双边吸收边界生灭过程的特征值估计*

张 驰 张余辉
(北京师范大学数学科学学院，数学与复杂系统教育部重点实验室，100875，北京)

摘要 用对偶方法给出双边吸收边界生灭过程第一特征值的精确 II 算子，进而给出该特征值的变分公式、显式估计和逼近定理.

关键词 生灭过程；吸收边界；第一特征值；对偶；变分公式

0 引言

马氏半群算子的第一特征值估计问题是概率论研究中的重要课题，它与半群的收敛速度密切相关，参看文献[1-2]. 在文献[3]中，根据边界的类型(反射或吸收)，分 4 种情况对生灭过程的第一非平凡特征值作了研究和估计. 本文是对双边吸收边界生灭过程(简称为 DD 生灭过程)的特征值估计进行进一步研究，是其工作的继续和补充.

考虑如下连续时间生灭矩阵 Q，其中状态空间 $E=\{i:1\leqslant i<N+1\}$ $(N\leqslant\infty)$，死速 $a_i>0$，生速 $b_i>0$ $(1\leqslant i<N+1)$. 易见当 $N<\infty$ 时，则点 0 和 $N+1$ 可看作是 2 个吸收边界，即 Dirichlet 边界. 定义

$$\mu_1=1,\ \mu_i=\frac{b_1b_2\cdots b_{i-1}}{a_2a_3\cdots a_i},\ 2\leqslant i<N+1,\quad(1)$$

$$\nu_0=\frac{1}{\mu_1a_1},\ \nu_i=\frac{1}{\mu_ib_i},\ 1\leqslant i<N+1,\quad(2)$$

$$\varphi_i=\sum_{j=i}^{N}\nu_j,\ 0\leqslant i<N+1.\quad(3)$$

假设 $\varphi_0=\sum_{j=0}^{N}\nu_j<\infty$. 由文献[1]或[4]知，当 $N=\infty$ 时，以 Q 为生成矩阵的生灭过程并不唯一，但在这里我们只考虑最小过程，则由文献[3]知，此时 0 和 ∞ 可看作 2 个吸收边界.

下面考虑最小过程 $P(t)=(p_{ij}(t))$ 所对应的 Hilbert 空间 $L^2(\mu,E)$ 上的最小狄氏型 $(D,\mathrm{D}(D))$. 令 K 为 E 上所有有限支撑函数的集合，则

$$D(f)=\begin{cases}\sum_{k=1}^{\infty}\mu_ka_k(f_k-f_{k-1})^2, & \text{当 } N=\infty \text{ 时；}\\ \sum_{k=1}^{N}\mu_ka_k(f_k-f_{k-1})^2+\mu_Nb_Nf_N{}^2, & \\ \qquad\text{当 } N<\infty \text{ 时，} & \end{cases}$$

且 $\mathrm{D}(D)$ 为 K 在范数 $\|\cdot\|_D(\|f\|_D:=\mu(f^2)+D(f))$ 下的闭包. 注意这里 $f_0:=0$. 定义

$$\lambda_0=\inf\{D(f):\mu(f^2)=1,\ f\in\mathrm{K}\}=\inf\{D(f):\mu(f^2)=1,\ f\in\mathrm{D}(D)\}.\quad(4)$$

此即为狄氏型 $(D,\mathrm{D}(D))$ 下的第一特征值，由文献[3]的命题 1.2 知，它正是 $P(t)$ 的指数衰减速度

$$\alpha^*:=\inf\{\alpha:|p_{ij}(t)-0|=O(\exp[-\alpha t])(t\to\infty)\ \text{对任意}\ i,j\in E\}.$$

本文的目的是要估计特征值 λ_0. 事实上，陈木法在文献[3]中已经进行了详细研究. 首先，他给出了一显式估计量 κ 并证明 $(4\kappa)^{-1}\leqslant\lambda_0\leqslant\kappa^{-1}$. 另外还证明了下面引理 1[3].

引理 1 定义 Q 的对偶生灭矩阵 $\hat{Q}$ 如下：

$$\hat{b}_i=a_{i+1},\ 0\leqslant i<N+1;$$
$$\hat{a}_i=b_i,\ 1\leqslant i<N+1.$$

则 $\lambda_0=\hat{\lambda}_1$，其中 $\hat{\lambda}_1$ 为 $\hat{Q}$ 所对应的最大狄氏型下的第一非平凡特征值.

根据此引理，便可用文献[3]中对 $\hat{\lambda}_1$ 的估计来估计 λ_0，其中包括显式估计、变分公式和逼近定理. 由其显式估计可得一显式估计量 δ 使得 $(4\delta)^{-1}\leqslant\lambda_0\leqslant a_1\varphi_0\delta^{-1}$，但这里并不像文献[3]中对单边吸收边界生灭过程的显式估计那样优越，右端系数与 $a_1\varphi_0$ 有关，即 λ_0 上界不能由 δ^{-1} 的常数倍控制. 另外用其逼近序列也可逼近 λ_0，但此逼近序列所用的 II 算子并不是 $\hat{\lambda}_1$ 的精确 II 算子，或者说逼近函数还不够优越，逼近序列可以改进. 这里所谓 II 算子精确是指 $\hat{\lambda}_1$ 对应的点点意义下的非零特征函数在该算子作用下在每点的值恒等于 $\hat{\lambda}_1^{-1}$.

