相邻状态死亡速率成比例的单生 Q 矩阵*

张余辉
(北京师范大学数学科学学院, 100875, 北京)

摘要　研究了相邻状态死亡速率具有一定比例关系的一类单生 Q 矩阵, 它包括了生灭矩阵; 得到了其决定的单生过程唯一、常返、遍历、ℓ遍历和强遍历的判别准则, 指数遍历的必要条件和充分条件以及平稳分布的显式表达式.

关键词　单生过程; 平稳分布; 遍历; 指数遍历; 强遍历; ℓ遍历

1　引言和主要结果

通常研究的单生 Q 矩阵是保守全稳定的 Q 矩阵即对一切 $i\geqslant 0$ 有 $q_i:=-q_{ii}=\sum_{j\neq i}q_{ij}<\infty$, 而且对所有的 $i\geqslant 0$ 和 $j\geqslant 2$ 满足 $q_{i,i+1}>0$, $q_{i,i+j}=0$. 其决定的 Q 过程称为单生过程.

对单生过程, 国内外已经有不少研究, 参看文献[1-17]及其所引文献. 在文献[6-8]和[10-17]中重点研究了单生过程的唯一性、常返性、(普通)遍历、指数遍历和强遍历性以及ℓ遍历性等显式判别准则, 特别地, 文献[15-16]研究了几类特定单生过程的若干性质. 本文是这些工作的继续和推广. 我们考虑一类特殊的单生 Q 矩阵: 相邻状态死亡速率具有一定比例关系的单生 Q 矩阵, 详细地说,

$$q_{i+1,j}=p_iq_{ij},\ 0\leqslant j\leqslant i-1,\tag{1}$$

其中 $p_i\geqslant 0\,(i\geqslant 1)$. 为方便起见, 本文约定 $p_{-1}=p_0=0$ 和 $0/0=0$.

满足式(1)的这类单生 Q 矩阵, 特别地, 包括了生灭矩阵(即是 $p_i=0\,(i\geqslant 1)$ 的情形), 同时也涵盖前述文献中不少例子, 如文献[15-16]的全部单生 Q 矩阵, 文献[8]的例 2.1 等等.

为叙述我们的主要结果, 令

$$q_i^{(j)}=\sum_{k=0}^{j}q_{ik}\,(0\leqslant j\leqslant i-1,\ i,j\in\mathbf{Z}_+),$$

其中 $\mathbf{Z}_+=\{0,1,2,\cdots\}$. 定义

$$m_0=\frac{1}{q_{01}},\ m_i=\frac{1}{q_{i,i+1}}\Big(1+\sum_{k=0}^{i-1}q_i^{(k)}m_k\Big),\quad i\geqslant 1,$$

$$F_i^{(i)}=1,\ F_i^{(j)}=\frac{1}{q_{i,i+1}}\sum_{k=j}^{i-1}q_i^{(k)}F_k^{(j)},\quad 0\leqslant j\leqslant i-1,$$

$$d_0=0,\ d_i=\frac{1}{q_{i,i+1}}\Big(1+\sum_{k=0}^{i-1}q_i^{(k)}d_k\Big),\quad i\geqslant 1.$$

文献[12]告诉我们, 此 3 组记号有如下关系:

$$m_i=q_{01}^{-1}F_i^{(0)}+d_i\,(i\geqslant 0).$$

再定义

$$d=\sup_{i\geqslant 1}\frac{\sum_{j=0}^{i-1}d_j}{\sum_{j=0}^{i-1}F_j^{(0)}}=\sup_{i\geqslant 0}\frac{\sum_{j=0}^{i}d_j}{\sum_{j=0}^{i}F_j^{(0)}},$$

$$\bar d=\sup_{i\geqslant 0}\frac{d_i}{F_i^{(0)}}.\tag{2}$$

我们的第 1 个主要结论如下.

定理 1　给定一个单生 Q 矩阵满足式(1). 则其决定唯一的 Q 过程当且仅当

$$\sum_{i=0}^{\infty}F_i^{(0)}\sum_{k=0}^{i}\frac{1-p_{k-1}}{q_{k,k+1}F_k^{(0)}}=+\infty,\tag{3}$$

其中

$$F_0^{(0)}=1,\ F_i^{(0)}=\prod_{j=1}^{i}\frac{q_{j,j-1}+p_{j-1}q_{j-1}}{q_{j,j+1}},\ i\geqslant 1.\tag{4}$$

假定此类单生 Q 矩阵正则且不可约, 则其决定的 Q 过程常返当且仅当 $\sum_{i=0}^{\infty}F_i^{(0)}=+\infty$. 若再假设 $p_i\leqslant 1\,(i\geqslant 1)$, 则其决定的 Q 过程遍历(正常返)当且仅当

$$(d=\bar d=)\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1-p_{i-1}}{q_{i,i+1}F_i^{(0)}}<+\infty.\tag{5}$$

此时, 过程的平稳分布为:

$$\pi_0=\frac{1}{1+q_{01}d},$$

$$\pi_i=\Big(1-\frac{p_iq_{i,i+1}}{q_{i+1,i}+p_iq_i}\Big)\frac{q_{01}\pi_0}{q_{i,i+1}F_i^{(0)}},\ i\geqslant 1.\tag{6}$$

注 1　对满足式(1)的单生 Q 矩阵, 不可约的假设是蕴含 $q_{10}>0$. 否则, 若 $q_{10}=0$, 则由式(1)推出 $q_{i0}=0\ (i\geqslant 1)$, 这与不可约矛盾.

