)})\right), \quad n \ge 2.$$

再由 (2.4) 和 $\widehat{m}_n^{(J)}$ 的定义并结合上面两式, 不难用归纳法证明以下性质

$$-\widehat{m}_n^{(J+1)} \widehat{m}_J^{(J)} \le \widehat{m}_n^{(J+1)} - \widehat{m}_n^{(J)} \le F_n^{(J)}, \quad n > J \ge 1,$$

以及

$$F_k^{(K)} \le \widehat{m}_k^{(K)} / \widehat{m}_K^{(K)}, \quad k \ge K \ge 1.$$

从而

$$\frac{\widehat{m}_n^{(J)}}{1 + \widehat{m}_J^{(J)}} \le \widehat{m}_n^{(J+1)} \le \left(1 + \frac{1}{\widehat{m}_J^{(J)}}\right) \widehat{m}_n^{(J)}, \quad n > J \ge 1.$$

由此即知 $R_J < \infty$ 等价于 $R_{J+1} < \infty$. 证毕.

定理 2.4 对形如 (2.3) 中的保守 Q 矩阵 $Q = (q_{ij} : i, j \in \mathbb{Z}_+)$, Q 矩阵是零流出的 (等价地, Q 过程唯一) 当且仅当 $\widehat{R} := \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{m}_n = \infty$, 其中 $\widehat{m}_n$, 即 (2.5) 中所定义的 $\widehat{m}_n^{(1)}$, 亦即

$$\widehat{m}_1 = \frac{1}{q_1}, \quad \widehat{m}_n = \frac{1}{q_{n,n+1}}\left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} q_n^{(k)} \widehat{m}_k\right), \quad n \ge 2. \tag{2.6}$$

证明 对此保守 Q 矩阵, 零流出亦即方程

$$(\lambda + q_i) u_i = \sum_{j \ne i} q_{ij} u_j, \quad u_i \ge 0, \quad i \in \mathbb{Z}_+$$

对某个 (等价地, 对所有) $\lambda > 0$ 的非平凡解无界. 由此 Q 矩阵的特点知, $u_0 = 0$. 若 $u_1 = 0$, 则 $u_i \equiv 0$ $(i \ge 2)$. 结合上式, 该 Q 矩阵零流出即方程

$$(\lambda + q_i) u_i = \sum_{j \ne i} q_{ij} u_j, \quad u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad u_i \ge 0, \quad i \in \mathbb{Z}_+ \tag{2.7}$$

对某个 (等价地, 对所有) $\lambda > 0$ 的解无界.

下面我们分三步来证明定理结论.

(a) 对任意 $\lambda > 0$, 证明必存在 $I \ge 2$, 使得方程 (2.7) 的解 $\{u_i\}_I^{\infty}$ 关于 i 严格单调增.

事实上, 此时方程 (2.7) 化为 $u_0 = 0, \ u_1 = 1$, 且

$$(\lambda + q_1) u_1 = \sum_{i=2}^{\infty} q_{1i} u_i, \quad q_{i,i+1}(u_{i+1} - u_i) = \sum_{j=0}^{i-1} q_i^{(j)} (u_{j+1} - u_j) + \lambda u_i, \quad i \ge 2. \tag{2.8}$$

取定常数 $C \in [1, 1+\lambda/q_1)$, 则由 $u_1 = 1$ 及 (2.7) 得出

$$\sum_{i=2}^{\infty} q_{1i} u_i = \lambda + q_1 > C q_1 \geq \sum_{i=2}^{\infty} C q_{1i}.$$

故存在 $i \geq 2$, 使得 $u_i > C$. 记 $I := \min\{i \geq 2 : u_i > C\}$. 下面用归纳法来证明解 $\{u_i\}_I^{\infty}$ 的严格单调增性. 首先, 由 I 的定义知 $u_i \leq C < u_I \, (0 \leq i \leq I-1)$, 而由 (2.8) 知

$$q_{I,I+1}(u_{I+1} - u_I) = \sum_{j=0}^{I-1} q_{Ij}(u_I - u_j) + \lambda u_I,$$

故 $u_I < u_{I+1}$. 其次, 假设 $\{u_i\}_I^n$ 严格单调增, 结合 (2.8) 可得到

$$q_{n,n+1}(u_{n+1} - u_n) > \sum_{j=0}^{I-1} q_n^{(j)}(u_{j+1} - u_j) = \sum_{i=0}^{I-1} q_{ni}(u_I - u_i) \geq 0,$$

故 $u_n < u_{n+1}$. 因此由归纳法知 $\{u_i\}_I^{\infty}$ 关于 i 是严格单调增的.

