生灭大灾难型单生 Q 矩阵*

张余辉
(北京师范大学数学科学学院, 100875, 北京)

摘要　研究了生灭大灾难型单生 Q 矩阵, 得到了其决定的单生过程唯一、常返、遍历的判别准则或充分条件, 形式类似于生灭矩阵的情形.

关键词　单生过程; 唯一性; 常返性; 遍历性

1　引言和主要结果

本文研究的单生 Q 矩阵是保守全稳定的 Q 矩阵, 即对一切 $i\geqslant 0$ 有

$$q_i := -q_{ii} = \sum_{j\neq i} q_{ij} < \infty,$$

而且对所有的 $i\geqslant 0$ 和 $j\geqslant 2$ 满足 $q_{i,i+1}>0$, $q_{i,i+j}=0$. 其决定的 Q 过程称为单生过程.

对单生过程, 国内外已经有不少研究, 相关结果参看文献[1-18]及其所引文献. 本文则考虑下面的所谓生灭大灾难型单生 Q 矩阵:

$$b_i := q_{i,i+1} > 0,\ i\geqslant 0;$$
$$a_i := q_{i,i-1} > 0,\ i\geqslant 1;$$
$$c_i := q_{i0} \geqslant 0,\ i\geqslant 2;$$

其他的 $j\neq i$, $q_{ij}=0$. 为方便起见, 本文约定 $a_0=c_0=c_1=0$. 注意, 这类单生 Q 矩阵在 $c_i\equiv 0$ 时退化为生灭矩阵. 本文的目标是研究生灭大灾难型单生 Q 矩阵, 期望得到其决定的单生过程唯一、常返、遍历的形式较为简洁的判别准则或充分条件, 这里的形式简洁是指类似于生灭过程的情形. 为此, 象生灭矩阵一样, 令

$$\mu_0 = 1,\ \mu_i = \frac{b_0 b_1 \cdots b_{i-1}}{a_1 a_2 \cdots a_i},\ i\geqslant 1.$$

我们的主要结果结论如下.

定理 1　给定一个保守全稳定的生灭大灾难型单生 Q 矩阵. 则其决定唯一的 Q 过程当且仅当

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{\mu_i b_i}\sum_{k=0}^{i}\mu_k(1+c_k) = +\infty. \qquad (1)$$

定理 2　给定一个不可约正则的生灭大灾难型单生 Q 矩阵. 则其决定的 Q 过程常返当且仅当

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{\mu_i b_i}\left(1+\sum_{k=0}^{i}\mu_k c_k\right) = +\infty. \qquad (2)$$

定理 3　给定一个不可约正则的生灭大灾难型单生 Q 矩阵. 当

$$\bar{d} := \sup_{n\geqslant 1}\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\mu_i b_i}\sum_{k=1}^{i}\mu_k(1+c_k)}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\mu_i b_i}\left(b_0+\sum_{k=1}^{i}\mu_k c_k\right)} < +\infty, \qquad (3)$$

则其决定的 Q 过程遍历(正常返); 进一步, 当

$$\tilde{d} := \sup_{n\geqslant 1}\frac{\sum_{k=1}^{n}\mu_k(1+c_k)}{b_0+\sum_{k=1}^{n}\mu_k c_k} < +\infty, \qquad (4)$$

则其决定的 Q 过程遍历且方程 $\sum_j q_{ij}y_j \leqslant -1$ $(i\geqslant 1)$ 有一个非负有限单调增的解.

注意, 由式(4)容易看出

$$\tilde{d} \leqslant \frac{1}{b_0}\sum_{k=0}^{\infty}\mu_k(1+c_k),\quad \tilde{d}\leqslant 1+\frac{1}{b_0}\sum_{k=0}^{\infty}\mu_k.$$

与生灭过程的情形比较一下, 可以看出这里得到的结论形式类似, 而且较为简洁. 此外, 在文献[19]的定理 8 中给出了非保守生灭矩阵的零流出的判别准则, 由于非保守生灭矩阵的零流出等价于相应的保守生灭大灾难型单生 Q 矩阵的零流出(等价于唯一性), 因此, 本质上文献[19]已经得到了定理 1 的结论, 本文则是给出该结论的一个新证明, 方法并不相同. 当然, 这也就成为本文研究生灭大灾难型单生 Q 矩阵的根源之一.