基于以上问题，本文将对上述引理中的对偶关系作进一步讨论，用相似变换的方法给出 λ_0 的精确 II 算子及其变分公式，然后借鉴文献[3]的方法给出另

* 教育部“985”计划和高校博士点专项研究基金资助项目(20100003110005)；国家自然科学基金重点资助项目(11131003)；中央高校基本科研业务费专项资金资助
收稿日期：2011-11-10

一显式估计量 δ^* 和逼近定理,并举例验证.

注 假设 $\varphi_0<\infty$ 成立是因为当 $\varphi_0=\infty$ 时,若 $\sum_{i=0}^{N}\mu_i=\infty$,则由文献[3]知 $\lambda_0=0$;若 $\sum_{i=0}^{N}\mu_i<\infty$,则狄氏型正则,此种情况在文献[3]中已做详细讨论.

1 对偶 Q 过程

本节我们首先研究一般 Q 过程的经典对偶(参看文献文献[5]的第 7 章),得出两对偶过程特征值及特征函数之间的关系,然后将此关系应用到 DD 生灭过程和 NN 生灭过程(即双边 Neumann 边界或称反射边界的生灭过程)的对偶,得出两过程第一非平凡特征值所对应的特征函数之间的关系.这也是下节 II 算子推导的理论基础.

下面研究一般 Q 过程的对偶关系. 设状态空间 $E\subseteq\mathbf{Z}_+:=\{0,1,2,\cdots\}$. 首先给出 2 个定义.

定义 1 设 Q 为 E 上的 Q 矩阵,数 $\lambda\in\mathbf{R}$. 如果非零函数 g 满足:

$$Qg(i)=-\lambda g(i),\ i\in E,$$

则称 λ 为 Q 的特征值,g 为 Q 对应于特征值 λ 的特征函数.

定义 2 设 $Q=(q_{ij})$ 为 E 上的 Q 矩阵,若

$$\sum_{j\geqslant k}q_{ij}\leqslant\sum_{j\geqslant k}q_{i+1,j},\ i,k\in E\ 且\ k\neq i+1,$$

则称 Q 是单调的.

在下面这部分的推导中,我们暂限定 Q 矩阵的阶数为无穷.

设 $Q^{(1)}=(q_{ij}^{(1)})$ 为一单调 Q 矩阵,$m=(m_i)_{i\geqslant 0}$ 为其可配称测度. 定义 $Q^{(2)}=(q_{ij}^{(2)})$ 如下:

$$q_{ij}^{(2)}=\sum_{k=i}^{\infty}(q_{jk}^{(1)}-q_{j-1,k}^{(1)}),\ i,j\geqslant 0,\tag{5}$$

其中 $q_{-1,k}^{(1)}\equiv 0\ (k\geqslant 0)$. 则

$$q_{ij}^{(2)}-q_{i+1,j}^{(2)}=q_{ji}^{(1)}-q_{j-1,i}^{(1)},$$

于是

$$\frac{q_{ij}^{(2)}-q_{i+1,j}^{(2)}}{m_i}=\frac{q_{ji}^{(1)}}{m_i}-\frac{q_{j-1,i}^{(1)}}{m_i}=\frac{q_{ij}^{(1)}}{m_j}-\frac{q_{i,j-1}^{(1)}}{m_{j-1}}.$$

定义矩阵

$$M=\begin{pmatrix} m_0^{-1} & -m_0^{-1} & & & \\ & m_1^{-1} & -m_1^{-1} & & \\ & & m_2^{-1} & -m_2^{-1} & \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

则

$$MQ^{(2)}=Q^{(1)}M.\tag{6}$$

设 $\lambda^{(2)}$ 为 $Q^{(2)}$ 的特征值,$g^{(2)}$ 为 $Q^{(2)}$ 对应于特征值 $\lambda^{(2)}$ 的特征函数,则

$$Q^{(1)}(Mg^{(2)})=MQ^{(2)}g^{(2)}=\lambda^{(2)}(Mg^{(2)}),$$

又由 $g^{(2)}$ 为非零函数得出 $Mg^{(2)}$ 为非零函数,于是 $\lambda^{(2)}$ 亦为 $Q^{(1)}$ 的特征值,$Mg^{(2)}$ 为 $Q^{(1)}$ 对应于特征值 $\lambda^{(2)}$ 的特征函数.

注 事实上,式(6)是概率论中一种经典的对偶形式,参看文献[5-6]. 若我们假设 $Q^{(i)}$ 对应的马氏过程为 $X^{(i)}(t)(i=1,2)$,则由文献[5]的第 7 章知,在一定条件下,对任意 $i,j\geqslant 0$,$t\geqslant 0$,有

$$\mathbb{P}_i\{X^{(2)}(t)\leqslant j\}=\mathbb{P}_j\{X^{(1)}(t)\geqslant i\},$$

或

$$P_{ij}^{(2)}(t)=\sum_{k=i}^{\infty}(P_{jk}^{(1)}(t)-P_{j-1,k}^{(1)}(t)).$$

现在我们来研究 DD 生灭过程和 NN 生灭过程的对偶. 考虑引理 1 所述生灭矩阵 Q 的对偶生灭矩阵 $\hat{Q}$,其状态空间 $\hat{E}=\{i:\ 0\leqslant i<N+1\}$. 易见若 $N<\infty$,则点 0 和 N 均是反射边界,即 Neumann 边界.