(b) 以下不妨取定 $\lambda = 1$. 定义

$$\widetilde{m}_n = \frac{1}{q_{n,n+1}} \left(1 + q_n^{(I-1)} + \sum_{k=I}^{n-1} q_n^{(k)} \widetilde{m}_k \right), \quad n \geq I.$$

关于 $n \geq I$ 归纳, 容易证明

$$F_n^{(I)} \leq q_{I,I+1} \widetilde{m}_n, \quad n \geq I. \tag{2.9}$$

下面证明方程 (2.7) 的解满足

$$(u_I - C)\widetilde{m}_n < u_{n+1} - u_n < (u_{I+1} - u_I) F_n^{(I)} + u_n \widetilde{m}_n, \quad n \geq I. \tag{2.10}$$

首先, 由 (2.8) 知

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{q_{n,n+1}} \left(\sum_{i=0}^{I-1} q_{ni}(u_I - u_i) + \sum_{i=I}^{n-1} q_n^{(i)}(u_{i+1} - u_i) + u_n \right), \quad n \geq I. \tag{2.11}$$

所以, 当 $n = I$ 时, 显然有 $u_{I+1} - u_I < (u_{I+1} - u_I) F_I^{(I)} + u_I \widetilde{m}_I$, 再由 (2.11) 式得到

$$u_{I+1} - u_I = \frac{1}{q_{I,I+1}} \left(\sum_{i=0}^{I-1} q_{Ii}(u_I - u_i) + u_I \right) > (u_I - C) \frac{q_I^{(I-1)} + 1}{q_{I,I+1}} = (u_I - C)\widetilde{m}_I.$$

假设直至 $n-1$ 时 (2.10) 式都成立. 则由 (2.11) 式及假设, 一方面可得

$$u_{n+1} - u_n \geq \frac{1}{q_{n,n+1}} \left(q_n^{(I-1)}(u_I - C) + (u_I - C) \sum_{i=I}^{n-1} q_n^{(i)} \widetilde{m}_i + u_n \right) > (u_I - C)\widetilde{m}_n.$$

另一方面可知

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &< \frac{1}{q_{n,n+1}} \left(q_n^{(I-1)} u_I + (u_{I+1} - u_I) \sum_{i=I}^{n-1} q_n^{(i)} F_i^{(I)} + \sum_{i=I}^{n-1} q_n^{(i)} \widetilde{m}_i u_i + u_n \right) \\ &< (u_{I+1} - u_I) F_n^{(I)} + \frac{u_n}{q_{n,n+1}} \left(1 + q_n^{(I-1)} + \sum_{i=I}^{n-1} q_n^{(i)} \widetilde{m}_i \right) \\ &= (u_{I+1} - u_I) F_n^{(I)} + u_n \widetilde{m}_n. \end{aligned} \tag{2.12}$$

故由归纳法证得 (2.10) 式.

(c) 现在证明方程 (2.7) 的解 (u_i) 无界当且仅当 $\widehat{R}=\infty$.

实际上, 若 (u_i) 有界, 则由 (a) 知 $u_\infty := \lim_{n\to\infty} u_n < \infty$. 再由 (2.10), 我们有

$$\widetilde{R} := \sum_{k=I}^{\infty} \widetilde{m}_k \le \frac{1}{u_I - C} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=I}^{n} (u_{k+1}-u_k) = \frac{u_\infty - u_I}{u_I - C} < \infty.$$

注意到 $\widehat{R}, \widetilde{R}$ 即是引理 2.3 中的 R_1, R_I. 故由引理 2.3 可知 $\widehat{R}<\infty$.