定理 2　给定一个单生 Q 矩阵满足式(1). 假定

* 国家"九七三"计划资助项目(2006CB805901); 国家自然科学基金资助项目(10721091)
收稿日期: 2010-01-13

其正则不可约, 其决定的 Q 过程遍历, 而且由式(4)定义的 $F_i^{(0)}$ 满足

$$\lim_{i\to\infty}\frac{q_{ij}}{q_{i,i+1}F_i^{(0)}}=0,\ j\geqslant 0. \tag{7}$$

则过程的平稳分布为:

$$\pi_0=\frac{1}{1+q_{01}M},$$

$$\pi_i=\left(1-\frac{p_iq_{i,i+1}}{q_{i+1,i}+p_iq_i}\right)\frac{q_{01}\pi_0}{q_{i,i+1}F_i^{(0)}},\ i\geqslant 1, \tag{8}$$

其中

$$M=\sum_{i=0}^{\infty}\left(1-\frac{p_iq_{i,i+1}}{q_{i+1,i}+p_iq_i}\right)\frac{1}{q_{i,i+1}F_i^{(0)}}. \tag{9}$$

注 2　注意上述定理并没有定理 1 中“$p_i\leqslant 1$ $(i\geqslant 1)$”的假设, 但加了条件(7). 另外, 从平稳分布(6)和(8)可以看出式(5)和(9)中 2 个收敛级数是相等的, 即 $d=M$.

对单生 Q 矩阵决定的单生过程 $X(t)$, 定义状态 i 的击中时 $\sigma_i:=\inf\{t>\eta_1: X(t)=i\}$, 其中 $\eta_1:=\inf\{t>0: X(t)\neq X(0)\}$ 为 $X(t)$ 的第一次跳时刻. 记击中时的 ℓ 阶矩为 $m_{ij}^{(\ell)}:=E_i\sigma_j^{\ell}$, 其中 E_i 表示从状态 i 出发的数学期望. 定义

$$d_0^{(\ell)}=0,$$

$$d_i^{(\ell)}=\frac{1}{q_{i,i+1}}\left(m_{i0}^{(\ell-1)}+\sum_{k=0}^{i-1}q_i^{(k)}d_k^{(\ell)}\right),\ i\geqslant 1. \tag{10}$$

再令

$$d^{(\ell)}=\sup_{i\geqslant 1}\frac{\sum_{j=0}^{i-1}d_j^{(\ell)}}{\sum_{j=0}^{i-1}F_j^{(0)}}=\sup_{i\geqslant 0}\frac{\sum_{j=0}^{i}d_j^{(\ell)}}{\sum_{j=0}^{i}F_j^{(0)}},$$

$$\bar{d}^{(\ell)}=\sup_{i\geqslant 0}\frac{d_i^{(\ell)}}{F_i^{(0)}},\ \ell\geqslant 1. \tag{11}$$

注意到对所有 $i\geqslant 1$ 有 $m_{i0}^{(0)}=1$ 成立. 当 $\ell=1$ 时, 我们分别省去式(10)和(11)中的上标(ℓ), 简记为 d_i, d 和 $\bar{d}$, 这样与前面的定义是一致的(如式(2)). 另外, 文献[13]中证明了以下公式:

$$m_{i0}^{(\ell)}=\ell\sum_{j=0}^{i-1}\left(F_j^{(0)}d^{(\ell)}-d_j^{(\ell)}\right),\ i\geqslant 1,\ \ell\geqslant 1. \tag{12}$$

所以式(10)中的 $m_{i0}^{(\ell-1)}$ 是递归可计算的. 我们的第 3 个主要结果如下.

定理 3　给定一个单生 Q 矩阵满足式(1). 假设 $0\leqslant p_i\leqslant 1\ (i\geqslant 1)$ 且其对应的 Q 过程常返. 则有对于每个 $\ell\geqslant 0$, $m_{i0}^{(\ell)}$ 关于 $i\geqslant 1$ 是单调增的且

$$m_{i0}^{(\ell)}=\ell\sum_{j=0}^{i-1}F_j^{(0)}\sum_{k=j+1}^{\infty}\frac{m_{k0}^{(\ell-1)}-p_{k-1}m_{k-1,0}^{(\ell-1)}}{q_{k,k+1}F_k^{(0)}},\ i\geqslant 1,\ \ell\geqslant 1. \tag{13}$$

进一步, 有以下 4 个结论成立:

1) 过程是 ℓ 遍历的当且仅当

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{m_{k0}^{(\ell-1)}-p_{k-1}m_{k-1,0}^{(\ell-1)}}{q_{k,k+1}F_k^{(0)}}<\infty,$$

其中 $\ell\geqslant 1$.

2) 过程强遍历的充分必要条件是

$$\sum_{i=0}^{\infty}F_i^{(0)}\sum_{j=i+1}^{\infty}\frac{1-p_{j-1}}{q_{j,j+1}F_j^{(0)}}<\infty.$$

3) 过程指数遍历的必要条件是 $\dot{q}:=\inf_{i\geqslant 0}q_i>0$ 和

$$\delta:=\sup_{i\geqslant 1}\sum_{j=0}^{i-1}F_j^{(0)}\sum_{j=i}^{\infty}\frac{1-p_{j-1}}{q_{j,j+1}F_j^{(0)}}<\infty. \tag{14}$$

4) 假定 $\sup_{i\geqslant 0}p_i<1$. 则 $\dot{q}>0$ 和 $\delta<\infty$ 是过程指数遍历的充分条件.

