第53卷第5期 数学学报中文版 Vol.53, No.5
2010年9月 ACTA MATHEMATICA SINICA, Chinese Series Sep., 2010

文章编号: 0583-1431(2010)05-0833-14 文献标识码: A

带移民的单生过程

张余辉

北京师范大学数学科学学院 北京 100875
E-mail: zhangyh@bnu.edu.cn

赵倩倩

曲阜师范大学数学科学学院 曲阜 273165

摘 要 本文给出了带移民单生过程唯一性、常返性、遍历、强遍历的显式判别准则和指数遍历的显式充分条件, 以及 0 点首中时的 n 阶矩显式表达式. 作为应用, 给出了带移民生灭过程的相关性质, 并且在文末讨论了几个例子的各种遍历性.

关键词 带移民单生过程; 常返; 遍历
MR(2000) 主题分类 60J25, 60J75, 60J80
中图分类 O211.6

Single Birth Processes with Immigration

Yu Hui ZHANG

School of Mathematical Sciences, Beijing Normal University, Beijing 100875, *P. R. China*
E-mail: *zhangyh@bnu.edu.cn*

Qian Qian ZHAO

School of Mathematical Sciences, Qufu Normal University, Qufu 273165, *P. R. China*

Abstract In this paper, the explicit criteria for uniqueness, recurrence, ergodicity, strong ergodicity of the single birth processes with immigration are presented. Meanwhile, an explicit sufficient condition for exponential ergodicity of the processes is obtained. In addition, the explicit expressions on the polynomial moments of the first hitting time are also founded. As an application, some properties are obtained on the birth death processes with immigration. Some examples are illustrated at the end.

Keywords Single birth processes with immigration; recurrence; ergodicity
MR(2000) Subject Classification 60J25, 60J75, 60J80
Chinese Library Classification O211.6

1 引言与主要结论

令 $(X(t))_{t\geq 0}$ 为定义在可数状态空间 $E=\{0,1,2,\dots\}$ 上的连续时间不可约马氏链, 具有转

收稿日期: 2009-02-18; 接受日期: 2010-04-02
基金项目: 国家重点基础研究发展计划 973 项目 (2006CB805901); 国家自然科学基金资助项目 (10721091)

移概率矩阵 $P(t)=(p_{ij}(t))$ 和速率 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$. 所谓单生 Q 矩阵即是如下特殊 Q 矩阵

$$q_{i,i+1}>0\ (i\geq 0),\quad q_{ij}=0\ (j>i+1,\, i,j\in E).$$

相应的 Q 过程称为单生过程. 单生过程是一类极其重要的马尔可夫过程, 一方面, 在理论研究中, 由于其模型的特殊, 往往是研究一般马尔可夫过程的切入点和有力工具; 另一方面, 它有很强的应用背景, 在生物学、人口学、化学、经济学、电子通信等学科中都有重要的应用 [1–5]. 有关一般单生过程的研究已有很多结果, 可参阅文 [6–12].

在许多现实模型中, 从任一状态 i 出发, 下一步可到达 $i+1$ 或 i 之前的任意 j, 一旦回到初始状态 0, 从 0 出发可以到达任意状态, 而不是只往前跳一步到达 1. 比如在生物模型中, 对封闭实验系统的生物在其灭绝后, 人为地移入该生物, 使系统继续运行. 因此, 推广一般的单生过程具有更广泛的应用背景和理论研究价值. 文 [13, 14] 研究了具有突变率的广义生灭过程即带移民生灭过程, 实际上, 此类过程是本文将要研究的带移民单生过程的一个特例. 下面首先给出带移民单生过程的定义.

定义 1.1 称保守全稳定 Q 矩阵 $Q=(q_{ij}:i,j\in E)$ 为带移民单生 Q 矩阵, 如果

$$q_{0j}\geq 0,\quad j\geq 1;\quad q_{i,i+1}>0,\quad q_{i,i+j}=0,\quad i\geq 1,\quad j\geq 2.$$

相应的 Q 过程称为带移民单生 Q 过程.

由全稳定保守知, Q 矩阵 (q_{ij}) 满足 $q_i:=-q_{ii}=\sum_{j\neq i}q_{ij}<\infty\,(i\geq 0)$. 如果 Q 矩阵全稳定保守且确定唯一 Q 过程, 我们称 Q 矩阵是正则的. 如果单生 Q 矩阵不可约, 则 q_{0j} 不全为 0. 特别地, 当 $q_{01}>0$, $q_{0j}=0\,(j\geq 2)$, 即为通常的单生 Q 矩阵. 在马氏链的理论研究中, 唯一性、常返性和遍历性是三类经典的问题. 本文对带移民单生过程研究这些经典问题, 为叙述主要结果, 引入下面的记号, 这些记号常用于单生过程的研究 (见文 [7]).

对 $0\leq k<n$, 定义 $q_n^{(k)}=\sum_{j=0}^{k}q_{nj}$. 再定义

$$m_0=\frac{1}{q_0},\quad m_n=\frac{1}{q_{n,n+1}}\left(1+\sum_{k=0}^{n-1}q_n^{(k)}m_k\right),\quad n\geq 1, \tag{1.1}$$

$$F_n^{(n)}=1,\quad F_n^{(i)}=\frac{1}{q_{n,n+1}}\sum_{k=i}^{n-1}q_n^{(k)}F_k^{(i)},\quad 0\leq i<n, \tag{1.2}$$

$$d_0=0,\quad d_n=\frac{1}{q_{n,n+1}}\left(1+\sum_{k=0}^{n-1}q_n^{(k)}d_k\right),\quad n\geq 1. \tag{1.3}$$

这三组记号满足如下关系

$$m_n=q_0^{-1}F_n^{(0)}+d_n\,(n\geq 0).$$

下面是本文的主要结果:

定理 1.1 唯一性. 给定全稳定保守带移民单生 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$, 则其决定唯一带移民单生过程当且仅当 $R:=\sum_{n=0}^{\infty}m_n=\infty$.

定理 1.2 常返性. 给定正则不可约带移民单生 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$, 则其决定的带移民单生过程常返当且仅当 $\sum_{n=0}^{\infty}F_n^{(0)}=\infty$.

在马氏链的遍历理论研究中, 通常研究三种遍历性即普通遍历, 指数遍历和强遍历. 关于这三种遍历性的定义及相关论题, 请参阅文 [1, 7, 8]. 这里给出了带移民单生过程三种遍历的显式判别准则或充分条件.

定理 1.3 遍历性. 给定正则不可约带移民单生 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$, 则其决定的带移民单生过程遍历 (正常返) 当且仅当

$$d:=\sup_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n}d_k\Big/\sum_{k=0}^{n}F_k^{(0)}<\infty \quad 且 \quad I:=\sum_{n=1}^{\infty}q_{0n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(dF_k^{(0)}-d_k\right)<\infty.$$

注 1.1 如果 $q_{01}>0$, $q_{0j}=0\,(j\geq 2)$, 则回到单生过程, 此时 $I=q_{01}d$ 成立. 所以, 这一结果显然还是单生过程的推广.