2　定理的证明

为证明方便, 先回顾在文献[6-8]和[10-12]中所得到关于一般单生 Q 矩阵的结果和一些记号. 令

$$q_i^{(j)} = \sum_{k=0}^{j} q_{ik}\ (0\leqslant j\leqslant i-1,\ i,j\in \mathbf{Z}_+),$$

其中 $\mathbf{Z}_+ = \{0,1,2,\cdots\}$. 定义

$$m_0 = \frac{1}{q_{01}},\ m_i = \frac{1}{q_{i,i+1}}\left(1+\sum_{k=0}^{i-1}q_i^{(k)}m_k\right),\ i\geqslant 1,$$

* 国家教育部高校博士点专项研究基金资助项目(20100003110005); 中央高校基本科研业务费专向资金资助项目
收稿日期: 2011-06-03

$$F_i^{(i)}=1,\ F_i^{(j)}=\frac{1}{q_{i,i+1}}\sum_{k=j}^{i-1}q_i^{(k)}F_k^{(j)},\ 0\leqslant j\leqslant i-1,$$

$$d_0=0,\ d_i=\frac{1}{q_{i,i+1}}\Big(1+\sum_{k=0}^{i-1}q_i^{(k)}d_k\Big),\ i\geqslant 1.$$

文献[12]告诉我们, 此 3 组记号有如下关系:

$$m_i=q_{01}^{-1}F_i^{(0)}+d_i(i\geqslant 0).$$

再定义

$$d=\sup_{i\geqslant 1}\frac{\sum_{j=0}^{i-1}d_j}{\sum_{j=0}^{i-1}F_j^{(0)}}=\sup_{i\geqslant 0}\frac{\sum_{j=0}^{i}d_j}{\sum_{j=0}^{i}F_j^{(0)}},$$

$$\hat{d}=\sup_{i\geqslant 0}\frac{d_i}{F_i^{(0)}}.$$

前述文献的相关结果综述如下.

定理 4 给定一个保守全稳定的单生 Q 矩阵. 则其决定唯一的 Q 过程当且仅当 $\sum_{i=0}^{\infty}m_i=+\infty$. 假定单生 Q 矩阵正则不可约, 则其决定的 Q 过程常返当且仅当 $\sum_{i=0}^{\infty}F_i^{(0)}=+\infty$; 遍历(正常返) 当且仅当 $d<+\infty$.

基于上述结果和记号, 我们来分别给出所获得主要结果的详细证明.

定理 1 的证明 对生灭大灾难型单生 Q 矩阵, 经过计算得到

$$m_i=\frac{1}{\mu_i b_i}\sum_{k=0}^{i}\mu_k(1+c_kM_{k-1}),\ i\geqslant 0,\qquad(6)$$

其中 $M_k=\sum_{j=0}^{k}m_j(k\geqslant 0)$, $M_{-1}=M_0=1/b_0$. 由定理 4, 我们只需证明正项级数 $\sum_{i=0}^{\infty}m_i$ 与式(1)中的正项级数是同时发散或同时收敛的.

由于 $M_k\geqslant 1/b_0\,(k\geqslant -1)$, 再结合式(6), 显然有

$$M_i\geqslant\sum_{j=0}^{i}\frac{1}{\mu_j b_j}\sum_{k=0}^{j}\mu_k\Big(1+\frac{c_k}{b_0}\Big)\geqslant$$

$$\Big(\frac{1}{b_0}\wedge 1\Big)\sum_{j=0}^{i}\frac{1}{\mu_j b_j}\sum_{k=0}^{j}\mu_k(1+c_k),\ i\geqslant 0.$$

进而, 由式(1)推出 $\sum_{i=0}^{\infty}m_i$ 发散.

反之, 若 $\sum_{i=0}^{\infty}m_i=+\infty$, 下面用反证法来推出式(1)成立. 如果式(1)不成立, 即

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{\mu_i b_i}\sum_{k=0}^{i}\mu_k(1+c_k)<+\infty,$$

同时注意到此时 M_k 单调增加到$+\infty$, 所以存在充分大的 N 使得

$$K:=\sum_{i=N+1}^{\infty}\frac{1}{\mu_i b_i}\sum_{k=0}^{i}\mu_k(1+c_k)<1,$$

$$M_k>1,\ k\geqslant N.$$

记

$$L:=\sum_{i=0}^{N}\frac{1}{\mu_i b_i}\sum_{j=0}^{i}\mu_j(1+c_jM_{j-1}).$$

此时, 当 $k>N$ 时,

$$M_k=\sum_{i=0}^{k}m_i=L+\sum_{i=N+1}^{k}\frac{1}{\mu_i b_i}\sum_{j=0}^{i}\mu_j(1+c_jM_{j-1})\leqslant$$

$$L+\sum_{i=N+1}^{k}\frac{M_{i-1}}{\mu_i b_i}\sum_{j=0}^{i}\mu_j(1+c_j)\leqslant L+KM_{k-1}.$$