2　定理的证明

定理 1 的证明　由式(1)易知, 对所有的 $0\leqslant j\leqslant i-1$, 有 $q_{i+1}^{(j)}=p_iq_i^{(j)}$. 再由定义得到

$$F_{j+1}^{(j)}=\frac{q_{j+1,j}+p_jq_j-p_jq_{j,j+1}}{q_{j+1,j+2}},$$

$$F_i^{(j)}=\frac{q_{i,i-1}+p_{i-1}q_{i-1}}{q_{i,i+1}}F_{i-1}^{(j)},\ 0\leqslant j\leqslant i-2,$$

因此,

$$F_i^{(j)}=\prod_{k=j+1}^{i}\frac{q_{k,k-1}+p_{k-1}q_{k-1}}{q_{k,k+1}}\cdot\left(1-\frac{p_jq_{j,j+1}}{q_{j+1,j}+p_jq_j}\right),\ 0\leqslant j\leqslant i-1.$$

注意到 $p_0=0$, 因此, 当 $j=0$ 时, 特别地有

$$F_i^{(0)}=\frac{q_{i,i-1}+p_{i-1}q_{i-1}}{q_{i,i+1}}F_{i-1}^{(0)},\ i\geqslant 1,$$

所以, 我们得到

$$F_i^{(0)}=\prod_{k=1}^{i}\frac{q_{k,k-1}+p_{k-1}q_{k-1}}{q_{k,k+1}},\ i\geqslant 1. \tag{15}$$

继而

$$F_i^{(j)}=\left(1-\frac{p_jq_{j,j+1}}{q_{j+1,j}+p_jq_j}\right)\frac{F_i^{(0)}}{F_j^{(0)}},\ 0\leqslant j\leqslant i-1. \tag{16}$$

同时, 由定义得到

$$d_0=0,\ d_i=\frac{1-p_{i-1}}{q_{i,i+1}}+\frac{q_{i,i-1}+p_{i-1}q_{i-1}}{q_{i,i+1}}d_{i-1},\ i\geqslant 1.$$

用数学归纳法不难证明

$$d_i=F_i^{(0)}\sum_{k=1}^{i}\frac{1-p_{k-1}}{q_{k,k+1}F_k^{(0)}},\ i\geqslant 0. \tag{17}$$

因此,

$$m_i=F_i^{(0)}\sum_{k=0}^{i}\frac{1-p_{k-1}}{q_{k,k+1}F_k^{(0)}},\ i\geqslant 0. \tag{18}$$

由文献[7]可知, 其决定的 Q 过程唯一, 当且仅当 $\sum_{i=0}^{\infty}m_i=+\infty$, 再结合式(15)和(18)知, 此即式(3)和(4). 同样由文献[7]知, 其决定的 Q 过程常返当且

仅当 $\sum_{i=0}^{\infty} F_i^{(0)} = +\infty$, 由此得到常返性的判别准则.

下面假设 $p_i \leqslant 1\ (i \geqslant 0)$. 由式(2)、(17)和 Stolz 定理知

$$d \geqslant \lim_{i\to\infty} \frac{\sum_{j=0}^{i} d_j}{\sum_{j=0}^{i} F_j^{(0)}} = \lim_{i\to\infty}\frac{d_i}{F_i^{(0)}} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-p_{k-1}}{q_{k,k+1}F_k^{(0)}} = \hat{d}.$$

而显然 $d \leqslant \hat{d}$, 因此, 得到

$$d = \hat{d} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1-p_{i-1}}{q_{i,i+1}F_i^{(0)}}. \qquad (19)$$

由文献[7]知, 其决定的 Q 过程遍历当且仅当 $d<\infty$, 所以由式(19)立刻得到遍历性的准则(5).

对 $\ell \geqslant 0$, 定义

$$c_\ell = \sup_{i\geqslant \ell+1} \frac{\sum_{j=\ell}^{i-1} m_j}{\sum_{j=\ell}^{i-1}F_j^{(\ell)}} = \sup_{i\geqslant\ell}\frac{\sum_{j=\ell}^{i} m_j}{\sum_{j=\ell}^{i}F_j^{(\ell)}},\quad \hat{c}_\ell = \sup_{i\geqslant\ell}\frac{m_i}{F_i^{(\ell)}}.$$

一般 $c_\ell \leqslant \hat c_\ell$, 但由 $0\leqslant p_i \leqslant 1\ (i\geqslant 0)$ 这个假设, 结合式(16)、(18)以及 Stolz 定理知

$$c_\ell \geqslant \lim_{i\to\infty}\frac{\sum_{j=\ell}^i m_j}{\sum_{j=\ell}^i F_j^{(\ell)}} = \lim_{i\to\infty}\frac{m_i}{F_i^{(\ell)}} =$$

$$\left(1-\frac{p_\ell q_{\ell,\ell+1}}{q_{\ell+1,\ell}+p_\ell q_\ell}\right)^{-1}F_\ell^{(0)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1-p_{k-1}}{q_{k,k+1}F_k^{(0)}} = \hat c_\ell.$$

因此得到

$$c_\ell = \hat c_\ell = \left(1-\frac{p_\ell q_{\ell,\ell+1}}{q_{\ell+1,\ell}+p_\ell q_\ell}\right)^{-1}F_\ell^{(0)}\sum_{i=0}^\infty \frac{1-p_{i-1}}{q_{i,i+1}F_i^{(0)}},\ \ell\geqslant 0.$$

由文献[14]知, 过程的平稳分布为 $\pi_\ell = 1/(q_{\ell,\ell+1}c_\ell)$ $(\ell\geqslant 0)$, 结合上式立刻计算出式(6).