定理 1.4 强遍历性. 给定正则不可约带移民单生 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$, 则其决定的带移民单生过程强遍历的当且仅当

$$\overline{S}:=\sup_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n}\left(dF_k^{(0)}-d_k\right)<\infty,$$

其中 d 的定义见定理 1.3.

定理 1.5 指数遍历性. 给定正则不可约带移民单生 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$. 若

$$\sum_{j=1}^{\infty}q_{0j}\sum_{i=0}^{j-1}F_i^{(0)}<\infty,\quad q:=\inf_{i\geq 0}q_i>0 \quad 且 \quad M:=\sup_{i>0}\sum_{j=0}^{i-1}F_j^{(0)}\sum_{j=i}^{\infty}\frac{1}{q_{j,j+1}F_j^{(0)}}<\infty, \tag{1.4}$$

则其决定的带移民单生过程指数遍历.

本文内容安排如下: 唯一性和常返性的证明将在下节给出, 第三节主要是几种遍历性的证明, 第四节给出了 0 点首中时的 n 阶矩表达式, 并由此再次得到遍历、强遍历以及 ℓ 遍历的充分必要条件. 作为应用, 第五节给出了带移民生灭过程的一些相关性质, 并举出一些例子以加强对带移民单生过程各种性质的理解.

2 唯一性和常返性的证明

为证明定理 1.1 需要两个引理. 要说明的是, 引理 1.2 的思想实际源自于文 [14, 引理 5.1.1].

引理 2.1 给定全稳定保守带移民单生 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$. 对任意取定的非负整数 $N\geq 0$, 递归地定义数列

$$m_N^{(N)}=\frac{1+q_N^{(N-1)}}{q_{N,N+1}},\quad m_n^{(N)}=\frac{1}{q_{n,n+1}}\left(1+q_n^{(N-1)}+\sum_{k=N}^{n-1}q_n^{(k)}m_k^{(N)}\right),\quad n>N\geq 1, \tag{2.1}$$

$$m_0^{(0)}=\frac{1}{q_0},\quad m_n^{(0)}=\frac{1}{q_{n,n+1}}\left(1+\sum_{k=0}^{n-1}q_n^{(k)}m_k^{(0)}\right),\quad n\geq 1,$$

则级数 $\sum_{n=N}^{\infty}m_n^{(N)}$ 的敛散性与 N 无关, 即所有级数同敛散.

证明 记 $R_N:=\sum_{n=N}^{\infty}m_n^{(N)}$. 只需证明对任意 $N\geq 0$, 有 $R_N<\infty$ 等价于 $R_{N+1}<\infty$. 首先, 由 $m_n^{(N)}$ 的定义得出

$$m_n^{(N+1)}-m_n^{(N)}=\frac{1}{q_{n,n+1}}\left(q_{nN}-q_n^{(N)}m_N^{(N)}+\sum_{k=N+1}^{n-1}q_n^{(k)}(m_k^{(N+1)}-m_k^{(N)})\right),\quad n\geq N+1.$$

再由 (1.2) 和 (2.1) 并结合上式, 不难用归纳法证明以下性质

$$m_n^{(N+1)}\leq m_n^{(N)}+F_n^{(N)},\quad m_n^{(N)}\leq m_n^{(N+1)}+(m_n^{(N+1)}+F_n^{(N+1)})m_N^{(N)},\quad n\geq N+1,$$

同时容易由归纳法得到

$$F_k^{(K)}\leq m_k^{(K)}/m_K^{(K)},\quad k\geq K\geq 0.$$

进而由以上两式可以推出

$$m_n^{(N+1)} \le \left(1+\frac{1}{m_N^{(N)}}\right)m_n^{(N)},\quad m_n^{(N)} \le \left(1+\left(1+\frac{1}{m_{N+1}^{(N+1)}}\right)m_N^{(N)}\right)m_n^{(N+1)},\quad n\ge N+1.$$

由此即知 $R_N<\infty$ 等价于 $R_{N+1}<\infty$. 证毕.

由文 [7, 定理 2.40 和定理 2.47] 立即得出如下引理.

引理 2.2 全稳定保守 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$ 决定的 Q 过程唯一的充分必要条件是方程

$$u_i=\sum_{j\ne i} q_{ij}u_j/(\lambda+q_i),\quad 0\le u_i\le 1,\quad i\ge 0$$

对某个 (等价地, 对所有) $\lambda>0$ 只有平凡解, 或者说最大解为零解. 等价地, 方程

$$u_i=\sum_{j\ne i} q_{ij}u_j/(\lambda+q_i),\quad u_i\ge 0,\quad i\ge 0 \tag{2.2}$$

对某个 (等价地, 对所有) $\lambda>0$ 的非平凡解无界.

定理 1.1 的证明 (1) 对任意 $\lambda>0$, 我们证明带移民单生 Q 矩阵的方程

$$(\lambda+q_i)u_i=\sum_{j\ne i} q_{ij}u_j,\quad u_0=1,\quad u_i\ge 0,\quad i\ge 0 \tag{2.3}$$

的解一定满足: 存在 $N\ge 1$, 使得 $\{u_i\}_N^\infty$ 关于 i 是严格单调增的.

实际上, 此时的方程 (2.3) 即为 $u_0=1$ 且

$$(\lambda+q_0)u_0=\sum_{i=1}^\infty q_{0i}u_i,\quad q_{i,i+1}(u_{i+1}-u_i)=\sum_{j=0}^{i-1} q_i^{(j)}(u_{j+1}-u_j)+\lambda u_i,\quad i\ge 1. \tag{2.4}$$

取定常数 $C\in(1,1+\lambda/q_0)$, 则由 $u_0=1$ 及上式得出

$$\sum_{i=1}^\infty q_{0i}u_i=\lambda+q_0>Cq_0=\sum_{i=1}^\infty Cq_{0i}.$$

故存在 $i\ge 1$, 使得 $u_i>C$. 记 $N:=\min\{i\ge 1: u_i>C\}$. 下面用归纳法来证明解 $\{u_i\}_N^\infty$ 的严格单调增. 首先, 由 N 的定义知 $u_i\le C<u_N$ $(0\le i\le N-1)$, 而由方程 (2.3) 知

$$q_{N,N+1}(u_{N+1}-u_N)=\sum_{j=0}^{N-1} q_{Nj}(u_N-u_j)+\lambda u_N,$$

所以结合以上立刻有 $u_N<u_{N+1}$. 其次, 假设 $\{u_i\}_N^n$ 严格单调增, 则结合 (2.4) 式得到

$$\begin{aligned} q_{n,n+1}(u_{n+1}-u_n) &= \sum_{j=0}^{N-1} q_n^{(j)}(u_{j+1}-u_j)+\sum_{j=N}^{n-1} q_n^{(j)}(u_{j+1}-u_j)+\lambda u_n \\ &> \sum_{j=0}^{N-1} q_n^{(j)}(u_{j+1}-u_j)=\sum_{i=0}^{N-1} q_{ni}(u_N-u_i)\ge 0, \end{aligned} \tag{2.5}$$

故 $u_n<u_{n+1}$. 因此由归纳法知 $\{u_i\}_N^\infty$ 关于 i 是严格单调增的.