定义

$$\hat{\mu}_0=1,\ \hat{\mu}_i=\frac{\hat{b}_0\hat{b}_1\cdots\hat{b}_{i-1}}{\hat{a}_1\hat{a}_2\cdots\hat{a}_i},\ 1\leqslant i<N+1,$$

$$\hat{\nu}_i=\frac{1}{\hat{\mu}_i\hat{b}_i},\ 0\leqslant i<N+1,$$

则由式(1)、(2)及上面 2 式得

$$\hat{\nu}_i=\nu_0\mu_{i+1},\ \hat{\mu}_i=\nu_0^{-1}\nu_i,\ 0\leqslant i<N+1,\tag{7}$$

且由式(3)得

$$\sum_{i=0}^{N}\hat{\mu}_i<\infty.\tag{8}$$

考虑 Hilbert 空间 $L^2(\hat{\mu},\hat{E})$ 上的最大狄氏型 $(\hat{D},\mathrm{D}(\hat{D}))$ 下第一个非平凡特征值

$$\hat{\lambda}_1=\inf\{\hat{D}(f):\hat{\mu}(f^2)=1,\hat{\mu}(f)=0\},\tag{9}$$

其中

$$\hat{D}(f)=\sum_{0\leqslant k<N+1}\hat{\mu}_k\hat{b}_k(f_k-f_{k+1})^2;$$

当 $N<\infty$ 时,$f_{N+1}:=0$;定义域

$$\mathrm{D}(\hat{D})=\{f\in L^2(\hat{\mu},\hat{E}):\hat{D}(f)<\infty\}.$$

由引理 1 知

$$\lambda_0=\hat{\lambda}_1.\tag{10}$$

下面研究 λ_0 和 $\hat{\lambda}_1$ 特征函数间的关系及特征函数的性质.为此,我们分 2 种对偶方式进行讨论.

第 1 种对偶.当 $N=\infty$ 时,令

$$Q^{(1)}=\hat{Q},\ Q^{(2)}=\begin{pmatrix}0 & A_1\\ A_2 & Q\end{pmatrix},$$

其中 $Q^{(2)}$ 为一分块矩阵,且 $A_1=(0,0,\cdots,0,\cdots)$,$A_2=(\hat{b}_0,0,\cdots,0,\cdots)^{\mathrm{T}}$. 易验证 $Q^{(1)}$、$Q^{(2)}$ 满足式(5),$(\hat{\mu}_i)_{i\geqslant 0}$ 为 $Q^{(1)}$ 的可逆测度.

设 $g=(g_i)_{i\geqslant 1}$ 为 Q 对应于特征值 λ_0 的特征函数. 定义 $\tilde{g}_0=0$,$\tilde{g}_i=g_i(i\geqslant 1)$;

$$\hat{g}_i=\frac{g_i-g_{i+1}}{\hat{\mu}_i},\ i\geqslant 0.\tag{11}$$

则 $\tilde{g}=(\tilde{g}_i)_{i\geqslant 0}$ 为 $Q^{(2)}$ 对应于特征值 λ_0 的特征函数，进而由式(10)及(6)后面的结论知，$\hat{g}=(\hat{g}_i)_{i\geqslant 0}$ 为 $\hat{Q}$ 对应于特征值 $\hat{\lambda}_1$ 的特征函数，从而由式(11)和下面引理 2 知 $g_\infty:=\lim\limits_{i\to\infty}g_i$ 存在，有限且

$$g_i=g_\infty+\sum_{j=i}^{\infty}\hat{\mu}_j\hat{g}_j,\ 0\leqslant i<\infty. \tag{12}$$

当 $N<\infty$ 时，类似可得

$$g_i=\sum_{j=i}^{N}\hat{\mu}_j\hat{g}_j,\ 0\leqslant i\leqslant N. \tag{13}$$

我们首先给出 $\hat{Q}$ 对应于特征值 $\hat{\lambda}_1$ 的特征函数的性质.

引理 2　设 $\hat{g}$ 为 $\hat{Q}$ 对应于特征值 $\hat{\lambda}_1$ 的特征函数. 若 $\hat{\lambda}_1=0$，则 $N=\infty$ 且 $\hat{g}\equiv c\neq 0$；若 $\hat{\lambda}_1>0$ 且 $\hat{g}_0<0$，则 $\hat{g}$ 严格增且 $\hat{\mu}(\hat{g})=0$.

证明　若 $\hat{\lambda}_1=0$，由 $\hat{Q}$ 的保守性得 $\hat{g}\equiv c\neq 0$. 若 $\hat{\lambda}_1>0$，由文献[2]的命题 3.4 和 3.5 即得结论.

下面给出 Q 对应于特征值 λ_0 的特征函数的性质.

定理 1　设 g 为 Q 对应于特征值 λ_0 的特征函数且初值 g_1 非负.