注 3　在允许 $p_i>1$ 的情形. 注意由式(17)知, 依然有级数 $\sum_{k=1}^\infty (1-p_{k-1})/(q_{k,k+1}F_k^{(0)})$ 的部分和

$$\sum_{k=1}^i \frac{1-p_{k-1}}{q_{k,k+1}F_k^{(0)}} = \frac{d_i}{F_i^{(0)}} \geqslant 0,\ i\geqslant 0.$$

此时, 式(5)还是过程遍历的充分条件. 因为式(5)成立即 $\sum_{k=1}^\infty(1-p_{k-1})/(q_{k,k+1}F_k^{(0)})<+\infty$, 则该级数部分和序列有界, 从而 $d\leqslant\hat d<\infty$, 即得证过程遍历.

定理 2 的证明　只需验证式(8)的 (π_i) 满足下列方程

$$\sum_i \pi_i q_{ij} = 0,\ j\geqslant 0,$$

即

$$\sum_i \pi_i q_{i0}=0,\quad \sum_i\pi_i q_{ij}=0,\ j\geqslant 1. \qquad (20)$$

从式(4)中注意到

$$\frac{F_{i+1}^{(0)}}{F_i^{(0)}} = \frac{q_{i+1,i}+p_iq_i}{q_{i+1,i+2}},\ i\geqslant 0.$$

继而由上式可以得到

$$\left(1-\frac{p_iq_{i,i+1}}{q_{i+1,i}+p_iq_i}\right)\frac{1}{q_{i,i+1}F_i^{(0)}} = \frac{1}{q_{i,i+1}F_i^{(0)}} - \frac{p_i}{q_{i+1,i+2}F_{i+1}^{(0)}},\ i\geqslant 0. \qquad (21)$$

下面先验证式(20)的第 1 式. 由式(8)知, 等价于验证

$$\sum_{i=0}^\infty \left(1-\frac{p_iq_{i,i+1}}{q_{i+1,i}+p_iq_i}\right)\frac{q_{i0}}{q_{i,i+1}F_i^{(0)}} = 1.$$

由式(21)和 $p_iq_{i0}=p_{i+1,0}\ (i\geqslant 1)$ 得出: 对 $k\geqslant 1$,

$$\sum_{i=1}^k\left(1-\frac{p_iq_{i,i+1}}{q_{i+1,i}+p_iq_i}\right)\frac{q_{i0}}{q_{i,i+1}F_i^{(0)}} =$$

$$\sum_{i=1}^k\left(\frac{q_{i0}}{q_{i,i+1}F_i^{(0)}} - \frac{q_{i+1,0}}{q_{i+1,i+2}F_{i+1}^{(0)}}\right) = \frac{q_{10}}{q_{12}F_1^{(0)}} - \frac{q_{k+1,0}}{q_{k+1,k+2}F_{k+1}^{(0)}}.$$

再结合条件(7)得证

$$\sum_{i=0}^\infty\left(1-\frac{p_iq_{i,i+1}}{q_{i+1,i}+p_iq_i}\right)\frac{q_{i0}}{q_{i,i+1}F_i^{(0)}} = \frac{q_{10}}{q_{12}F_1^{(0)}} = 1.$$

接着验证式(20)的第 2 式. 由于是单生矩阵, 等价于验证

$$\sum_{i=j}^\infty \pi_i q_{i,j+1} = 0,\ j\geqslant 0.$$

由式(8)知, 又等价于证明

$$\left(1-\frac{p_jq_{j,j+1}}{q_{j+1,j}+p_jq_j}\right)\frac{q_{j,j+1}}{q_{j,j+1}F_j^{(0)}} +$$

$$\sum_{i=j+2}^\infty\left(1-\frac{p_iq_{i,i+1}}{q_{i+1,i}+p_iq_i}\right)\frac{q_{i,j+1}}{q_{i,i+1}F_i^{(0)}} =$$

$$\left(1-\frac{p_{j+1}q_{j+1,j+2}}{q_{j+2,j+1}+p_{j+1}q_{j+1}}\right)\frac{q_{j+1}}{q_{j+1,j+2}F_{j+1}^{(0)}},\ j\geqslant 0.$$

由式(21)和 $p_iq_{i,j+1}=p_{i+1,j+1}\ (i\geqslant j+2)$ 得出

$$\sum_{i=j+2}^k\left(1-\frac{p_iq_{i,i+1}}{q_{i+1,i}+p_iq_i}\right)\frac{q_{i,j+1}}{q_{i,i+1}F_i^{(0)}} =$$

$$\sum_{i=j+2}^k\left(\frac{q_{i,j+1}}{q_{i,i+1}F_i^{(0)}} - \frac{q_{i+1,j+1}}{q_{i+1,i+2}F_{i+1}^{(0)}}\right) =$$

$$\frac{q_{j+2,j+1}}{q_{j+2,j+3}F_{j+2}^{(0)}} - \frac{q_{k+1,j+1}}{q_{k+1,k+2}F_{k+1}^{(0)}},\ k\geqslant j+2.$$