(2) 从此往后, 取定 $\lambda=1$. 定义

$$\widetilde{m}_n=\frac{1}{q_{n,n+1}}\left(1+q_n^{(N-1)}+\sum_{k=N}^{n-1} q_n^{(k)}\widetilde{m}_k\right),\quad n\ge N.$$

由归纳法及 (1.2) 式容易证明

$$F_n^{(N)}\le q_{N,N+1}\widetilde{m}_n,\quad n\ge N. \tag{2.6}$$

(3) 我们证明带移民单生过程的方程 (2.3) 的解满足

$$(u_N - C)\widetilde{m}_n < u_{n+1} - u_n \le (u_{N+1} - u_N)F_n^{(N)} + u_n\widetilde{m}_n, \quad n \ge N. \tag{2.7}$$

下面用归纳法证明之. 首先, 由 (2.4) 式知

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{q_{n,n+1}}\left(\sum_{i=0}^{N-1} q_{ni}(u_N - u_i) + \sum_{i=N}^{n-1} q_n^{(i)}(u_{i+1} - u_i) + u_n\right), \quad n \ge N. \tag{2.8}$$

所以, 当 $n = N$ 时, 显然有 $u_{N+1} - u_N < (u_{N+1} - u_N)F_N^{(N)} + u_N\widetilde{m}_N$, 再由 (2.8) 式, 得到

$$\begin{aligned} u_{N+1} - u_N &= \frac{1}{q_{N,N+1}}\left(\sum_{i=0}^{N-1} q_{Ni}(u_N - u_i) + u_N\right) > (u_N - C)\frac{q_N^{(N-1)} + 1}{q_{N,N+1}} \\ &= (u_N - C)\widetilde{m}_N. \end{aligned}$$

假设直至 $n-1$ 时 (2.7) 式都成立, 则一方面由 (2.8) 式及假设得出

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &\ge \frac{1}{q_{n,n+1}}\left(q_n^{(N-1)}(u_N - C) + (u_N - C)\sum_{i=N}^{n-1} q_n^{(i)}\widetilde{m}_i + u_n\right) \\ &> (u_N - C)\widetilde{m}_n. \end{aligned}$$

另一方面, 同样由 (2.8) 式及假设得出

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &\le \frac{1}{q_{n,n+1}}\left(q_n^{(N-1)}u_N + (u_{N+1} - u_N)\sum_{i=N}^{n-1} q_n^{(i)}F_i^{(N)} + \sum_{i=N}^{n-1} q_n^{(i)}\widetilde{m}_i u_i + u_n\right) \\ &\le (u_{N+1} - u_N)F_n^{(N)} + \frac{u_n}{q_{n,n+1}}\left(1 + q_n^{(N-1)} + \sum_{i=N}^{n-1} q_n^{(i)}\widetilde{m}_i\right) \\ &= (u_{N+1} - u_N)F_n^{(N)} + u_n\widetilde{m}_n. \end{aligned} \tag{2.9}$$

故由归纳法得证 (2.7) 式.

(4) 我们现在证明方程 (2.3) 的解 (u_i) 无界当且仅当 $R = \infty$. 由于有 (1.2) 和 (2.7) 式, 不难证明此结论. 实际上, 若 (u_i) 有界, 则由 (1) 知 $u_\infty := \lim_{n\to\infty} u_n < \infty$. 再由 (2.7) 式, 有

$$\widetilde{R} := \sum_{k=N}^{\infty} \widetilde{m}_k \le \frac{1}{u_N - C}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=N}^{n}(u_{k+1} - u_k) = \frac{u_\infty - u_N}{u_N - C} < \infty.$$

注意到 R 即是引理 2.1 中的 R_0, 则由引理 2.1 可知 $R < \infty$. 反之, 设 $R < \infty$. 由引理 2.1 知对一切 K, 有 $R_K < \infty$. 而 $\widetilde{R}$ 即是 R_N. 故 $\widetilde{R} < \infty$. 由于 $u_\infty = u_N\prod_{k=N}^{\infty} u_{k+1}/u_k$ 且 $u_{k+1}/u_k > 1\,(k \ge N)$, 故可知 $\prod_k u_{k+1}/u_k$ 与级数 $\sum_k \log(u_{k+1}/u_k)$ 同敛散 (当 $u_{k+1}/u_k \to 1$ 时), $\sum_k \log(u_{k+1}/u_k)$ 又与 $\sum_k (u_{k+1}/u_k - 1)$ 同敛散. 其次, 注意到 $u_n > C > 1\,(n \ge N)$, 由 (2.6) 和 (2.7) 式, 可得

$$0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \le \frac{(u_{N+1} - u_N)F_n^{(N)}}{u_n} + \widetilde{m}_n < (1 + q_{N,N+1}(u_{N+1} - u_N))\widetilde{m}_n, \quad n \ge N.$$

综合以上事实, 我们推出 $u_\infty < \infty$ 即 (u_i) 有界. 故结论得证.

最后由引理 2.2 和 (4) 立即推出定理结论. 证毕.

为证明定理 1.2, 我们将文 [7, 引理 4.51] 重写如下.

引理 2.3 设 $Q = (q_{ij})$ 是正则不可约 Q 矩阵, 则 Q 过程 $P(t)$ 常返的充分必要条件是方程

$$x_i = \sum_{j \ne j_0, i} q_{ij}x_j/q_i, \quad 0 \le x_i \le 1, \quad i \ge 0$$

对某个 (等价地, 对所有) 固定的 j_0 只有平凡解, 或者说最大解为零解. 等价地, 方程

$$x_i = \sum_{j \neq j_0, i} q_{ij} x_j / q_i, \quad x_i \geq 0, \quad i \geq 0 \tag{2.10}$$

对某个 (等价地, 对所有) 固定的 j_0 的非平凡解无界.

定理 1.2 的证明 由引理 2.3, 我们只需证明方程 (2.10) 有非平凡有界解当且仅当

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(0)} < \infty.$$

为此, 取定 $j_0 = 0$. 而方程 (2.10) 有非平凡有界解等价于方程

$$x_i = \sum_{j \neq 0, i} q_{ij} x_j / q_i, \quad x_0 = 1, \quad x_i \geq 0, \quad i \geq 0 \tag{2.11}$$

有有界解. 设 (x_i) 是方程 (2.11) 的解. 因此只需证明 (x_i) 有界当且仅当

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(0)} < \infty.$$

首先, 由方程 (2.11) 知

$$x_1 = \sum_{k \neq 0,1} q_{1k} x_k / q_1 = q_{12} x_2 / (q_{12} + q_{10}) \leq x_2,$$

且有

$$\begin{aligned} q_{n,n+1}(x_{n+1} - x_n) &= \sum_{j=1}^{n-1} q_{nj}(x_n - x_j) + q_{n0} x_n \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} q_n^{(k)} (x_{k+1} - x_k) + q_{n0} x_1, \quad n \geq 1. \end{aligned} \tag{2.12}$$

由以上及归纳法易知 $\{x_i\}_1^{\infty}$ 是单调增的. 顺便提一下, $x_1 \leq 1 = x_0$, 因为由方程 (2.11) 知

$$\sum_{k=1}^{\infty} q_{0k} x_k = q_0.$$

另外, 由 Q 矩阵 $Q = (q_{ij})$ 不可约及 $x_0 = 1$ 结合方程 (2.11) 知, 此时 $x_i > 0\,(i \geq 0)$.