由此递推得出

$$M_k\leqslant L+LK+\cdots+LK^{k-N-1}+K^{k-N}M_N=$$

$$\frac{L(1-K^{k-N})}{1-K}+K^{k-N}M_N.$$

在上式中令 $k\to\infty$, 则有$+\infty\leqslant L/(1-K)$, 这是矛盾的结论. 因此, 式(1)成立. 结论得证.

定理 2 的证明 对生灭大灾难型单生 Q 矩阵, 经过计算得到

$$F_i^{(0)}=\frac{b_0}{\mu_i b_i}\Big(1+\frac{1}{b_0}\sum_{k=0}^{i}\mu_kc_kH_{k-1}\Big),\ i\geqslant 0,\qquad(7)$$

其中 $H_k:=\sum_{j=0}^{k}F_j^{(0)}(k\geqslant 0)$, $H_{-1}=H_0=1$. 由定理 4, 我们只需证明正项级数 $\sum_{i=0}^{\infty}F_i^{(0)}$ 发散与(2)等价.

由于 $H_k\geqslant 1\ (k\geqslant -1)$, 结合式(7), 显然有

$$H_i\geqslant\sum_{j=0}^{i}\frac{b_0}{\mu_j b_j}\Big(1+\frac{1}{b_0}\sum_{k=0}^{j}\mu_kc_k\Big)\geqslant$$

$$(b_0\wedge 1)\sum_{j=0}^{i}\frac{1}{\mu_j b_j}\Big(1+\sum_{k=0}^{j}\mu_kc_k\Big),\ i\geqslant 0.$$

由上式及式(2)推出 $\sum_{i=0}^{\infty}F_i^{(0)}=+\infty$.

反之, 若 $\sum_{i=0}^{\infty}F_i^{(0)}=+\infty$, 我们依然用反证法来推出式(2). 假定式(2)不成立, 即

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{\mu_i b_i}\Big(1+\sum_{k=0}^{i}\mu_kc_k\Big)<+\infty.$$

注意到此时 H_k 单调增加到$+\infty$, 故存在充分大的 N 使得

$$K:=(b_0\vee 1)\sum_{i=N+1}^{\infty}\frac{1}{\mu_i b_i}\Big(1+\sum_{k=0}^{i}\mu_kc_k\Big)<1$$

$$\text{且}\quad H_k>1,\ k\geqslant N.$$

记

$$L:=\sum_{i=0}^{N}\frac{b_0}{\mu_i b_i}\Big(1+\frac{1}{b_0}\sum_{j=0}^{i}\mu_jc_jH_{j-1}\Big).$$

则当 $k>N$ 时,

$$H_k=\sum_{i=0}^{k}F_i^{(0)}=L+\sum_{i=N+1}^{k}\frac{b_0}{\mu_i b_i}\Big(1+\frac{1}{b_0}\sum_{j=0}^{i}\mu_jc_jH_{j-1}\Big)\leqslant$$

$$
\begin{aligned}
&L+(b_0\vee 1)\sum_{i=N+1}^{k}\frac{H_{i-1}}{\mu_i b_i}\Big(1+\sum_{j=0}^{i}\mu_j c_j\Big)\leqslant\\
&L+KH_{k-1}\leqslant\cdots\leqslant L+LK+\cdots+\\
&LK^{k-N-1}+K^{k-N}H_N=\frac{L(1-K^{k-N})}{1-K}+K^{k-N}H_N.
\end{aligned}
$$

在上式中令 $k\to\infty$, 则推出矛盾的结论: $+\infty\leqslant L/(1-K)$. 因此, 式(2)成立. 定理得证.