(ⅰ) 若 $\lambda_0=0$，则 $N=\infty$，$g>0$，严格增且 $g_\infty<\infty$.

(ⅱ) 若 $\lambda_0>0$，则 $g>0$，且 g 或者单调增或者先增后减，即存在 $k\in E$，使得当 $i<k$ 时，$g_i<g_{i+1}$；$i>k$ 时，$g_i>g_{i+1}$；而 $g_k\geqslant g_{k+1}$.

证明　由式(11)～(13)及引理 2 易知结论成立.

第 2 种对偶. 当 $N=\infty$ 时，令 $Q^{(1)}=Q$，$Q^{(2)}=\hat{Q}$. 易知 $Q^{(1)}$、$Q^{(2)}$ 满足式(5)，$\mu=(\mu_i)_{i\geqslant 1}$ 为 $Q^{(1)}$ 的配称测度.

设 $\hat{\lambda}_1>0$，$\hat{g}=(\hat{g}_i)_{i\geqslant 0}$ 为 $\hat{Q}$ 对应于 $\hat{\lambda}_1$ 的特征函数. 则由式(10)及(6)后面的结论知 $g=(g_i)_{i\geqslant 1}$ 为 Q 对应于特征值 λ_0 的特征函数，其中

$$g_i=\frac{\hat{g}_i-\hat{g}_{i-1}}{\mu_i},\ i\geqslant 1.$$

于是

$$\hat{g}_i=\hat{g}_0+\sum_{j=1}^{i}\mu_j g_j,\ i\geqslant 1.$$

从而据引理 2 和式(7)得

$$\hat{\mu}(\hat{g})=\hat{\mu}_0\hat{g}_0+\sum_{j=1}^{\infty}\hat{\mu}_j\hat{g}_j=\hat{g}_0+\nu_0^{-1}\sum_{j=1}^{\infty}\nu_j\Big(\hat{g}_0+\sum_{k=1}^{j}\mu_k g_k\Big)=0,$$

整理得

$$\hat{g}_0=-\frac{1}{\varphi_0}\sum_{j=1}^{\infty}\nu_j\sum_{k=1}^{j}\mu_k g_k=-\frac{1}{\varphi_0}\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k g_k\varphi_k.$$

当 $N<\infty$ 时，直接验证知前面的结论仍成立.

2　DD 生灭过程特征值估计

本章我们将给出 λ_0 的 II 算子变分公式、显式估计和逼近定理. 首先推导 λ_0 的精确 II 算子.

设 $\lambda_0>0$ 且 $g=(g_i)_{i\geqslant 1}$ 为 Q 对应于 λ_0 的特征函数. 由第 2 节的讨论及在相差一非零常数因子的意义下生灭矩阵特征函数的唯一性可知 $\hat{g}$ 为 $\hat{\lambda}_1$ 所对应的 $\hat{Q}$ 的特征函数，这里

$$\hat{g}_0=-\frac{1}{\varphi_0}\sum_{k=1}^{N}\mu_k g_k\varphi_k,$$

$$\hat{g}_i=\hat{g}_0+\sum_{j=1}^{i}\mu_j g_j,\ 1\leqslant i<N+1. \tag{14}$$

另一方面，由文献[3]可得 $\hat{\lambda}_1$ 的精确 $\hat{I}$ 算子为

$$\hat{I}_i(\hat{g})=\frac{\sum_{j=i}^{N}\hat{\mu}_j\hat{g}_j}{\hat{\mu}_i\hat{a}_i(\hat{g}_i-\hat{g}_{i-1})}\equiv\hat{\lambda}_1^{-1},$$
$$1\leqslant i<N+1. \tag{15}$$

将式(14)和(7)代入式(15)得，对所有的 $1\leqslant i<N+1$，有下面关系式成立：

$$\begin{aligned}\hat{I}_i(\hat{g})&=\frac{1}{g_i}\sum_{j=i}^{N}\nu_j\Big(\sum_{k=1}^{j}\mu_k g_k+\hat{g}_0\Big)=\\&\frac{1}{g_i}\sum_{j=i}^{N}\nu_j\Big(\sum_{k=1}^{j}\mu_k g_k-\frac{1}{\varphi_0}\sum_{k=1}^{N}\mu_k g_k\varphi_k\Big)=\\&\frac{1}{g_i}\sum_{k=1}^{N}\mu_k g_k\Big(\varphi_{i\vee k}-\frac{\varphi_i\varphi_k}{\varphi_0}\Big)=:II_i(g).\end{aligned} \tag{16}$$

于是由式(5)及(10)得

$$II_i(g)\equiv\lambda_0^{-1},\ 1\leqslant i<N+1. \tag{17}$$

注　以上并未证明 $\lambda_0=0$ 时式(17)成立，但这并不影响后面关于变分公式、显式估计等定理的证明，而且我们还可由显式估计证明 $\lambda_0=0$ 时式(17)成立. 事实上，若 $\lambda_0=0$，由定理 3 知

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k\varphi_k=\sup_{n\geqslant 1}\sum_{k=1}^{n}\mu_k\varphi_k\geqslant\sup_{n\geqslant 1}\varphi_n\sum_{k=1}^{n}\mu_k\geqslant\delta^*=\infty.$$