其次, 设 (x_i) 有界. 令 $y_0 = x_1$ 和 $y_i = x_{i+1} - x_i\,(i \geq 1)$, 则 (y_i) 非负有界且由 (2.12) 式有

$$y_i = \frac{1}{q_{i,i+1}} \left(\sum_{j=1}^{i-1} q_i^{(j)} y_j + q_{i0} x_1 \right), \quad i \geq 1.$$

由以上及 $F_n^{(0)}$ 的定义, 用归纳法易证 $y_i = x_1 F_i^{(0)}\,(i \geq 0)$. 进而有

$$x_n = \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) + x_1 = x_1 \sum_{i=1}^{n-1} F_i^{(0)} + x_1 = x_1 \sum_{i=0}^{n-1} F_i^{(0)}.$$

故结合 (x_i) 的有界性得到

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(0)} < \infty.$$

反之, 设 $\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(0)} < \infty$. 取 $z_0 = 1$, $z_1 = c > 0$ 和 $z_{n+1} = z_n + c F_n^{(0)}\,(n \geq 1)$, 则

$$\begin{aligned} z_n &= \sum_{i=1}^{n-1} (z_{i+1} - z_i) + z_1 = c \sum_{i=1}^{n-1} F_i^{(0)} + z_1 \\ &= c \sum_{i=0}^{n-1} F_i^{(0)} \leq c \sum_{i=0}^{\infty} F_i^{(0)} < \infty. \end{aligned}$$

所以 (z_i) 是有界正的且单调增. 另外, 一方面, 由 (z_i) 的取法, 易证

$$z_{n+1}-z_n=\frac{1}{q_{n,n+1}}\left(\sum_{j=1}^{n-1}q_n^{(j)}(z_{j+1}-z_j)+q_{n0}z_1\right),\quad n\geq 1. \tag{2.13}$$

另一方面, 因为 (z_i) 有界且 $\sum_{n=1}^{\infty}q_{0n}=q_0<\infty$, 所以 $M_0:=\sum_{n=1}^{\infty}q_{0n}z_n<\infty$. 同时由不可约显然有 $M_0>0$. 综合以上, 取 $x_0=z_0=1$ 和 $x_n=q_0z_n/M_0\,(n\geq 1)$, 则 (x_i) 是有界正的且

$$\sum_{n=1}^{\infty}q_{0n}x_n=\frac{q_0}{M_0}\sum_{n=1}^{\infty}q_{0n}z_n=q_0. \tag{2.14}$$

由 (x_i) 的取法, 显然 (x_i) 也满足 (2.13) 式. 因此, 由 (2.13) 和 (2.14) 两式知 (x_i) 满足方程 (2.11). 从而证明了方程 (2.11) 有有界解 (x_i), 所以定理结论得证. 证毕.

3 几种遍历性的证明

三种遍历性的证明用到文 [7, 定理 4.45] 中给出的如下判别准则:

命题 3.1 设 $Q=\{q_{ij}:i,j\in E\}$ 是一个全稳定 Q 矩阵, H 是 E 的一个有限非空子集, 则

(1) 马氏链正常返 (遍历) 当且仅当方程

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{j\in E}q_{ij}y_j\leq -1, & i\notin H,\\ \displaystyle\sum_{i\in H}\sum_{j\neq i}q_{ij}y_j<\infty\end{cases} \tag{3.1}$$

有有限非负解.

(2) 马氏链指数遍历当且仅当对某 $\lambda>0$, 且 $\lambda<q_i$, $i\in E$, 方程

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{j\in E}q_{ij}y_j\leq -\lambda y_i-1, & i\notin H,\\ \displaystyle\sum_{i\in H}\sum_{j\neq i}q_{ij}y_j<\infty\end{cases} \tag{3.2}$$

有有限非负解.

(3) 马氏链强遍历当且仅当方程 (3.1) 有有界非负解.

下面给出三个遍历性定理的证明.

定理 1.3 的证明 在方程 (3.1) 中取定 $H=\{0\}$. 设 (u_i) 是下列方程的一个有限非负解

$$\sum_{j=0}^{\infty}q_{ij}y_j+1\leq 0,\quad i\geq 1;\quad \sum_{j=1}^{\infty}q_{0j}y_j<\infty. \tag{3.3}$$

由于方程的前一式即为

$$\sum_{j\neq i}q_{ij}(y_j-y_i)+1\leq 0,$$

故不妨设 $u_0=0$. 此时 $u_1\geq 1/q_1>0$. 事实上, 在方程 (3.3) 中取 $i=1$ 得到 $1\leq q_{12}u_2+1\leq q_1u_1$, 则得到

$$\begin{aligned}u_{i+1}-u_i&\leq\frac{1}{q_{i,i+1}}\left(\sum_{j=0}^{i-1}q_{ij}(u_i-u_j)-1\right)\\&=\frac{1}{q_{i,i+1}}\left(\sum_{j=0}^{i-1}q_i^{(j)}(u_{j+1}-u_j)-1\right),\quad i\geq 1.\end{aligned}$$

由此及 (1.2) 和 (1.3) 式, 用归纳法可证得

$$u_{n+1}-u_n \le F_n^{(0)}u_1-d_n,\quad n\ge 0.$$

所以

$$0\le u_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1}-u_k)\le u_1\sum_{k=0}^{n}F_k^{(0)}-\sum_{k=0}^{n}d_k,\quad n\ge 0.$$

故知

$$\sum_{k=0}^{n}d_k\Big/\sum_{k=0}^{n}F_k^{(0)}\le u_1\quad (n\ge 0),$$

进而 $d\le u_1<\infty$. 至于 $I<\infty$ 的结论, 我们将从第 4 节 0 点首中时矩的表达式得到.