所以, 再由式(7)和(21)得到

$$\left(1-\frac{p_jq_{j,j+1}}{q_{j+1,j}+p_jq_j}\right)\frac{q_{j,j+1}}{q_{j,j+1}F_j^{(0)}} +$$

$$\sum_{i=j+2}^\infty\left(1-\frac{p_iq_{i,i+1}}{q_{i+1,i}+p_iq_i}\right)\frac{q_{i,j+1}}{q_{i,i+1}F_i^{(0)}} =$$

$$\frac{q_{j,j+1}}{q_{j,j+1}F_j^{(0)}} - \frac{p_jq_{j,j+1}}{q_{j+1,j+2}F_{j+1}^{(0)}} + \frac{q_{j+2,j+1}}{q_{j+2,j+3}F_{j+2}^{(0)}} =$$

$$\frac{q_{j+1,j}+p_jq_j}{q_{j+1,j+2}F_{j+1}^{(0)}} - \frac{p_jq_{j,j+1}}{q_{j+1,j+2}F_{j+1}^{(0)}} + \frac{q_{j+2,j+1}}{q_{j+2,j+3}F_{j+2}^{(0)}} =$$

$$\frac{q_{j+1}-q_{j+1,j+2}}{q_{j+1,j+2}F_{j+1}^{(0)}} + \frac{q_{j+2,j+1}}{q_{j+2,j+3}F_{j+2}^{(0)}} =$$

$$\frac{q_{j+1}}{q_{j+1,j+2}F_{j+1}^{(0)}}-\frac{q_{j+2,j+1}+p_{j+1}q_{j+1}}{q_{j+2,j+3}F_{j+2}^{(0)}}+\frac{q_{j+2,j+1}}{q_{j+2,j+3}F_{j+2}^{(0)}}=$$

$$\frac{q_{j+1}}{q_{j+1,j+2}F_{j+1}^{(0)}}-\frac{p_{j+1}q_{j+1}}{q_{j+2,j+3}F_{j+2}^{(0)}}=$$

$$\left(1-\frac{p_{j+1}q_{j+1,j+2}}{q_{j+2,j+1}+p_{j+1}q_{j+1}}\right)\frac{q_{j+1}}{q_{j+1,j+2}F_{j+1}^{(0)}},\ j\geqslant 0.$$

由此，得证命题结论.

定理3的证明 (1) 由定义(10)容易得到

$$d_0^{(\ell)}=0,\ d_i^{(\ell)}=\frac{m_{i0}^{(\ell-1)}-p_{i-1}m_{i-1,0}^{(\ell-1)}}{q_{i,i+1}}+\frac{q_{i,i-1}+p_{i-1}q_{i-1}}{q_{i,i+1}}d_{i-1}^{(\ell)},\ i\geqslant 1.$$

再用数学归纳法可以得到

$$d_i^{(\ell)}=F_i^{(0)}\sum_{k=1}^{i}\frac{m_{k0}^{(\ell-1)}-p_{k-1}m_{k-1,0}^{(\ell-1)}}{q_{k,k+1}F_k^{(0)}},\ i\geqslant 0.\quad(22)$$

如果 $m_{i0}^{(\ell-1)}$ 关于 $i\geqslant 1$ 是单调增的，则我们有

$$\frac{m_{i0}^{(\ell-1)}-p_{i-1}m_{i-1,0}^{(\ell-1)}}{q_{i,i+1}F_i^{(0)}}\geqslant\frac{(1-p_{i-1})m_{i0}^{(\ell-1)}}{q_{i,i+1}F_i^{(0)}}\geqslant 0,\ i\geqslant 1.\quad(23)$$

注意上面非负性的证明用到了 $p_i\leqslant 1(i\geqslant 0)$ 的假设.

再由式(11)、(22)和 Stolz 定理知

$$d^{(\ell)}\geqslant\lim_{i\to\infty}\frac{\sum_{j=0}^{i}d_j^{(\ell)}}{\sum_{j=0}^{i}F_j^{(0)}}=\lim_{i\to\infty}\frac{d_i^{(\ell)}}{F_i^{(0)}}=$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{m_{k0}^{(\ell-1)}-p_{k-1}m_{k-1,0}^{(\ell-1)}}{q_{k,k+1}F_k^{(0)}}=\bar{d}^{(\ell)}.\quad(24)$$

而显然 $d^{(\ell)}\leqslant\bar{d}^{(\ell)}$，因此，我们得到

$$d^{(\ell)}=\bar{d}^{(\ell)}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{m_{i0}^{(\ell-1)}-p_{i-1}m_{i-1,0}^{(\ell-1)}}{q_{i,i+1}F_i^{(0)}}.\quad(25)$$

下面证明对于每个 $\ell\geqslant 0$，$m_{i0}^{(\ell)}$ 关于 $i\geqslant 1$ 的确是单调增的. 显然结论对 $m_{i0}^{(0)}(=1)$ 成立. 由式(12)、(17)和(19)知,

$$m_{i0}^{(1)}=\sum_{j=0}^{i-1}F_j^{(0)}\sum_{k=j+1}^{\infty}\frac{1-p_{k-1}}{q_{k,k+1}F_k^{(0)}},\ i\geqslant 1.$$

因此 $m_{i0}^{(1)}$ 是单调增的. 此时由前面的讨论知

$$d^{(2)}=\bar{d}^{(2)}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{m_{i0}^{(1)}-p_{i-1}m_{i-1,0}^{(1)}}{q_{i,i+1}F_i^{(0)}}.$$

再用式(12)和(22)推出

$$m_{i0}^{(2)}=2\sum_{j=0}^{i-1}F_j^{(0)}\sum_{k=j+1}^{\infty}\frac{m_{k0}^{(1)}-p_{k-1}m_{k-1,0}^{(1)}}{q_{k,k+1}F_k^{(0)}},\ i\geqslant 1.$$

进而得到 $m_{i0}^{(2)}$ 的单调增性质. 因此，由归纳法不难得出，对于每个 $\ell\geqslant 0$，$m_{i0}^{(\ell)}$ 是单调增的，而且结合式(12)、(22)和(25)可以证明式(13)成立.