定理 3 的证明　对生灭大灾难型单生 Q 矩阵, 经过计算得到

$$
d_i=\frac{1}{\mu_i b_i}\sum_{k=1}^{i}\mu_k(1+c_k D_{k-1}),\quad i\geqslant 0,
$$

其中 $D_k:=\sum_{j=0}^{k}d_j\ (k\geqslant 0)$, $D_{-1}=0$, 在上式中约定

$$
\sum_{k=1}^{0}=0. \tag{8}
$$

1) 下面用数学归纳法证明

$$
D_n+\bar{d}\leqslant\bar{d}H_n,\quad n\geqslant 0. \tag{9}
$$

首先, 容易验证当 $n=0$ 和 $n=1$ 时式(9)成立. 其次, 假定直至 $n\leqslant m-1$ 时式(9)均成立, 当 $n=m$ 时, 由式(3)、(7)、(8)和归纳假设得出

$$
\begin{aligned}
&\frac{D_m+\bar{d}}{H_m}=\\
&\frac{\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\mu_i b_i}\sum_{k=1}^{i}\mu_k+\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\mu_i b_i}\sum_{k=1}^{i}\mu_k c_k D_{k-1}+\bar{d}}{\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{\mu_i b_i}\Big(b_0+\sum_{k=0}^{i}\mu_k c_k H_{k-1}\Big)}\leqslant\\
&\frac{\bar{d}\sum_{i=1}^{m}\frac{b_0}{\mu_i b_i}+(\bar{d}-1)\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\mu_i b_i}\sum_{k=1}^{i}\mu_k c_k}{\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{\mu_i b_i}\Big(b_0+\sum_{k=0}^{i}\mu_k c_k H_{k-1}\Big)}+\\
&\frac{\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\mu_i b_i}\sum_{k=1}^{i}\mu_k c_k D_{k-1}+\bar{d}}{\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{\mu_i b_i}\Big(b_0+\sum_{k=0}^{i}\mu_k c_k H_{k-1}\Big)}=\\
&\frac{\bar{d}\sum_{i=1}^{m}\frac{b_0}{\mu_i b_i}+\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\mu_i b_i}\sum_{k=1}^{i}\mu_k c_k(\bar{d}-1+D_{k-1})+\bar{d}}{\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{\mu_i b_i}\Big(b_0+\sum_{k=0}^{i}\mu_k c_k H_{k-1}\Big)}\leqslant\\
&\frac{\bar{d}\sum_{i=1}^{m}\frac{b_0}{\mu_i b_i}+\bar{d}\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\mu_i b_i}\sum_{k=1}^{i}\mu_k c_k H_{k-1}+\bar{d}}{\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{\mu_i b_i}\Big(b_0+\sum_{k=0}^{i}\mu_k c_k H_{k-1}\Big)}\leqslant\bar{d},
\end{aligned}
$$

所以当 $n=m$ 时式(9)成立. 因此, 由归纳法得证式(9).

由此结论和式(5)知 $d=\sup_{n\geqslant 0}D_n/H_n\leqslant\bar{d}$. 因此, 当 $\bar{d}<+\infty$时, $d<+\infty$, 再由定理 4 立刻推出该 Q 矩阵所决定的 Q 过程遍历.

2) 由和分比性质知, $\bar{d}\leqslant\tilde{d}$. 所以当 $\tilde{d}<+\infty$时, 显然 $\bar{d}<+\infty$, 再由(i)所证结论知该 Q 矩阵所决定的 Q 过程是遍历的. 为证明定理的最后一个结论, 我们先用数学归纳法证明

$$
d_n\leqslant\tilde{d}F_n^{(0)},\quad D_n+\tilde{d}\leqslant\tilde{d}H_n,\quad n\geqslant 0. \tag{10}
$$

首先, 容易验证当 $n=0$ 和 $n=1$ 时式(10)成立. 其次, 假定直至 $n\leqslant m-1$ 时式(10)均成立, 当 $n=m$ 时, 由式(4)、(7)、(8)和归纳假设得出

$$
\begin{aligned}
&\frac{d_m}{F_m^{(0)}}=\frac{\sum_{k=1}^{m}\mu_k+\sum_{k=1}^{m}\mu_k c_k D_{k-1}}{b_0+\sum_{k=1}^{m}\mu_k c_k H_{k-1}}\leqslant\\
&\frac{\tilde{d}b_0+(\tilde{d}-1)\sum_{k=1}^{m}\mu_k c_k+\sum_{k=1}^{m}\mu_k c_k D_{k-1}}{b_0+\sum_{k=1}^{m}\mu_k c_k H_{k-1}}=\\
&\frac{\tilde{d}b_0+\sum_{k=1}^{m}\mu_k c_k(\tilde{d}-1+D_{k-1})}{b_0+\sum_{k=1}^{m}\mu_k c_k H_{k-1}}\leqslant\\
&\frac{\tilde{d}b_0+\tilde{d}\sum_{k=1}^{m}\mu_k c_k H_{k-1}}{b_0+\sum_{k=1}^{m}\mu_k c_k H_{k-1}}=\tilde{d},
\end{aligned}
$$