另一方面由式(11)及引理 2 知

$$g_j=s\sum_{k=0}^{j-1}\nu_k=s(\varphi_0-\varphi_j),\ j\geqslant 1,\ s\neq 0.$$

故对任意 $i\geqslant 1$，

$$\begin{aligned}II_i(g)&=\frac{1}{\varphi_0-\varphi_i}\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k(\varphi_0-\varphi_k)\Big(\varphi_{i\vee k}-\frac{\varphi_i\varphi_k}{\varphi_0}\Big)\geqslant\\&\frac{1}{\varphi_0}\sum_{k=i}^{\infty}\mu_k\varphi_k(\varphi_0-\varphi_k)\geqslant\\&\frac{\varphi_0-\varphi_i}{\varphi_0}\sum_{k=i}^{\infty}\mu_k\varphi_k=\infty=\lambda_0^{-1}.\end{aligned}$$

为估计特征值，特征函数无疑起着重要作用，但

由于一般情况下特征函数并不知晓，故用试验函数近似模拟，这些试验函数构成 II 算子的定义域，即变分公式的函数定义域. 变分公式的优点在于，代入某一试验函数就能得到 λ_0 的上界或下界估计. 为得到 λ_0 的 II 算子变分公式，我们将对偶变换(14)和(16)推广到了 $\hat{I}$ 算子的定义域. 下面的引理参见文献[3].

引理 3 (ⅰ)(下界变分公式)

$$\hat{\lambda}_1 = \sup_{\hat{f}\in\hat{F}_I}\inf_{i\in\hat{E}\setminus\{0\}}\hat{I}_i(\hat{f})^{-1}; \tag{18}$$

(ⅱ)(上界变分公式)

$$\hat{\lambda}_1 = \inf_{\hat{f}\in\tilde{\hat{F}}_I}\sup_{i\in\hat{E}\setminus\{0\}}\hat{I}_i(\hat{f})^{-1}, \tag{19}$$

其中

$$\hat{I}_i(\hat{f}) = \frac{\sum_{j=i}^{N}\hat{\mu}_j\hat{f}_j}{\hat{\mu}_i\hat{a}_i(\hat{f}_i-\hat{f}_{i-1})},\ i\in\hat{E}\setminus\{0\};$$

$$\hat{F}_I = \{\hat{f}:\hat{f}_i \text{ 严格增},\ i\in\hat{E}\setminus\{0\} \text{ 且 } \hat{\mu}(\hat{f})=0\},$$

$$\tilde{\hat{F}}_I = \{\hat{f}: \text{存在 } m\in\hat{E}\setminus\{0\} \text{ 使得 } \hat{f}_i=\hat{f}_{i\wedge m},$$

$$\hat{f}_i \text{ 在}\{0,1,\cdots,m\}\text{ 上严格增且 } \hat{\mu}(\hat{f})=0\}.$$

定理 2 (ⅰ)(下界变分公式)

$$\lambda_0 = \sup_{f\in F_{II}}\inf_{i\in E} II_i(f)^{-1}, \tag{20}$$

$$= \sup_{f\in F'_{II}}\inf_{i\in E} II_i(f)^{-1}, \tag{21}$$

(ⅱ)(上界变分公式)

$$\lambda_0 = \inf_{f\in\tilde{F}_{II}}\sup_{i\in\operatorname{supp}(f)} II_i(f)^{-1}, \tag{22}$$

其中

$$II_i(f) = \frac{1}{f_i}\sum_{k=1}^{N}\mu_k f_k\left(\varphi_{i\vee k}-\frac{\varphi_i\varphi_k}{\varphi_0}\right),\ i\in E;$$

$$F_{II} = \{f:\ f_i>0,\ i\in E;\ f_0=0\},$$

$F'_{II}=\{f:\ f\in F_{II}$ 且存在 $k\in E$ 使得 $i<k$ 时，$f_i<f_i+1$；$f_k\geqslant f_{k+1}$，$i>k$ 时，$f_i>f_{i+1}$. 当 $N<\infty$ 时，$f_{N+1}:=0\}$，

$\tilde{F}_{II}=\{f:$ 存在 $m\in E$ 使得 $f_0=0$，$f_i>0$，$1\leqslant i\leqslant m$；$f_i=0$，$m<i<N+1\}$.

证明 证(ⅰ). 对任意 $\hat{f}\in\hat{F}_I$，令

$$f_0=0,\ f_i=\hat{\mu}_i\hat{a}_i(\hat{f}_i-\hat{f}_{i-1}),\ i\in E,$$

则 $f\in F_{II}$，且类似式(14)和(16)的推导有

$$\hat{f}_0 = -\frac{1}{\varphi_0}\sum_{k=1}^{N}\mu_k f_k\varphi_k,\ \hat{f}_i=\hat{f}_0+\sum_{j=1}^{i}\mu_j f_j,$$

$$\hat{I}_i(\hat{f}) = II_i(f),\ 1\leqslant i<N+1. \tag{23}$$

故由式(18)，$\sup_{f\in F_{II}}\inf_{i\in E} II_i(f)^{-1}\geqslant\hat{\lambda}_1=\lambda_0$.