(2) 由文献[17]知，其决定的 Q 过程 ℓ 遍历当且仅当 $d^{(\ell)}<\infty$，再结合式(25)立刻得到 ℓ 遍历的判别准则. 由文献[12]知，过程强遍历当且仅当 $\sup_{i\geqslant 0}\sum_{j=0}^{i}(F_j^{(0)}d-d_j)<\infty$. 再由式(17)和(19)即得证强遍历的判别准则.

(3) 由式(13)和 $m_{i0}^{(\ell-1)}$ 单调增性质，我们有

$$m_{i0}^{(\ell)}\geqslant\ell\sum_{j=0}^{i-1}F_j^{(0)}\sum_{k=i}^{\infty}\frac{(1-p_{k-1})m_{k0}^{(\ell-1)}}{q_{k,k+1}F_k^{(0)}}\geqslant$$

$$\ell\left(\sum_{j=0}^{i-1}F_j^{(0)}\sum_{k=i}^{\infty}\frac{1-p_{k-1}}{q_{k,k+1}F_k^{(0)}}\right)m_{i0}^{(\ell-1)},\ \ell\geqslant 2.$$

同时，注意到

$$m_{i0}^{(1)}\geqslant\sum_{j=0}^{i-1}F_j^{(0)}\sum_{k=i}^{\infty}\frac{1-p_{k-1}}{q_{k,k+1}F_k^{(0)}}.$$

因此，归纳得到

$$m_{i0}^{(\ell)}\geqslant\ell!\left(\sum_{j=0}^{i-1}F_j^{(0)}\sum_{k=i}^{\infty}\frac{1-p_{k-1}}{q_{k,k+1}F_k^{(0)}}\right)^{\ell},\ \ell\geqslant 1.$$

以下的证明参见文献[8]. 由过程指数遍历知存在 λ 满足 $0<\lambda<q_i$(对于一切 $i\geqslant 0$)，使得 $E_i\mathrm{e}^{\lambda\sigma_0}<\infty(i\geqslant 1)$. 再由其 Taylor 展开式及上式推出

$$\sum_{\ell=1}^{\infty}\left(\lambda\sum_{j=0}^{i-1}F_j^{(0)}\sum_{k=i}^{\infty}\frac{1-p_{k-1}}{q_{k,k+1}F_k^{(0)}}\right)^{\ell}<\infty,$$

因此，我们有

$$\sum_{j=0}^{i-1}F_j^{(0)}\sum_{k=i}^{\infty}\frac{1-p_{k-1}}{q_{k,k+1}F_k^{(0)}}<\lambda^{-1},\ i\geqslant 1.$$

再关于 i 取上确界得 $\delta\leqslant\lambda^{-1}<\infty$. 指数遍历的必要条件由此得证.

(4) 至于指数遍历充分条件的证明，方法完全类似于文献[8,15,16]. 由于篇幅所限，这里我们不再给出证明细节.

注4 由式(5)和(17)可以知道，条件(14)即为

$$\delta=\sup_{i\geqslant 0}\sum_{j=0}^{i}F_j^{(0)}\left(d-\frac{d_i}{F_i^{(0)}}\right)<\infty.\quad(26)$$

这正是文献[8]的注3中所猜想的单生过程指数遍历的判别准则. 故在 $0\leqslant p_i\leqslant c<1(i\geqslant 1)$ 的情形，看起来我们证明了该猜想. 但是若定义

$$\delta':=\sup_{i\geqslant 0}\sum_{j=0}^{i}F_j^{(0)}\sum_{j=}^{\infty}\frac{1}{q_{j,j+1}F_j^{(0)}}.$$

由上式和(14)，显然 $\delta\leqslant\delta'$，但是此时，$(1-c)\delta'\leqslant\delta$，所以，$\delta<\infty$ 等价于 $\delta'<\infty$. 故在此情形下"$\delta'<\infty$"也是指数遍历的判别准则. 但在一般情形时，文献[8]证明了"$\delta'<\infty$"是单生过程指数遍历的充分条件，而文献[17]中的例2.1说明它并不是指数遍历必要条件. 所以，若能够去掉定理3中(4)的"$\sup_{i\geqslant 1}p_i<1$"假定，此时才能说，对满足式(1)的单生 Q 矩阵，我们真正证明了文献[18]的猜想. 直观上，p_i 越大，过程越容易指数遍历，而实际上式(14)或(26)也是越容易成立，因此，有理由相信该猜想是正确的. 文献[8]中的方法稍加改进，能够处理"$0\leqslant p_i\leqslant c<1(i\geqslant 1)$"的

情形，但是处理一般"$0 \leqslant p_i \leqslant 1\ (i \geqslant 1)$"情形有本质困难，说明该方法还不够精细.