反之, 假设 $d<\infty$ 且 $I<\infty$. 令

$$u_0=0,\quad u_1=d,\quad u_{n+1}=u_n+F_n^{(0)}u_1-d_n,\quad n\ge 0,$$

则对所有的 $n\ge 0$, 有

$$u_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1}-u_k)=\sum_{k=0}^{n}\left(dF_k^{(0)}-d_k\right)=d\sum_{k=0}^{n}F_k^{(0)}-\sum_{k=0}^{n}d_k\ge 0.$$

同时, 我们知道

$$\sum_{n=1}^{\infty}q_{0n}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}q_{0n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(dF_k^{(0)}-d_k\right)=I<\infty,$$

所以 (u_n) 有限非负的且满足方程 (3.3) 的第二式. 此时, 对每个 $i\ge 1$, 我们容易证明

$$\begin{aligned}q_{i,i+1}(u_{i+1}-u_i)+1&=q_{i,i+1}F_i^{(0)}u_1-q_{i,i+1}d_i+1\\&=\sum_{j=0}^{i-1}q_i^{(j)}F_j^{(0)}u_1-\sum_{j=0}^{i-1}q_i^{(j)}d_j=\sum_{j=0}^{i-1}q_i^{(j)}(u_{j+1}-u_j)\\&=\sum_{j=0}^{i-1}q_{ij}(u_i-u_j),\end{aligned}$$

此即

$$\sum_j q_{ij}u_j+1=0\quad (i\ge 1).$$

所以 (u_n) 满足方程 (3.3) 的第一式. 因此 (u_n) 是方程 (3.3) 的一个有限非负解.

最后, 由命题 3.1(1) 立即推出定理结论. 证毕.

定理 1.4 的证明 由文 [10] 的证明和结论 (也可参看文 [7]), 我们知道如下方程

$$y_i=\sum_{j\ne i}\frac{q_{ij}}{q_i}y_j+\frac{1}{q_i},\quad i\ge 1;\quad y_0=0 \tag{3.4}$$

有一有界非负解当且仅当 $\overline{S}<\infty$. 此时, 我们有

$$d=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}d_k\Big/\sum_{k=0}^{n}F_k^{(0)},$$

而且方程 (3.4) 的唯一解有下面的形式

$$y_0=0,\quad y_1=d,\quad y_{n+1}=y_n+F_n^{(0)}y_1-d_n,\quad n\ge 1. \tag{3.5}$$

在方程 (3.1) 中取定 $H=\{0\}$, 带移民单生过程强遍历的充分必要条件是方程 (3.3) 有一有界非负解. 假设带移民单生过程强遍历, 则方程 (3.3) 存在一有界非负解 (u_i), 即

$$u_i \geq \sum_{j\neq i}\frac{q_{ij}}{q_i}u_j+\frac{1}{q_i}, \quad i\geq 1; \quad u_0\geq 0; \quad \sum_{j=1}^{\infty}q_{0j}u_j<\infty.$$

记 (u_i^*) 是方程 (3.4) 的最小非负解, 则由比较定理 (见文 [7, 定理 2.6]) 得到 $u_i\geq u_i^*\,(i\geq 0)$. 因此, (u_i^*) 有界且方程 (3.4) 有一有界非负解. 再由前面证明的等价性即知 $\overline{S}<\infty$.

反之, 设 $\overline{S}<\infty$. 由 (3.5) 定义 (y_i). 则由前面证明的等价性知, (y_i) 是方程 (3.4) 的有界非负解. 显然 (y_i) 也是方程 (3.3) 的有界非负解. 再由命题 3.1(3) 知, 带移民单生过程是强遍历的. 证毕.

定理 1.5 的证明 在方程 (3.2) 中取定 $H=\{0\}$, 带移民单生过程指数遍历当且仅当对某个 λ 满足 $0<\lambda<q_i\,(i\geq 0)$, 方程

$$y_i\geq 1, \quad i\geq 0; \quad \sum_{j=0}^{\infty}q_{ij}y_j\leq -\lambda y_i, \quad i\geq 1; \quad \sum_{j=1}^{\infty}q_{0j}y_j<\infty \tag{3.6}$$

有一有限解 (参看文 [7, 文 (4,13) 式]). 因此, 条件 $q>0$ 是必要的. 对某个固定的 $\lambda\in(0,q)$, 下面用文 [9] 的方法构造方程 (3.6) 的一个解 (g_i). 首先定义算子

$$\mathit{\Pi}_i(f)=\frac{1}{f_i}\sum_{j=0}^{i-1}F_j^{(0)}\sum_{k=j+1}^{\infty}\frac{f_k}{q_{k,k+1}F_k^{(0)}}, \quad i\geq 1.$$

再定义

$$\varphi_0=0, \quad \varphi_i=\frac{1}{q_0}\sum_{j=0}^{i-1}F_j^{(0)}, \quad i\geq 1,$$

则 $\varphi_1=q_0^{-1}$ 且 φ_i 关于 i 单调增. 令 $f=cq_{10}\sqrt{q_0\varphi}$, 其中常数 $c>1$, 则 f 单调增且 $f_1=cq_{10}$. 最后定义 $g=f\mathit{\Pi}(f)$ 和 $g_0=1$, 则 g 单调增且

$$g_1=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_k}{q_{k,k+1}F_k^{(0)}}\geq\frac{f_1}{q_{12}F_1^{(0)}}=\frac{f_1}{q_{10}}=c>1.$$

由文 [15, 引理 3.6], 我们有

$$\begin{aligned} g_i&=cq_{10}\sqrt{q_0}\sum_{j=0}^{i-1}F_j^{(0)}\sum_{k=j+1}^{\infty}\frac{\sqrt{\varphi_k}}{q_{k,k+1}F_k^{(0)}}\leq\frac{2Mcq_{10}}{\sqrt{q_0}}\sum_{j=0}^{i-1}F_j^{(0)}\varphi_{j+1}^{-1/2}\\ &\leq 2Mcq_{10}\sum_{j=0}^{i-1}F_j^{(0)}<\infty, \quad i\geq 1, \end{aligned} \tag{3.7}$$

所以 $1\leq g_i<\infty\,(i\geq 0)$ 且

$$\sum_{j=1}^{\infty}q_{0j}g_j\leq 2Mcq_{10}\sum_{j=1}^{\infty}q_{0j}\sum_{i=0}^{j-1}F_i^{(0)}.$$

因此, 由 (1.4) 的第一式, 我们知道 (g_i) 满足方程 (3.6) 中的第三式. 在定理的条件下, 通过适当选取 λ, (g_i) 将满足方程 (3.6) 中的第二式. 此段证明完全同文 [9], 故此省略, 可参看文 [7] 或 [9]. 故 (g_i) 是方程 (3.6) 的一个有限解, 从而带移民单生过程是指数遍历的. 证毕.

注 3.1 由于 (3.7) 式中 g_i 放大得太快, 定理 1.5 中条件 (1.4) 的第一式有些粗糙. 后面我们将举出带移民单生过程指数遍历但是 (1.4) 的第一式不成立的例子. 另外, $M<\infty$ 对带移民单生过程也不是必要的. 事实上, 即使对单生过程也不是必要的.