反之, 设 $\widehat{R}<\infty$. 由引理 2.3 知, 对一切 $K\ge 1$ 有 $R_K<\infty$. 故 $\widetilde{R}<\infty$. 由于 $u_\infty = u_I \prod_{k=I}^{\infty} u_{k+1}/u_k$ 且 $u_{k+1}/u_k > 1\,(k\ge I)$, 故可知 $\prod_{k\ge I} u_{k+1}/u_k$ 与级数 $\sum_{k\ge I} \log(u_{k+1}/u_k)$ 同敛散 (当 $u_{k+1}/u_k \to 1$ 时), $\sum_{k\ge I}\log(u_{k+1}/u_k)$ 又与 $\sum_k (u_{k+1}/u_k - 1)$ 同敛散. 其次, 注意到 $u_n > C \ge 1\,(n\ge I)$, 由 (2.9) 和 (2.10) 可得

$$0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \le \frac{(u_{I+1}-u_I)F_n^{(I)}}{u_n} + \widetilde{m}_n < (1 + q_{I,I+1}(u_{I+1}-u_I))\widetilde{m}_n, \quad n \ge I.$$

综合以上事实, 推出 $u_\infty<\infty$, 即 (u_i) 有界. 由此立即推出定理结论成立.

注 2.5 (1) 当 $q_{1j}=0$ $(j\ge 3)$ 时, 该 Q 矩阵退化为 0 点为吸收点 (即定义 1.1 中 $N=1$) 的保守单生 Q 矩阵, 也即具有定理 1.2 的证明中构造的 $\widehat{Q}$ 形式. 此时该定理证明中的 C 取为 0, 证明方法可归结为文 [5, 定理 3.16] 的方法.

(2) 定理 2.4 的证明中 C 的作用在于排除 Q 矩阵第一行中 q_{1j} $(j\ge 3)$ 不全为零 (即确实有移民) 带来的困扰. 理论上, 若 Q 矩阵中前面有限行是非单生矩阵形式, 例如, $q_{2j} (j\ge 4)$ 不全为零时, 该方法仍然是有效的. 此外, 该证法的思想来源于文 [14].

现在, 我们研究如下带移民单生 Q 矩阵:

$$q_{01}>0, \quad q_{0k}\ge 0, \quad k\ge 2; \quad q_{i,i+1}>0, \quad q_{ij}=0, \quad i\ge 1,\ j\ge i+2.$$

依然记在 i 点的非保守量

$$c_i = q_i - \sum_{k\ne i} q_{ik} \ge 0, \quad i \ge 0.$$

注意: 当任意 $k\ge 2$ 均有 $q_{0k}=0$ 时, 则该 Q 矩阵退化为一般的单生 Q 矩阵, 对应于定义 1.1 中的 $N=0$. 下面定理中我们部分沿用了前面所用的符号, 因为这些符号在不同类型的 Q 矩阵中地位相同, 只是形式可能不同.

定理 2.6 对上述 (可能非保守) 带移民单生 Q 矩阵 $Q=(q_{ij}: i,j\in\mathbb{Z}_+)$, 则 Q 矩阵是零流出的当且仅当 $R := \sum_{n=0}^{\infty} m_n = \infty$, 其中

$$m_0 = \frac{1}{q_0}, \quad m_n = \frac{1}{q_{n,n+1}}\left(1 + \sum_{k=0}^{n-1} (c_n + q_n^{(k)}) m_k\right), \quad n\ge 1.$$

等价地, $\widetilde{R} := \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{m}_n = \infty$, 其中

$$\widetilde{m}_0 = \frac{1}{q_0}, \quad \widetilde{m}_n = \frac{1}{q_{n,n+1}}\left(1 + c_n + \sum_{k=0}^{n-1} q_n^{(k)} \widetilde{m}_k\right), \quad n\ge 1.$$

证明 首先在扩大的状态空间 $\overline{\mathbb{Z}}_+ := \{-1,0,1,\ldots\}$ 上定义一个新的 -1 为吸收态的保守 Q 矩阵 $\widehat{Q}=(\hat{q}_{ij}: i,j\in\overline{\mathbb{Z}}_+)$ 如下

$$\hat{q}_{-1,j}=0, \quad j\in\overline{\mathbb{Z}}_+; \quad \hat{q}_{i,-1}=c_i, \quad \hat{q}_{ij}=q_{ij}, \quad i,j\in\mathbb{Z}_+.$$

我们熟知, 矩阵 Q 是零流出的当且仅当 $\widehat{Q}$ 是零流出的. 而 $\widehat{Q}$ 正是形如 (2.3) 的保守 Q 矩阵, 由定理 2.4 知, Q 零流出当且仅当 $\widehat{Q}$ 零流出, 亦即当且仅当 $\sum_{n=0}^{\infty} m_n = \infty$.