3　随机可比性、击中时矩与遍历性

本节探讨和研究 Q 过程随机可比性质与击中时矩及各种遍历性的关系. 给定 $\mathbf{Z}_+$ 上 2 个马氏过程 $X^{(k)}(t)$，其转移函数记为 $P^{(k)}(t) = (p_{ij}^{(k)}(t))$，$k = 1, 2$. $X^{(1)}(t)$ 与 $X^{(2)}(t)$ 随机可比是指

$$\sum_{j \geqslant k} p_{ij}^{(1)}(t) \leqslant \sum_{j \geqslant k} p_{mj}^{(2)}(t),\ i \leqslant m,\ k \geqslant 0,\ t \geqslant 0.$$

若 $X^{(1)}(t) = X^{(2)}(t)$ 且随机可比，则称该过程随机单调. 文献[7]告诉我们，对 2 个正则 Q 矩阵 $Q^{(k)} = (q_{ij}^{(k)})\ (k = 1, 2)$ 而言，其决定的 Q 过程 $X^{(1)}(t)$ 与 $X^{(2)}(t)$ 随机可比当且仅当 Q 矩阵 $Q^{(1)}$ 与 $Q^{(2)}$ 可比，即

$$\sum_{j \geqslant k} q_{ij}^{(1)} \leqslant \sum_{j \geqslant k} q_{mj}^{(2)}(t),\ i \leqslant m,\ k \leqslant i \text{ 或 } k \geqslant m + 1. \tag{27}$$

若 $Q^{(1)} = Q^{(2)}$ 且式(27)成立，则称该 Q 矩阵单调. 考虑 2 个过程的状态 0 击中时 $\tau_0^{(k)} = \inf\{t > 0: X^{(k)}(t) = 0\}\ (k = 1, 2)$. 我们有以下结论.

命题 1　给定 2 个正则 Q 矩阵 $Q^{(k)} = (q_{ij}^{(k)})\ (k = 1, 2)$. 若 $Q^{(1)}$ 与 $Q^{(2)}$ 可比即式(27)成立，则状态 0 击中时的任意 n 阶矩有

$$E_i \tau_0^{(1)n} \leqslant E_m \tau_0^{(2)n},\ i \leqslant m,\ n \geqslant 0.$$

进而若过程 $X^{(2)}(t)$ 遍历(ℓ遍历，指数遍历或强遍历)，则过程 $X^{(1)}(t)$ 有同样的遍历性.

证明　由文献[7]知，其决定的 Q 过程 $X^{(1)}(t)$ 与 $X^{(2)}(t)$ 是随机可比的. 而由文献[18]知，必定存在正则保序的耦合马氏链 $\widetilde{P}(t) = (\widetilde{p}_{(i,m),(j,n)}(t))$，即

$$\sum_{(j,n): j \leqslant n} \widetilde{p}_{(i,m),(j,n)}(t) = 1,\ i \leqslant m,\ t \geqslant 0.$$

此即

$$P^{(i,m)}\{X^{(1)}(t) \leqslant X^{(2)}(t)\} = 1,\ i \leqslant m,\ t \geqslant 0.$$

进而由轨道的右连续性得出

$$P^{(i,m)}\{X^{(1)}(t) \leqslant X^{(2)}(t), t \geqslant 0\} = 1,\ i \leqslant m.$$

由此推出 $P^{(i,m)}\{\tau_0^{(1)} \leqslant \tau_0^{(2)}\} = 1\ (i \leqslant m)$. 所以，我们有

$$E_i \tau_0^{(1)n} \leqslant E_m \tau_0^{(2)n},\ i \leqslant m,\ n \geqslant 0.$$

特别地，

$$E_i \tau_0^{(1)n} \leqslant E_i \tau_0^{(2)n},\ i \geqslant 1,\ n \geqslant 0.$$

继而，可以得到 $E_i e^{\lambda \tau_0^{(1)}} \leqslant E_i e^{\lambda \tau_0^{(2)}}$ 对所有 $i \geqslant 1$ 和 $\lambda > 0$ 成立. 由上述事实，结合文献[7]的定理 4.44 和文献[19]，则定理的第 2 部分结论可以立刻得证.

命题 1 说明在遍历性问题研究中，Q 矩阵可比或者 Q 过程随机可比的条件要严格强于击中时矩的比较条件，文献[17]中正是构造新的生灭过程使其与原单生过程击中时矩的可比较，来研究原单生过程的各种遍历性问题. 命题 1 的应用有两个方面，一是寻找满足可比条件的新 Q 矩阵，而且所研究的遍历性对新过程而言必须是已知的或者已有判别准则，从而可以研究原过程的遍历性质；二是对随机单调的过程，现在我们知道 $E_i \tau_0^{\ell}$ 关于 i 一定是单调增函数，此性质对于多维 Q 过程的研究是有帮助的，参看文献[10]和[20]. 对正则单调的单生 Q 矩阵，若所决定的单生过程是 ℓ遍历的，则由上述性质、式(12)和文献[17]的命题 3.1 及其证明，可以推出 $d^{(\ell)} = \bar{d}^{(\ell)} < \infty$.

现在还是回到单生 Q 过程的随机可比性. 给定一个全稳定保守的单生 Q 矩阵 $Q = (q_{ij})$. 由式(27)不难验证 Q 单调当且仅当 $q_i^{(k)} \geqslant q_{i+1}^{(k)}$ 对一切 $0 \leqslant k \leqslant i - 1$ 成立. 给定 2 个正则的单生 Q 矩阵 $\overline{Q} = (\overline{q}_{ij})$ 和 $Q = (q_{ij})$. 同样容易验证其决定的单生过程随机可比当且仅当 $q_i^{(k)} \geqslant q_m^{(k)}$ 对一切 $i \leqslant m$ 和 $0 \leqslant k \leqslant i - 1$ 成立. 若是满足条件式(1)的单生 Q 矩阵，注意到式(1)等价于

$$q_{i+1}^{(k)} = p_i q_i^{(k)},\ 0 \leqslant k \leqslant i - 1,$$

其中 $p_i \geqslant 0\ (i \geqslant 1)$，当 $p_i \leqslant 1\ (i \geqslant 1)$ 时，该 Q 矩阵必定单调，由此知道该正则单生 Q 矩阵对应的过程是随机单调的.