反之，对任意 $f\in F_{II}$，若式(23)中第 1 个等式右端有限，可按式(23)定义 $\hat{f}$，此时 $\hat{f}\in\hat{F}_I$；而若式(23)中第 1 个等式右端无限，则 $II_i(f)=\infty(i\in E)$，此时对式(2)右端取值没影响. 故 $\hat{\lambda}_1\geqslant\sup_{f\in F_{II}}\inf_{i\in E} II_i(f)^{-1}$. 因此式(20)成立.

下证式(21). 首先由 $F'_{II}\subset F_{II}$ 及式(20)易知

$$\sup_{f\in F'_{II}}\inf_{i\in E} II_i(f)^{-1}\leqslant\lambda_0.$$

若 $\lambda_0>0$，则由定理 1，其对应的特征函数 $g\in F'_{II}$，再由式(17)即得

$$\sup_{f\in F'_{II}}\inf_{i\in E} II_i(f)^{-1}\geqslant\lambda_0.$$

若 $\lambda_0=0$，上式显然成立. 故式(21)成立.

(ⅱ)的证明：结合式(19)及(ⅰ)中证明方法即得结论.

下面是关于显式估计的结果，证明思想来自于文献[3]. 这里的显式估计量 δ^* 的优越性在于，λ_0 的上下界均可由 δ^{*-1} 的常数倍控制. 此外，虽然没有严格证明 $\delta^*\leqslant\kappa$，但至今并未找到反例使得该式不成立.

定理 3(显式估计) 定义

$$\delta^* = \frac{1}{\varphi_0}\sup_{n\in E}\varphi_n\sum_{i=1}^{n}\mu_i(\varphi_0-\varphi_i),$$

则

$$(4\delta^*)^{-1}\leqslant\lambda_0\leqslant\delta^{*-1}.$$

证明 (a) 先证 $\lambda_0\geqslant(4\delta^*)^{-1}$. 取 $f_i=\sqrt{\varphi_i}$，$i\in E$，则 $f\in F_{II}$ 且由式(20)知

$$\lambda_0^{-1}\leqslant\sup_{i\in E} II_i(f). \tag{24}$$

而对任意 $i\in E$，我们有

$$II_i(f) = \frac{1}{f_i}\sum_{j=i}^{N}\nu_j\left(\sum_{k=1}^{j}\mu_k f_k-\frac{1}{\varphi_0}\sum_{k=1}^{N}\mu_k f_k\varphi_k\right)\leqslant$$

$$\frac{1}{\varphi_0 f_i}\sum_{j=i}^{N}\nu_j\sum_{k=1}^{j}\mu_k f_k(\varphi_0-\varphi_k)=$$

$$\frac{1}{\varphi_0}\cdot\frac{\sum_{j=i}^{N}\nu_j\sum_{k=1}^{j}\mu_k f_k(\varphi_0-\varphi_k)}{\sum_{j=i}^{N}(f_j-f_{j+1})}\leqslant$$

$$\frac{1}{\varphi_0}\sup_{i\in E}\frac{\sum_{k=1}^{i}\mu_k f_k(\varphi_0-\varphi_k)}{\mu_i b_i(f_i-f_{i+1})}.$$

记

$$M_k = \sum_{j=1}^{k}\mu_j(\varphi_0-\varphi_j),$$

则由分部求和公式

$$\sum_{k=1}^{i}x_k y_k = X_i y_i-\sum_{k=1}^{i-1}X_k(y_{k+1}-y_k)$$

其中 $X_i=\sum_{k=1}^{i}x_k$ 得出，对任意 $i\in E$，有

$$\sum_{k=1}^{i}\mu_k f_k(\varphi_0-\varphi_k)=$$

$$M_i\sqrt{\varphi_i}+\sum_{k=1}^{i-1}M_k(\sqrt{\varphi_k}-\sqrt{\varphi_{k+1}})\leqslant$$

$$\frac{\varphi_0\delta^*}{\sqrt{\varphi_i}}+\varphi_0\delta^*\sum_{k=1}^{i-1}\frac{\sqrt{\varphi_k}-\sqrt{\varphi_{k+1}}}{\varphi_k}\leqslant$$

$$\frac{\varphi_0\delta^*}{\sqrt{\varphi_i}}+\varphi_0\delta^*\sum_{k=1}^{i-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\varphi_{k+1}}}-\frac{1}{\sqrt{\varphi_k}}\right)\leqslant\frac{2\varphi_0\delta^*}{\sqrt{\varphi_i}}.$$

故对任意 $i\in E$，有

$$II_i(f)\leqslant\frac{1}{\varphi_0}\sup_{i\in E}\frac{1}{\mu_ib_i(\sqrt{\varphi_i}-\sqrt{\varphi_{i+1}})}\cdot\frac{2\varphi_0\delta^*}{\sqrt{\varphi_i}}=$$

$$2\delta^*\sup_{i\in E}\frac{\sqrt{\varphi_i}+\sqrt{\varphi_{i+1}}}{\sqrt{\varphi_i}}\leqslant 4\delta^*.$$

从而由式(24)得 $\lambda_0\geqslant(4\delta^*)^{-1}$.