至于级数 $\sum_{n=0}^{\infty} m_n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{m}_n$ 的同敛散性, 类似定理 1.2 证明. 为了便于阅读, 我们给出详细证明: 首先, 易知 $m_n \geq (m_0 \wedge 1)\widetilde{m}_n\,(n \geq 0)$. 因此, 若 $\sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{m}_n = \infty$, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} m_n = \infty$; 其次, 当 $\sum_{n=0}^{\infty} m_n = \infty$ 时, 若 $\sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{m}_n < \infty$, 则存在充分大的正数 N_0, 使得对所有的 $n \geq N_0$,

$$M_n := \sum_{k=0}^{n} m_k > 1 \quad 且 \quad K := \sum_{k=N_0+1}^{\infty} \widetilde{m}_k < 1.$$

由于 M_n 关于 n 单调递增至 ∞, 故对任意的 $n > N_0$, 可以通过归纳法证明

$$m_k \leq \widetilde{m}_k M_{n-1}, \quad 0 \leq k \leq n. \tag{2.13}$$

事实上, 由 $m_0 = \widetilde{m}_0$ 及 $M_{n-1} > 1$ (注意此时 $n-1 \geq N_0$) 知, $k=0$ 时结论 (2.13) 式成立. 假设直至 $\ell-1(<n)$ 结论 (2.13) 均成立, 则对于 $k=\ell(\leq n)$, 有

$$\begin{aligned} m_\ell &\leq \frac{1}{q_{\ell,\ell+1}}\left(1 + \sum_{k=0}^{\ell-1} q_\ell^{(k)} \widetilde{m}_k M_{n-1} + c_\ell M_{\ell-1}\right) \\ &\leq \frac{1}{q_{\ell,\ell+1}}\left(1 + c_\ell + \sum_{k=0}^{\ell-1} q_\ell^{(k)} \widetilde{m}_k\right) M_{n-1} = \widetilde{m}_\ell M_{n-1}. \end{aligned}$$

即 $k=\ell$ 时 (2.13) 式依然成立. 因此, 由归纳法知, 对任意的 $0 \leq k \leq n$, (2.13) 式成立. 令 $L = \sum_{k=0}^{N_0} m_k$, 则对任意的 $n > N_0$, 有

$$M_n = L + \sum_{k=N_0+1}^{n} m_k \leq L + \sum_{k=N_0+1}^{n} \widetilde{m}_k M_{n-1} \leq L + K M_{n-1};$$

进一步

$$M_n \leq L + LK + \cdots + LK^{n-N_0-1} + K^{n-N_0} M_{N_0} = \frac{L - LK^{n-N_0}}{1-K} + K^{n-N_0} M_{N_0}.$$

令 $n \to \infty$, 推出矛盾结论: $\infty \leq L/(1-K)$. 因此

$$\sum_{n=N}^{\infty} \widetilde{m}_n = \infty.$$

至此, 证明了两个级数同敛散.

3 单死 Q 矩阵的零流入

本节将详细证明定理 1.3, 并给出 (保守或者非保守) 生灭 Q 矩阵零流入的判别准则. 最后还将求出单死 Q 矩阵的唯一不变测度.

定理 1.3 的证明 在方程 (1.2) 中, 令 $\lambda = 1$, 则

$$(1+q_i)y_i = \sum_{j=0}^{i-1} y_j q_{ji} + y_{i+1} q_{i+1,i}, \quad i \geq 0.$$

两边求和得

$$\sum_{i=0}^{n}(1+q_i)y_i = \sum_{j=0}^{n-1} y_j(\bar{q}_j^{(j+1)} - \bar{q}_j^{(n+1)}) + \sum_{i=1}^{n+1} y_i q_{i,i-1}, \quad n \geq 0.$$

进而有

$$\sum_{i=0}^{n}(1+c_i+\bar{q}_i^{(i+1)})y_i=\sum_{j=0}^{n-1}y_j(\bar{q}_j^{(j+1)}-\bar{q}_j^{(n+1)})+y_{n+1}q_{n+1,n},\quad n\geq 0.$$