4 击中时的矩

给定不可约 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$, 令 $(X(t))_{t\geq 0}$ 为定义在概率空间 $(\Omega,\mathbf{F},\mathbf{P})$ 上相应于 Q 的马氏链. 设 H 为 E 的一非空有限子集, 定义 H 的击中时为

$$\sigma_H=\inf\{t\geq \eta_1: X(t)\in H\},$$

其中 η_1 为 $(X(t))_{t\geq 0}$ 的第一次跳时刻. 定义状态 i 的首中时为

$$\tau_i=\inf\{t>0: X(t)=i\}.$$

简记 $\sigma_{\{i\}}=\sigma_i$. 显然, 当出发点不是 i 时, 则 $\sigma_i=\tau_i$.

下面考虑带移民单生过程状态 0 的首中时 n 阶矩 $(n\geq 1)$: $m_i^{(n)}=\mathbf{E}_i\tau_0^n\,(i\geq 1)$. 为此, 仿造 (1.3) 式, 定义

$$d_0^{(n)}=0,\quad d_i^{(n)}=\frac{1}{q_{i,i+1}}\bigg(m_i^{(n-1)}+\sum_{k=0}^{i-1}q_i^{(k)}d_k^{(n)}\bigg),\quad i\geq 1. \tag{4.1}$$

结合 (1.2) 式, 用归纳法可证

$$F_i^{(j)}=\sum_{k=j+1}^{i}\frac{F_i^{(k)}q_k^{(j)}}{q_{k,k+1}},\quad i>j\geq 0;\quad d_i^{(n)}=\sum_{k=1}^{i}\frac{F_i^{(k)}m_k^{(n-1)}}{q_{k,k+1}},\quad i\geq 1. \tag{4.2}$$

再令

$$d^{(n)}=\sup_{i\geq 1}\frac{\sum_{j=0}^{i-1}d_j^{(n)}}{\sum_{j=0}^{i-1}F_j^{(0)}}=\sup_{i\geq 0}\frac{\sum_{j=0}^{i}d_j^{(n)}}{\sum_{j=0}^{i}F_j^{(0)}}, \tag{4.3}$$

注意到 $m_i^{(0)}=1\,(i\geq 1)$. 由 (1.3) 式易见 $d_j^{(1)}=d_j\,(j\geq 0)$, 进而 $d^{(1)}=d$.

关于带移民单生过程状态 0 首中时的各阶矩的结果如下.

定理 4.1 给定全稳定保守不可约带移民单生 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$, 则其相应的带移民单生过程状态 0 首中时的 n 阶矩可由如下表达式给出

$$\mathbf{E}_1\tau_0^n=nd^{(n)}=\mathbf{E}_1\sigma_0^n,\quad \mathbf{E}_i\tau_0^n=n\sum_{j=0}^{i-1}\big(F_j^{(0)}d^{(n)}-d_j^{(n)}\big)=\mathbf{E}_i\sigma_0^n,\quad i\geq 1. \tag{4.4}$$

$$\mathbf{E}_0\sigma_0^n=n!\bigg(\frac{1}{q_0^n}+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i!q_0^{n-i+1}}\sum_{k=1}^{\infty}q_{0k}m_k^{(i)}\bigg). \tag{4.5}$$

特别地, 当 $n=1$ 时, 有

$$\mathbf{E}_1\sigma_0=\mathbf{E}_1\tau_0=d,\quad \mathbf{E}_i\tau_0=\sum_{j=0}^{i-1}\big(F_j^{(0)}d-d_j\big)=\mathbf{E}_i\sigma_0,\quad i\geq 1. \tag{4.6}$$

$$\mathbf{E}_0\sigma_0=q_0^{-1}+q_0^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}q_{0k}\sum_{j=0}^{k-1}\big(F_j^{(0)}d-d_j\big). \tag{4.7}$$

证明 后两式分别是前两式 $n=1$ 的特殊情形, (4.4) 式的证明完全同单生过程情形的证明, 参见文 [11], 我们只证明 (4.5) 式. 由于

$$\mathbf{P}_j[\sigma_j>t]=\mathrm{e}^{-q_jt}+\sum_{k\neq j}\int_0^t\mathbf{P}_k[\sigma_j>t-s]\mathrm{e}^{-q_js}q_{jk}\,ds,$$

所以

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_0\sigma_0^n &= n\int_0^\infty t^{n-1}\mathbf{P}_0[\sigma_0>t]\,dt \\
&= \frac{n!}{q_0^n}+n\int_0^\infty t^{n-1}\,dt\sum_{k\neq 0}\int_0^t \mathbf{P}_k[\sigma_0>t-s]\mathrm{e}^{-q_0 s}q_{0k}\,ds \\
&= \frac{n!}{q_0^n}+n\sum_{k\neq 0}q_{0k}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-q_0 s}\,ds\int_0^\infty (s+u)^{n-1}\mathbf{P}_k[\sigma_0>u]\,du \\
&= \frac{n!}{q_0^n}+n\sum_{k=1}^\infty q_{0k}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}\frac{(n-1-i)!m_k^{(i+1)}}{q_0^{n-i}(i+1)} \\
&= n!\bigg(\frac{1}{q_0^n}+\sum_{i=1}^n\frac{1}{i!q_0^{n-i+1}}\sum_{k=1}^\infty q_{0k}m_k^{(i)}\bigg).
\end{aligned}$$

证毕.

注 4.1 由 Chen 的文 [7, 定理 4.44] 知, 过程遍历当且仅当 $\mathbf{E}_0\sigma_0<\infty$, 过程强遍历当且仅当 $\sup_{i\geq 0}\mathbf{E}_i\sigma_0<\infty$. 结合 (4.6) 和 (4.7) 式, 立刻得到带移民单生过程遍历和强遍历的判别准则. 结果分别同定理 1.3 和定理 1.4. 由此可知前面记号的概率意义.

由文 [16] 中 ℓ 遍历的定义以及 (4.4) 和 (4.5) 式可得带移民单生过程 ℓ 遍历的判别准则. 注意 (4.3) 式的定义.

推论 4.1 给定正则不可约带移民单生 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$, 则其决定的带移民单生过程 ℓ 遍历当且仅当

$$d^{(\ell)}<\infty \quad 且 \quad \sum_{n=1}^\infty q_{0n}\sum_{j=0}^{n-1}\big(F_j^{(0)}d^{(\ell)}-d_j^{(\ell)}\big)<\infty.$$

5 特例: 带移民生灭过程及三个例子

不同于文 [13] 中的带突变率的带移民生灭 Q 矩阵, 我们考虑如下更简单的全稳定保守且不可约带移民生灭 Q 矩阵

$$q_{0j}\geq 0\,(j\geq 1);\quad q_{i,i+1}=b_i>0,\quad q_{i,i-1}=a_i>0\quad (i\geq 1),$$

其它 $q_{ij}=0\,(i\neq j)$. 约定 $b_0=q_0$. 定义

$$\mu_0=1,\quad \mu_i=\frac{b_0\cdots b_{i-1}}{a_1\cdots a_i},\quad i\geq 1,$$

则由 $m_i,F_i^{(0)}$ 和 d_i 的定义可得

$$m_i=\frac{\mu[0,i]}{\mu_i b_i},\quad F_i^{(0)}=\frac{b_0}{\mu_i b_i},\quad d_i=\frac{\mu[1,i]}{\mu_i b_i},\quad i\geq 1.$$

其中 $\mu[i,k]=\sum_{j=i}^k\mu_j$. 注意, 此时 (q_{ij}) 关于 μ_i 不是对称的, 但是仍可以从上面带移民单生过程的结论得到带移民生灭过程的如下结果 (可参考文 [7, 定理 4.55] 和生灭过程作比较). 这里不必给出定理的证明, 读者从带移民单生的结论稍作推导就可得到.