(b) 下证 $\lambda_0\leqslant\delta^{*-1}$. 记 $\nu[i,j]=\sum_{k=i}^{j}\nu_k$. 对任意 $n,m\in E$ 且 $n<m$，取 $f_i^{(n,m)}=\nu[i\vee n,m]\mathbb{1}_{\{1\leqslant i\leqslant m\}}$，$i\in E$，则 $f^{(n,m)}\in\mathrm{F}_{II}$. 于是由式(22)得

$$\lambda_0^{-1}\geqslant\sup_{1\leqslant n<m<N+1}\min_{1\leqslant i\leqslant m}II_i(f^{(n,m)})=$$

$$\sup_{1\leqslant n<m<N+1}\min_{n\leqslant i\leqslant m}\frac{\sum_{k=1}^{m}\mu_k\nu[k\vee n,m](\varphi_{i\vee k}-\frac{\varphi_i\varphi_k}{\varphi_0})}{\nu[i\vee n,m]}=$$

$$\sup_{1\leqslant n<m<N+1}\frac{\sum_{k=1}^{m}\mu_k\nu[k\vee n,m](\varphi_{n\vee k}-\frac{\varphi_n\varphi_k}{\varphi_0})}{\nu[n,m]}=$$

$$\sup_{n\in E}\frac{\sum_{k=1}^{N}\mu_k\nu[k\vee n,N](\varphi_{n\vee k}-\frac{\varphi_n\varphi_k}{\varphi_0})}{\nu[n,N]}\geqslant$$

$$\sup_{n\in E}\sum_{k=1}^{n}\mu_k(\varphi_{n\vee k}-\frac{\varphi_n\varphi_k}{\varphi_0})=\delta^*. \tag{25}$$

下面是逼近定理，我们取初始迭代函数为$\sqrt{\varphi}$，用 $f\,II(f)$迭代. 这里$\sqrt{\varphi}$虽然严格递减，但迭代一次以后试验函数 $f_n(n\geqslant 2)$或者单调增或者先增后减的，模拟特征函数仍然合理.

定理 4(逼近定理)　设 $\delta^*<\infty$.

(ⅰ) 定义 $f_1=\sqrt{\varphi}$，$f_n=f_{n-1}II(f_{n-1})$，$n\geqslant 2$ 且 $\delta_n^*=\sup_{i\in E}II_i(f_n)$. 则 δ_n^* 随 n 递减且

$$\lambda_0\geqslant\delta_\infty^{*-1}\geqslant\cdots\geqslant\delta_1^{*-1}\geqslant(4\delta^*)^{-1}.$$

其中 $\delta_\infty^*=\lim_{n\to\infty}\delta_n^*$.

(ⅱ) 对任意 $l,m\in E,l<m$，定义

$$f_1^{(l,m)}(i)=\nu[i\vee l,m]\mathbb{1}_{\{1\leqslant i\leqslant m\}},$$

$$f_n^{(l,m)}=\mathbb{1}_{\{1\leqslant i\leqslant m\}}f_{n-1}\,II(f_{n-1}^{(l,m)}),n\geqslant 2,$$

及

$$\delta_n^{*\prime}=\sup_{l,m:l<m}\min_{1\leqslant i\leqslant m}II_i(f_n^{(l,m)}).$$

则$\delta_n^{*\prime}$随 n 递增且

$$\delta^{*-1}\geqslant\delta_1^{*\prime-1}\geqslant\cdots\geqslant\delta_\infty^{*\prime-1}\geqslant\lambda_0.$$

其中$\delta_\infty^{*\prime}=\lim_{n\to\infty}\delta_n^{*\prime}$.

证明　(a) 先证单调性. 由合分比性质得出，对于任意 $n\geqslant 1$，有

$$\delta_{n+1}^*=\sup_{i\in E}\frac{f_{n+2}(i)}{f_{n+1}(i)}=$$

$$\sup_{i\in E}\frac{\sum_{k=1}^{N}\mu_kf_{n+1}(k)(\varphi_{i\vee k}-\frac{\varphi_i\varphi_k}{\varphi_0})}{\sum_{k=1}^{N}\mu_kf_n(k)(\varphi_{i\vee k}-\frac{\varphi_i\varphi_k}{\varphi_0})}\leqslant$$

$$\sup_{i\in E}\frac{f_{n+1}(i)}{f_n(i)}=\delta_n^*,$$

故 δ_n^* 随 n 递减. 其次因为 $f\in\mathrm{F}_{II}$，由式(20)知

$$\lambda_0^{-1}\leqslant\sup_{i\in E}II_i(f_n)=\delta_n^*,\ n\geqslant 1.$$

再由定理 3 的证明(a)知 $\delta_1^*\leqslant 4\delta^*$. 从而结论(ⅰ)成立.

(b) 首先由合分比性质，类似(a)可得$\delta_n^{*\prime}$随 n 递增. 其次因为 $f_n^{(l,m)}\in\widetilde{\mathrm{F}}_{II}$，由式(22)知 $\lambda_0^{-1}\geqslant\delta_n^{*\prime}$. 再由定理 3 的证明(b)知 $\delta_1^{*\prime}\geqslant\delta^*$. 即结论(ⅱ)成立.