所以当 $n=m$ 时式(10)中第 1 式成立. 而由此结论及归纳假设知

$$
\begin{aligned}
D_m+\tilde{d}&=d_m+D_{m-1}+\tilde{d}\leqslant\\
&\tilde{d}F_m^{(0)}+\tilde{d}H_{m-1}=\tilde{d}H_m,
\end{aligned}
$$

即式(10)中第 2 式当 $n=m$ 时也成立. 所以由归纳法得证式(10).

由式(5)的定义和式(10)的事实, 可以得出 $\hat{d}\leqslant\tilde{d}$. 因此, 当 $\tilde{d}<+\infty$时, $\hat{d}<+\infty$. 由此事实和文献[7]的引理 4.54, 定理的最后一个结论立刻得证.

定理 1 的证明是在毛永华教授的帮助下完成的, 此外作者还与陈木法院士进行了有益讨论, 在此一并表示感谢.

3　参考文献

[1] Anderson W J. Continuous-time Markov Chains[M]. New York: Springer-Verlag, 1991

[2] Brockwell P J. The extinction time of a birth, death and catastrophe process and of a related diffusion model[J]. Adv Appl Prob, 1985, 17: 42

[3] Brockwell P J. The extinction time of a general birth and death process with catastrophes[J]. J Appl Prob, 1986, 23: 851

[4] Brockwell P J, Gani J, Resnick S I. Birth, immigration

and catastrophe processes[J]. Adv Appl Prob, 1982, 14: 709

[5] Cairns B, Pollett P K. Extinction times for a general birth, death and catastrophe process[J]. J Appl Prob, 2004, 41: 1211

[6] Chen Mufa. Single birth processes[J]. Chinese Ann Math: B, 1999, 20: 77

[7] Chen Mufa. From Markov chains to non-equilibrium particle systems[M]. 2nd ed. Singapore: World Scientific, 2004

[8] Mao Yonghua, Zhang Yuhui. Exponential ergodicity for single birth processes[J]. J Appl Prob, 2004, 41(4): 1022

[9] Pakes A G. The Markov branching-catastrophe process [J]. Stochastic Proc Appl, 1986, 23: 1

[10] Yan Shijian, Chen Mufa. Multidimensional Q-processes [J]. Chinese Ann Math: B, 1986, 7: 90

[11] Zhang Jiankang. On the generalized birth and death processes (I)[J]. Acta Math Sci, 1984, 4: 241

[12] Zhang Yuhui. Strong ergodicity for single-birth processes[J]. J Appl Prob, 2001, 38(1): 270

[13] 张余辉. 单生过程首中时的各阶矩[J]. 北京师范大学学报: 自然科学版, 2003, 39(4): 430

[14] 张余辉. 单生过程击中时与平稳分布[J]. 北京师范大学学报: 自然科学版, 2004, 40(2): 157

[15] 张余辉, 赵倩倩. 几类单生Q矩阵[J]. 北京师范大学学报: 自然科学版, 2006, 42(2): 111

[16] 张余辉, 赵倩倩. 几类单生Q矩阵(续)[J]. 北京师范大学学报: 自然科学版, 2008, 44(1): 4

[17] 张余辉. 关于单生过程指数遍历和ℓ-遍历的注记[J]. 北京师范大学学报: 自然科学版, 2010, 46(1): 10

[18] 张余辉. 相邻状态死亡速率成比例的单生Q矩阵[J]. 北京师范大学学报: 自然科学版, 2010, 46(6): 651

[19] Chen A Y, Pollett P K, Zhang H J, et al. Uniqueness criteria for continuous-time Markov chains with general transition structure[J]. Adv Appl Prob, 2005, 37: 1056

BIRTH-DEATH-CATASTROPHE TYPE SINGLE BIRTH Q-MATRICES

ZHANG Yuhui

(School of Mathematical Sciences, Beijing Normal University, 100875, Beijing, China)

Abstract Single birth Q-matrices of the birth-death-catastrophe type were studied in this paper. Criteria or sufficient conditions, similar to those for birth-death processes, were obtained on uniqueness, recurrence and ergodicity for these single birth processes.

Key words single birth processes; uniqueness; recurrence; ergodicity