定理 5.1 假定 $b_0>0$. 对带移民生灭 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$ 有以下结论成立.

(1) 设 Q 全稳定保守, 则其决定唯一带移民生灭过程的充分必要条件是

$$\sum_{i=0}^\infty(\mu_i b_i)^{-1}\sum_{k=0}^i\mu_k=\infty.$$

以下假设 Q 是正则不可约的, 则其决定的带移民生灭过程.

(2) 常返的充分必要条件是

$$\sum_{i=0}^{\infty}(\mu_i b_i)^{-1}=\infty.$$

(3) 遍历 (正常返) 的充分必要条件是

$$\sum_{i=0}^{\infty}\mu_i<\infty \quad 且 \quad \sum_{i=1}^{\infty}q_{0i}\sum_{k=0}^{i-1}(\mu_k b_k)^{-1}\sum_{j=k+1}^{\infty}\mu_j<\infty.$$

(4) 强遍历的充分必要条件是

$$\overline{S}:=\sum_{k=0}^{\infty}(\mu_k b_k)^{-1}\sum_{j=k+1}^{\infty}\mu_j<\infty.$$

(5) 若 $\sum_{j=1}^{\infty}q_{0j}\sum_{i=0}^{j-1}(\mu_i b_i)^{-1}<\infty$, $q:=\inf_{i\geq 0}q_i>0$ 且

$$\delta:=\sup_{i>0}\sum_{j=0}^{i-1}(\mu_j b_j)^{-1}\sum_{j=i}^{\infty}\mu_j<\infty,$$

则过程指数遍历. 反之, 若过程是指数遍历的, 则有 $q>0$ 且 $\delta<\infty$.

(6) 假设过程是常返的, 则过程 ℓ 遍历 ($\ell\geq 1$) 当且仅当

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mu_i m_i^{(\ell-1)}<\infty \quad 且 \quad \sum_{i=1}^{\infty}q_{0i}\sum_{k=0}^{i-1}\frac{1}{\mu_k b_k}\sum_{j=k+1}^{\infty}\mu_j m_j^{(\ell-1)}<\infty,$$

其中

$$m_i^{(0)}=1,\quad m_i^{(n)}=n\sum_{j=0}^{i-1}\frac{1}{\mu_j b_j}\sum_{k=j+1}^{\infty}\mu_k m_k^{(n-1)},\quad i\geq 1,\quad n\geq 1.$$

最后, 通过几个例子来进一步说明和了解本文对带移民单生过程的研究所获得的结果, 以下讨论的 Q 矩阵均假定是全稳定保守的.

例 5.1 对所有的 $i\geq 1$, 令 $q_{0i}=i^{-\gamma}$, $q_{i,i+1}=i$, $q_{i0}=1$, 其中 $\gamma\in(1,2]$; 其它的 $i\neq j$ 时 $q_{ij}=0$. 则该 Q 矩阵是正则不可约的, 相应过程的各种遍历性都成立, 但此时 $M=\infty$,

$$\sum_{j=1}^{\infty}q_{0j}\sum_{i=0}^{j-1}F_i^{(0)}=\infty,$$

故 (1.4) 的第一式和第三式都不是带移民单生过程指数遍历的必要条件.

证明 该 Q 矩阵显然不可约. 由于 $m_n=n^{-1}(1+\sum_{k=0}^{n-1}m_k)\geq n^{-1}$, 进而

$$\sum_{n=0}^{\infty}m_n\geq\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}=\infty,$$

因此 Q 矩阵正则. 容易计算得到 $F_n^{(0)}=1\,(n\geq 0)$, 进而

$$\sum_{n=0}^{\infty}F_n^{(0)}=\infty,$$

所以过程常返. 注意到 $\inf_{n\geq 1}q_{n0}=1>0$, 由文 [11, 命题 5] 得知过程强遍历, 从而各种遍历性都成立. 此时

$$M=\sup_{i>0}\sum_{j=i}^{\infty}\frac{i}{j}=\infty,\quad \sum_{j=1}^{\infty}q_{0j}\sum_{i=0}^{j-1}F_i^{(0)}=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^{\gamma-1}}=\infty.$$

证毕.

例 5.2 设 $q_{0j} > 0\,(j \geq 1)$ 且 $q_0 = \sum_{j=1}^{\infty} q_{0j} < \infty$, $q_{i,i+1} = 1\,(i \geq 0)$, $q_{10} = 1$, $q_{i,i-2} = 1\,(i \geq 2)$, 其它的 $i \neq j$ 时 $q_{ij} = 0$, 则该 Q 矩阵是正则不可约的, 相应的过程是常返而非强遍历的; 过程遍历当且仅当 $\sum_{n=1}^{\infty} nq_{0n} < \infty$; 若 $\sum_{j=1}^{\infty} q_{0j} A^j < \infty$, 其中 $A = (\sqrt{5}+1)/2$, 则过程指数遍历.

证明 显然, 过程是正则不可约的 (该 Q 矩阵有界). 计算知 $F_n^{(0)}$ 是 Fibonacci 数列:

$$F_n^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{5}}[A^{n+1} - (-B)^{n+1}] \quad (n \geq 0),$$

这里 $A = (\sqrt{5}+1)/2$, $B = (\sqrt{5}-1)/2$. 显然 A, B 满足以下关系

$$AB = 1, \quad A - B = 1, \quad A + B = \sqrt{5}.$$

因为 $F_n^{(0)} \geq (A^{n+1} - 1)/\sqrt{5} \geq A^n/\sqrt{5}\,(n \geq 1)$, 进而

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(0)} = \infty,$$

所以过程常返. 参照文 [9] 易得 $d = A$ 和

$$\overline{S} = \sup_{n \geq 0} \sum_{k=0}^{n} (dF_k^{(0)} - d_k) = \infty,$$

从而过程非强遍历. 同时, 我们得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_{0n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(dF_k^{(0)} - d_k\right) = \sum_{n=1}^{\infty} q_{0n} \left(n + \frac{(1+B^2)(1-(-B)^n)}{\sqrt{5}(1+B)}\right),$$

故上面的级数与 $\sum_{n=1}^{\infty} nq_{0n}$ 同敛散. 所以过程遍历当且仅当 $\sum_{n=1}^{\infty} nq_{0n} < \infty$. 最后, 我们来考虑指数遍历问题. 一方面, 我们有

$$M \leq \sup_{i>0} \frac{A(A^2 - (-B/A)^i B^2 - \sqrt{5}/A^i)}{A-1} \leq A^2(A^2 + B^4 + \sqrt{5}B) < \infty.$$

另一方面, 我们可以得到

$$\sum_{j=1}^{\infty} q_{0j} \sum_{i=0}^{j-1} F_i^{(0)} = \sum_{j=1}^{\infty} q_{0j} \left(\frac{A^{j+2} - (-B)^{j+2}}{\sqrt{5}} - 1\right).$$

综合以上, 若 $\sum_{j=1}^{\infty} q_{0j} A^j < \infty$, 过程必然指数遍历. 证毕.