下面 2 例均取自文献[3]，其中 κ 为文献[3]关于 λ_0 的显式估计量，$\{\eta_n\}$、$\{\eta_n'\}$分别为文献[3]中定理 6.3. 对于本文引理 1 中 $\hat{\lambda}_1$ 的逼近序列.

例 1　取 $N=10$ 且 $a_i=1,b_i=2$，$(1\leqslant i\leqslant N)$，则 $\lambda_0\approx 0.2861$，$\lambda_0^{-1}\approx 3.4947$，$\delta^*\approx 1.8173$，$\kappa\approx 1.8512$ 且

(ⅰ) 下界逼近：$\delta_1^*\approx 4.0343$，$\delta_2^*\approx 3.6461$，$\delta_3^*\approx 3.5379$，$\delta_4^*\approx 3.5072$，$\delta_5^*\approx 3.4994$，…，$\delta_{15}^*\approx\lambda_0^{-1}$；

$\eta_1\approx 4.3555$，$\eta_2\approx 3.7406$，$\eta_3\approx 3.5696$，$\eta_4\approx 3.5220$，$\eta_5\approx 3.5080$，…，$\eta_{16}\approx\hat{\lambda}_1^{-1}$.

(ⅱ) 上界逼近：$\delta_1^{*\prime}\approx 2.5692$，$\delta_2^{*\prime}\approx 3.2935$，$\delta_3^{*\prime}\approx 3.4489$，$\delta_4^{*\prime}\approx 3.4784$，$\delta_5^{*\prime}\approx 3.4887$，…，$\delta_{11}^{*\prime}\approx\lambda_0^{-1}$；

$\eta_1'\approx 1.8173$，$\eta_2'\approx 2.5500$，$\eta_3'\approx 2.9956$，$\eta_4'\approx 3.2338$，$\eta_5'\approx 3.3560$，…，$\eta_{16}'\approx\hat{\lambda}_1^{-1}$.

例 2　取 $a_i=i,b_i=2i+4+\sqrt{2}$ $(i\geqslant 1)$，则 $\lambda_0=3$，$\lambda_0^{-1}\approx 0.3333$，$\delta^*\approx 0.1754$，$\kappa\approx 0.1794$ 且

(ⅰ) 下界逼近：$\delta_1^*\approx 0.3734$，$\delta_2^*\approx 0.3550$，$\delta_3^*\approx 0.3455$，$\delta_4^*\approx 0.3405$，$\delta_5^*\approx 0.3380$，…，$\delta_{20}^*\approx\lambda_0^{-1}$；

$\eta_1\approx 0.3983$，$\eta_2\approx 0.3650$，$\eta_3\approx 0.3504$，$\eta_4\approx 0.3430$，$\eta_5\approx 0.3390$，…，$\eta_{25}\approx\hat{\lambda}_1^{-1}$.

(ⅱ) 上界逼近：$\delta_1^{*\prime}\approx 0.3313$，$\delta_2^{*\prime}\approx 0.3313$，$\delta_3^{*\prime}\approx 0.3313$，$\delta_4^{*\prime}\approx 0.3313$，$\delta_5^{*\prime}\approx 0.3313$，…，$\delta_{16}^{*\prime}\approx\lambda_0^{-1}$；

$\eta_1'\approx 0.1654$，$\eta_2'\approx 0.2129$，$\eta_3'\approx 0.2484$，$\eta_4'\approx 0.2737$，$\eta_5'\approx 0.2901$，…，$\eta_{40}'\approx\hat{\lambda}_1^{-1}$.

由以上 2 例知，本文得到的逼近序列$\{\delta_n^*\}$、$\{\delta_n^{*\prime}\}$与原对偶序列$\{\eta_n\}$、$\{\eta_n'\}$相比，不仅序列首项更接近 λ_0^{-1}，逼近到 λ_0^{-1} 的速度也更快，另外显式估计量 δ^* 要小于 κ.

感谢与陈木法院士所进行的有益讨论.

3 参考文献

[1] Chen Mufa. From Markov chains to non-equilibrium particle systems [M]. 2nd ed. Singapore: World Scientific, 2004

[2] Chen Mufa. Eigenvalues, inequalities, and ergodic theory [M]. London: Springer, 2005

[3] Chen Mufa. Speed of stability for birth-death processes [J]. Frontiers of Mathematics in China, 2010, 5(3):379

[4] Wang Zikun, Yang Xiangqun. Birth and death processes and Markov chains [M]. New York: Springer-Verlag, 1992

[5] Anderson W J. Continuous-Time Markov Chains [M]. New York: Springer-Verlag, 1991

[6] Liggett T M. Interacting particle systems [M]. New York: Springer-Verlag, 2005

ESTIMATION OF THE EIGENVALUE FOR THE BIRTH AND DEATH PROCESS WITH BILATERAL ABSORBING BOUNDARIES

ZHANG Chi ZHANG Yuhui

(School of Mathematical Sciences, Key Laboratory of Mathematics and Complex Systems of Ministry of Education, Beijing Normal University, 100875, Beijing, China)

Abstract The sharp II operator for the first eigenvalue of the birth and death process with bilateral absorbing boundaries was derived by a duality method. Variational formulas, criterion and approximating procedures were obtained.

Key words Birth and death process; absorbing boundary; the first eigenvalue; duality; variational formula