由于 Q 矩阵可以是非保守的, 不妨假定 $q_{0,-1}=0$, 则

$$\sum_{i=0}^{n}(1+c_i)y_i+\bar{q}_n^{(n+1)}y_n+\sum_{j=0}^{n-1}y_j\bar{q}_j^{(n+1)}=y_{n+1}q_{n+1,n},\quad n\geq 0.$$

由此可得

$$y_{n+1}=\frac{1}{q_{n+1,n}}\sum_{i=0}^{n}(1+c_i+\bar{q}_i^{(n+1)})y_i,\quad n\geq 0, \tag{3.1}$$

故当 $y_0=0$ 时, $y_i\equiv 0$, 即 $y=(y_i:i\in\mathbb{Z}_+)$ 成为方程 (1.2) 的平凡解 (零解). 因此, 考虑方程

$$\lambda y_i=\sum_{j=0}^{\infty}y_jq_{ji},\quad y_0=1,\quad y_i\geq 0,\quad i\in\mathbb{Z}_+ \tag{3.2}$$

的解 $y=(y_i:i\in\mathbb{Z}_+)$. 只需验证 $\sum_{n=0}^{\infty}y_n=\infty$ 当且仅当 $\overline{R}=\sum_{n=0}^{\infty}\overline{m}_n=\infty$.

为此, 定义 $\sigma_n=\sum_{i=0}^{n}y_i$. 可以证明

$$\overline{m}_{n+1}\leq\sigma_{n+1}-\sigma_n(=y_{n+1})\leq(1+c_0+\bar{q}_0^{(1)})\sigma_n\overline{m}_{n+1},\quad n\geq 0. \tag{3.3}$$

事实上, 注意到

$$\overline{m}_1=1/q_{10},\quad \sigma_1-\sigma_0=(1+c_0+\bar{q}_0^{(1)})/q_{10},\quad \sigma_0=y_0=1,$$

则上式对 $n=0$ 成立. 假设直至 $n-1$ 时 (3.3) 式成立. 由 $y_0=1>0=\overline{m}_0$ 及 (3.1) 式知

$$\begin{aligned}\sigma_{n+1}-\sigma_n&=\frac{1}{q_{n+1,n}}\left(\sigma_n+\sum_{i=0}^{n}(c_i+\bar{q}_i^{(n+1)})y_i\right)\\&\geq\frac{1}{q_{n+1,n}}\left(1+\sum_{i=0}^{n}(c_i+\bar{q}_i^{(n+1)})\overline{m}_i\right)=\overline{m}_{n+1},\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}\sigma_{n+1}-\sigma_n&\leq\frac{1}{q_{n+1,n}}\left(\sigma_n+c_0+\bar{q}_0^{(n+1)}+(1+c_0+\bar{q}_0^{(1)})\sum_{i=1}^{n}(c_i+\bar{q}_i^{(n+1)})\sigma_{i-1}\overline{m}_i\right)\\&\leq\frac{1}{q_{n+1,n}}\left(\sigma_n+c_0+\bar{q}_0^{(1)}+(1+c_0+\bar{q}_0^{(1)})\sigma_{n-1}\sum_{i=0}^{n}(c_i+\bar{q}_i^{(n+1)})\overline{m}_i\right)\\&\leq\frac{(1+c_0+\bar{q}_0^{(1)})\sigma_n}{q_{n+1,n}}\left(1+\sum_{i=0}^{n}(c_i+\bar{q}_i^{(n+1)})\overline{m}_i\right)\\&=(1+c_0+\bar{q}_0^{(1)})\sigma_n\overline{m}_{n+1}.\end{aligned}$$

故对于 n, (3.3) 式成立. 因此, 由数学归纳法知, 对任意的 $n\geq 0$ 有 (3.3) 式成立.