如果所研究的正则单生 Q 矩阵 $Q = (q_{ij})$ 是单调的，即满足

$$q_{i+1}^{(k)} \leqslant q_i^{(k)},\ 0 \leqslant k \leqslant i - 1,$$

定义 $p_i = \min\limits_{0 \leqslant k \leqslant i-1} q_{i+1}^{(k)} / q_i^{(k)}\ (i \geqslant 1)$. 则可以构造新全稳定保守单生 Q 矩阵如下：$q_{ij} = q_{ij}\ (j \geqslant i + 1)$；

$$q_{10} = q_{10},\ q_{i+1,j} = p_i q_{ij},\quad 0 \leqslant j \leqslant i - 1;$$

$$q_{ii} = -q_i = -\sum_{j \neq i} q_{ij}\ (i \geqslant 0).$$

此时新单生 Q 矩阵满足式(1)且 $p_i \leqslant 1\ (i \geqslant 1)$ 的，由前面的讨论知，新单生 Q 矩阵单调，且 Q 与其可比(由于 Q 矩阵的单调性，故这两个 Q 矩阵可比仅需满足 $q_i^{(k)} \geqslant q_i^{(k)}\ (0 \leqslant k \leqslant i - 1)$). 若新单生 Q 矩阵还是正则的，由命题 1、定理 1 和定理 3 可以得到原单生过程各种遍历性的充分条件.

在本文完成过程中与马宇韬博士进行了有益讨论，特致感谢.

4　参考文献

[1]　Anderson W J. Continuous-Time Markov Chains[M]. New York: Springer-Verlag, 1991

[2]　Brockwell P J. The extinction time of a birth, death and catastrophe process and of a related diffusion model[J]. Adv Appl Prob, 1985, 17: 42

[3]　Brockwell P J. The extinction time of a general birth and death process with catastrophes[J]. J Appl Prob, 1986, 23: 851

[4] Brockwell P J, Gani J, Resnick S I. Birth, immigration and catastrophe processes[J]. Adv Appl Prob, 1982, 14: 709

[5] Cairns B, Pollett P K. Extinction times for a general birth, death and catastrophe process[J]. J Appl Prob, 2004, 41: 1211

[6] Chen Mufa. Single birth processes[J]. Chinese Ann Math: B, 1999, 20: 77

[7] Chen Mufa. From Markov chains to non-equilibrium particle systems[M]. 2nd ed. Singapore: World Scientific, 2004

[8] Mao Yonghua, Zhang Yuhui. Exponential ergodicity for single birth processes[J]. J Appl Prob, 2004, 41(4): 1022

[9] Pakes A G. The Markov branching-catastrophe process[J]. Stochastic Proc Appl, 1986, 23: 1

[10] Yan Shijian, Chen Mufa. Multidimensional Q-processes[J]. Chinese Ann Math: B, 1986, 7: 90

[11] Zhang Jiankang. On the generalized birth and death processes (I)[J]. Acta Math Sci, 1984, 4: 241

[12] Zhang Yuhui. Strong ergodicity for single-birth processes[J]. J Appl Prob, 2001, 38(1): 270

[13] 张余辉. 单生过程首中时的各阶矩[J]. 北京师范大学学报: 自然科学版, 2003, 39(4): 430

[14] 张余辉. 单生过程击中时与平稳分布[J]. 北京师范大学学报: 自然科学版, 2004, 40(2): 157

[15] 张余辉, 赵倩倩. 几类单生 Q 矩阵[J]. 北京师范大学学报: 自然科学版, 2006, 42(2): 111

[16] 张余辉, 赵倩倩. 几类单生 Q 矩阵(续)[J]. 北京师范大学学报: 自然科学版, 2008, 44(1): 4

[17] 张余辉. 关于单生过程指数遍历和 ℓ-遍历的注记[J]. 北京师范大学学报: 自然科学版, 2010, 46(1): 10

[18] 张余辉. 一维马氏链保序耦合的构造[J]. 应用概率统计, 1996, 12(4): 376

[19] Mao Yonghua. Ergodic degrees for continuous-time Markov chains[J]. Science in China: A, 2004, 47: 161

[20] Wu Bo, Zhang Yuhui. A class of multidimensional Q-processes[J]. J Appl Prob, 44(1), 2007: 226

A CLASS OF SINGLE BIRTH Q-MATRICES WITH SOME PROPORTIONAL DEATH RATES FOR NEIGHBOR STATES

ZHANG Yuhui
(School of Mathematical Sciences, Beijing Normal University, 100875, Beijing, China)

Abstract Single birth Q-matrices, including birth-death matrices, with the death rates of neighboring states having certain proportional relationships are investigated. Criteria are obtained on uniqueness, recurrence, ergodicity, ℓ-ergodicity and strong ergodicity for these single birth processes. Necessary and sufficient conditions for exponential ergodicity and expression of stationary distributions are presented.

Key words single birth processes; stationary distribution; ergodic; exponentially ergodic; strongly ergodic; ℓ-ergodic