下面计算一个非带移民单生 Q 矩阵的平稳分布.

例 5.3 设 Q 矩阵为 $q_{0i} > 0$ 且 $q_{i0} > 0\,(i \geq 1)$, 其它的 $i \neq j$ 时 $q_{ij} = 0$, 则相应的 Q 过程 ℓ 遍历 $(\ell \geq 1))$ 当且仅当 $\sum_{k=1}^{\infty} q_{0k}/q_{k0}^{\ell} < \infty$. 如果过程遍历, 则平稳分布为

$$\pi_0 = \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{q_{0i}}{q_{i0}}\right)^{-1}, \quad \pi_i = \left(1 + \frac{q_{i0}}{q_{0i}}\left(1 + \sum_{k \neq i,0} \frac{q_{0k}}{q_{k0}}\right)\right)^{-1}, \quad i \geq 1.$$

证明 注意 $q_i = q_{i0}$. 正则性由引理 1.1 易见. 显然 $\mathbf{E}_i \tau_0 = 1/q_{i0}\,(i \geq 1)$, 同时有

$$\mathbf{E}_0 \tau_i = \frac{1}{q_0} + \sum_{k \neq i,0} \frac{q_{0k}}{q_0} \mathbf{E}_k \tau_i = \frac{1}{q_0} + \frac{1}{q_0} \sum_{k \neq i,0} q_{0k}(\mathbf{E}_k \tau_0 + \mathbf{E}_0 \tau_i),$$

由以上得到

$$\mathbf{E}_0 \tau_i = \frac{1}{q_{0i}} \left(1 + \sum_{k \neq i,0} \frac{q_{0k}}{q_{k0}}\right).$$

进而, 我们有

$$\mathbf{E}_i\sigma_i=\frac{1}{q_i}+\frac{q_{i0}}{q_i}\mathbf{E}_0\tau_i=\frac{1}{q_i}+\frac{1}{q_{0i}}\left(1+\sum_{k\neq i,0}\frac{q_{0k}}{q_{k0}}\right),\quad i\geq 1,$$

$$\mathbf{E}_0\sigma_0=\frac{1}{q_0}+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{q_{0i}}{q_0}\mathbf{E}_i\tau_0=\frac{1}{q_0}+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{q_{0i}}{q_0}\cdot\frac{1}{q_{i0}},$$

所以过程遍历当且仅当 $\sum_{k=1}^{\infty}q_{0k}/q_{k0}<\infty$, 同时由 $\pi_iq_i\mathbf{E}_i\sigma_i=1$ 可直接求得 π_i. 事实上, 过程的平稳分布还可用递归法直接计算.

当 $\ell\geq 2$ 时, 由文 [16, 引理 3.1] 得

$$\mathbf{E}_i\tau_0^{\ell}=\frac{\ell}{q_i}\mathbf{E}_i\tau_0^{\ell-1}=\cdots=\frac{\ell!}{q_i^{\ell}},\quad i\geq 1.$$

而 $\mathbf{E}_0(\sigma_0-\eta_1)^{\ell}\leq\mathbf{E}_0\sigma_0^{\ell}\leq 2^{\ell-1}(\mathbf{E}_0(\sigma_0-\eta_1)^{\ell}+\mathbf{E}_0\eta_1^{\ell})$, 同时容易得到

$$\mathbf{E}_0(\sigma_0-\eta_1)^{\ell}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{q_{0k}}{q_0}\mathbf{E}_k\tau_0^{\ell}=\frac{\ell!}{q_0}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{q_{0k}}{q_k^{\ell}},\quad \mathbf{E}_0\eta_1^{\ell}=\frac{\ell!}{q_0^{\ell}}.$$

从而得到过程 ℓ 遍历的充分必要条件是

$$\sum_{k=1}^{\infty}q_{0k}/q_{k0}^{\ell}<\infty.$$

证毕.

致谢 作者感谢陈木法院士在本文的完成过程中所给予的帮助, 同时感谢审稿人的宝贵意见和建议.

参考文献

[1] Anderson W. J., Continuous-Time Markov Chains, New York: Springer-Verlag, 1991.

[2] Brockwell P. J., The extinction time of a birth, death and catastrophe process and of a related diffusion model, *Adv. Appl. Prob.*, 1985, **17**: 42–52.

[3] Brockwell P. J., The extinction time of a general birth and death process with catastrophes, *J. Appl. Prob.*, 1986, **23**: 851–858.

[4] Cairns B., Pollett P. K., Extinction times for a general birth, death and catastrophe process, *J. Appl. Prob.*, 2004, **41**(4): 1211–1218.

[5] Pakes A. G., The Markov branching-catastrophe process, *Stochastic Proc. Appl.*, 1986, **23**: 1–33.

[6] Chen M. F., Single Birth Processes, *Chin. Ann. Math.*, 1999, **20B**: 77–82.

[7] Chen M. F., From Markov Chains to Non-Equilibrium Particle Systems, Second Edition, Singapore: World Scientific, 2004.

[8] Chen M. F., Eigenvalues, Inequalities, and Ergodic Theory, Berlin: Springer, 2004.

[9] Mao Y. H., Zhang Y.H., Exponential ergodicity for single birth processes, *J. Appl. Prob.*, 2004, **41**(4): 1022–1032.

[10] Zhang Y. H., Strong ergodicity for single-birth processes, *J. Appl. Prob.*, 2001, **38**(1): 270–277.

[11] Zhang Y. H., Moments of the first hitting time for single birth processes, *J. Beijing Normal Univ.*, 2003, **39**(4): 430–434 (in Chinese).

[12 Zhang Y. H., The hitting time and stationary distribution for single birth processes, *J. Beijing Normal Univ.*, 2004, **40**(2): 157–161 (in Chinese).

[13] Wu Q. Y., Zhang H. J., An extended birth-death process, *J. Sys. Sci. Math. Sci.*, 2003, **23**(4): 517–528 (in Chinese).

[14] Wu Q. Y., An Extended Birth-Death Process, Beijing: Science Press, 2004 (in Chinese).

[15] Chen M. F., Explicit bounds of the first eigenvalue, *Sci. in China*, 2000, **43**(10): 1051–1059.

[16] Mao Y. H., Ergodic degrees for continuous-time Markov chains, *Sci. in China*, 2004, **47**(2): 161–174.