若 $\sum_{n=0}^{\infty}y_n<\infty$, 则由 (3.3) 及 $\overline{m}_0=0<1=y_0$ 知

$$\sum_{n=0}^{\infty}\overline{m}_n\leq\sum_{n=0}^{\infty}y_n<\infty.$$

反过来, 若 $\sum_{n=0}^{\infty}\overline{m}_n<\infty$, 由 $\sigma_{n+1}/\sigma_n\ge 1\ (n\ge 0)$, 可知当 $\sigma_{n+1}/\sigma_n\to 1$ 时, 级数 $\prod_n\sigma_{n+1}/\sigma_n$, $\sum_n\log(\sigma_{n+1}/\sigma_n)$ 以及 $\sum_n(\sigma_{n+1}/\sigma_n-1)$ 同敛散. 而由 (3.3) 式知

$$0\le\frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_n}-1\le(1+c_0+\bar{q}_0^{(1)})\bar{m}_{n+1},\quad n\ge 0.$$

再由 $\sum_{n=0}^{\infty}\overline{m}_n<\infty$, 可得到 $\prod_{n=0}^{\infty}\sigma_{n+1}/\sigma_n<\infty$. 从而

$$\sum_{n=0}^{\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\lim_{n\to\infty}\prod_{i=0}^{n-1}\frac{\sigma_{i+1}}{\sigma_i}=\prod_{i=0}^{\infty}\frac{\sigma_{i+1}}{\sigma_i}<\infty.$$

至此, 结论第一部分得证. 再结合文 [5, 定理 3.6], 直接推出结论第二部分. 证毕.

注 3.1 定义

$$\check{m}_0=1,\quad \check{m}_n=\frac{1}{q_{n,n-1}}\left(1+\sum_{k=0}^{n-1}(c_k+\bar{q}_k^{(n)})\check{m}_k\right),\quad n\ge 1,$$

则以 $\check{m}_n$ 代替 $\overline{m}_n$ 时, 定理 1.3 仍然成立. 事实上, 容易验证 $\overline{m}_0\le\check{m}_0$, 以及

$$\overline{m}_n\le\check{m}_n\le(1+c_0+\bar{q}_0^{(1)})\overline{m}_n,\quad n\ge 1.$$

因此, $\sum_{n=0}^{\infty}\overline{m}_n=\infty$ 当且仅当 $\sum_{n=0}\check{m}_n=\infty$.

关于单死 Q 矩阵的零流入, 由定理 1.3 可直接得到如下两个推论.

推论 3.2 给定单死 Q 矩阵 $Q=(q_{ij}:i,j\in\mathbb{Z}_+)$. 若 $\sum_{n=1}^{\infty}q_{n,n-1}^{-1}=\infty$, 特别地, 若 $\sup_{n\ge 1}q_{n,n-1}<\infty$, 则该单死 Q 矩阵零流入. 若存在 $n_0\ge 1$, 使得当 $n\ge n_0$, 都有

$$c_{n-1}+\bar{q}_{n-1}^{(n)}\ge q_{n,n-1}$$

成立, 则该 Q 矩阵亦零流入.

推论 3.3 给定生灭 Q 矩阵 $Q=(a_i,b_i,c_i:i\in\mathbb{Z}_+)$, 其中

$$b_i:=q_{i,i+1}>0,\quad i\ge 0;\quad a_i:=q_{i,i-1}>0,\quad i\ge 1;\quad c_i:=q_i-(a_i+b_i)\ge 0,\quad i\ge 0.$$

约定 $a_0=0$, 则该生灭 Q 矩阵零流入当且仅当 $\sum_{n=0}^{\infty}\overline{m}_n=\infty$, 其中

$$\overline{m}_0=0,\quad \overline{m}_1=\frac{1}{a_1},\quad \overline{m}_n=\frac{q_{n-1}}{a_n}\overline{m}_{n-1}-\frac{b_{n-2}}{a_n}\overline{m}_{n-2},\quad n\ge 2.$$

特别地, 若 $c_i=0$ 对于 $i\ge 0$ 均成立, 则 Q 矩阵零流入当且仅当

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mu_n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\mu_k a_k}=\infty.\tag{3.4}$$

比较 (2.2) 与 (3.4) 式, 可知保守生灭过程的零流出和零流入是互为 "对偶" 的 [1]. 另外, 上面推论中关于非保守的生灭 Q 矩阵零流入判别, 本质上由文 [2] 先获得该准则. 作为本文的结束, 最后给出如下定理及其证明.

定理 3.4 给定单死 Q 矩阵 $Q=(q_{ij}:i,j\in\mathbb{Z}_+)$, 则该 Q 矩阵有唯一不变测度 (μ_i) 如下

$$\mu_0=1,\quad \mu_n=\frac{1}{q_{n,n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}(c_k+\bar{q}_k^{(n)})\mu_k,\quad n\ge 1,\tag{3.5}$$

其中 $\bar{q}_k^{(n)}$ 为定理 2.4 中所定义. 进一步, 该 Q 矩阵有唯一不变概率测度 (π_i) 当且仅当 $\mu:=\sum_{n=0}^{\infty}\mu_n<\infty$, 此时 $\pi_i=\mu_i/\mu$.

证明 由方程 $\mu Q=0$, 可知

$$q_i\mu_i=\sum_{j=0}^{i-1}\mu_j q_{ji}+\mu_{i+1}q_{i+1,i},\quad i\ge 0.$$

两边求和得到

$$\sum_{i=0}^{n}q_i\mu_i=\sum_{j=0}^{n-1}\mu_j(\bar{q}_j^{(j+1)}-\bar{q}_j^{(n+1)})+\sum_{i=0}^{n}\mu_{i+1}q_{i+1,i},\quad n\ge 0.$$

进而

$$\sum_{i=0}^{n}(c_i+\bar{q}_i^{(i+1)})\mu_i=\sum_{j=0}^{n-1}\mu_j(\bar{q}_j^{(j+1)}-\bar{q}_j^{(n+1)})+\mu_{n+1}q_{n+1,n},\quad n\ge 0.$$

由此推出

$$\mu_{n+1}=\frac{1}{q_{n+1,n}}\sum_{i=0}^{n}(c_i+\bar{q}_i^{(n+1)})\mu_i,\quad n\ge 0.$$

故可按 (3.5) 取定 (μ_i), 所以, 在相差一个常数因子的意义下得到该 Q 矩阵的唯一不变测度. 后一结论显然.

致谢 感谢陈木法在本文的完成过程中所给予的帮助, 同时感谢审稿人的宝贵意见和建议.

参 考 文 献

[1] Anderson W. J., Continuous-Time Markov Chains, Springer-Verlag, New York, 1991.

[2] Chen A. Y., Pollett P., Zhang H. J., et al., Uniqueness criteria for continuous-time Markov chains with general transition structure, *Adv. Appl. Probab.*, 2005, **37**(4): 1056–1074.

[3] Chen A. Y., Renshaw E., Existence and Uniqueness criterion for conservative uni-instantaneous denumerable Markov processes, *Probab. Theory Related Fields*, 1993, **94**: 427–456.

[4] Chen A. Y., Renshaw E., Markov branching process with instantaneous immigration, *Probab. Theory Related Fields*, 1990, **87**: 204–240.

[5] Chen M. F., From Markov Chains to Non-Equilibrium Particle Systems, World Scientific, Singapore, 2004.

[6] Chen M. F., Single birth processes, *Chinese Ann. Math.*, 1999, **20B**: 77–82.

[7] Hart A. G., Pollett P. K., Direct Analytical Methods for Determining Quasistationary Distributions for Continuous-time Markov Chains, In Athens Conference on Applied Probability and Time Series Analysis (Lecture Notes Statist 114), eds. Heyde C. C. et al., Springer, New York, 1996, **1**: 116–126.

[8] Hart A. G., Pollett P. K., New methods for determining quasistationary distributions for Markov chains, *Math. Computer Modeling*, 2000, **31**: 143–150.

[9] Hou Z. T., Guo Q. F., Homogeneous Denumerable Markov Process, Springer, Berlin, 1988.

[10] Reuter G. E. H., Denumerable Markov processes and the associtaed construction semigroup on l, *Acta Math.*, 1976, **97**: 1–46.

[11] Yan S. J., Chen M. F., Multidimensional Q-processes, *Chinese Ann. Math.*, 1986, **7**B: 90–110.

[12] Zhang J. K., On the generalized birth and death processes (I), *Acta Math. Sci.*, 1984, **4**: 241–259.

[13] Zhang Y. H., Birth-death-catastrophe type single birth Q-matrices (in Chinese), *J. Beijing Normal Univ.*, 2011, **47**(4): 347–350.

[14] Zhang Y. H., Zhao Q. Q., Single birth processes with immigration, *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series*, 2010, **53**(5): 833–846.