关于单生过程指数遍历和 ℓ遍历的注记*

张余辉
(北京师范大学数学科学学院，100875，北京)

摘要　用击中时矩比较的方法证明了单生过程指数遍历的一个显式充分条件，此方法不同于以前的工作；同时给出了单生过程 ℓ遍历的显式判别准则.

关键词　单生过程；生灭过程；指数遍历；强遍历；ℓ遍历

1　引言和主要结果

在马氏链的遍历理论中，传统研究的遍历性有 3 种：(普通)遍历、指数遍历和强遍历性. 相关概念及结果参看文献[1-3]. 文献[4]则将 ℓ遍历的概念推广到连续时间马氏链，并用击中时矩的方法研究了高阶偏差矩阵的存在问题，得到了转移矩阵多项式收敛向平稳分布的速率估计. 我们要研究的是单生过程的相关问题. 实际上，本文是文献[5-8]工作的继续.

考虑不可约正则单生 Q 矩阵，即对一切 $i\geqslant 0$ 有 $q_i := -q_{ii} = \sum_{j\neq i} q_{ij} < \infty$，且对所有的 $i\geqslant 0$ 和 $j\geqslant 2$ 满足 $q_{i,i+1}>0$，$q_{i,i+j}=0$，且决定唯一的 Q 过程(称之为单生过程). 关于单生过程的研究背景和相关结果，有兴趣的读者可参看文献[1]和文献[5-12]. 本文沿用国内文献中的记号. 我们的第一个主要结果是关于传统的遍历性.

定义

$$q_n^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} q_{nj}\ (0\leqslant k<n,\ k,n\in \mathbf{Z}_+),$$

其中 $\mathbf{Z}_+ = \{0,1,2,\cdots\}$.

再定义

$$F_n^{(n)} = 1,$$

$$F_n^{(i)} = \frac{1}{q_{n,n+1}}\sum_{k=i}^{n-1} q_n^{(k)} F_k^{(i)},\quad 0\leqslant i<n.$$

定理 1　给定正则不可约单生 Q 矩阵 (q_{ij}). 定义一个生灭 Q 矩阵 (a_i, b_i) 如下：

$$a_i = \frac{q_{i,i+1}F_i^{(0)}}{F_{i-1}^{(0)}},\quad i\geqslant 1;$$

$$b_i = q_{i,i+1},\quad i\geqslant 0. \tag{1}$$

则 (q_{ij}) 对应的单生过程(记为 $X(t)$)与 (a_i, b_i) 对应的生灭过程有等价的常返性. 而且，在单生过程常返的假设下，若此生灭过程 $\overline{X}(t)$ 遍历(或指数遍历，或强遍历)，则单生过程 $X(t)$ 亦有相同的遍历性，亦即

(1) 若 $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{q_{i,i+1}F_i^{(0)}}<\infty$，则 $X(t)$ 遍历；

(2) 若 $\inf_{i\geqslant 0} q_i>0$ 和

$$M := \sup_{i>0}\sum_{j=0}^{i-1}F_j^{(0)}\sum_{j=i}^{\infty}\frac{1}{q_{j,j+1}F_j^{(0)}}<\infty, \tag{2}$$

则 $X(t)$ 指数遍历；

(3) 若

$$\sum_{i=0}^{\infty}F_i^{(0)}\sum_{j=i+1}^{\infty}\frac{1}{q_{j,j+1}F_j^{(0)}}<\infty,$$

则 $X(t)$ 强遍历.

下面给出 ℓ遍历的概念. 令 $Y(t)$ 为定义在可数状态空间 $\mathbf{Z}_+$ 上的连续时间不可约马氏链，具转移概率矩阵 $P(t)=(p_{ij}(t))$. 第一次跳时刻指 $\eta_1 := \inf\{t>0: Y(t)\neq Y(0)\}$. 击中时为 $\sigma_i := \inf\{t>\eta_1: Y(t)=i\}$，当出发点就是 i 时，亦称之为回返时.

定义 1　设 ℓ是一正整数. 记 ℓ阶矩为 $m_{ij}^{(\ell)} := E_i\sigma_j^{\ell}$，其中 E_i 为从状态 i 出发的数学期望. 如果常返链 $Y(t)$ 对某个(等价地，对所有) $j\in\mathbf{Z}_+$ 有 $m_{jj}^{(\ell)}<\infty$，则称 $Y(t)$ 是 ℓ遍历的[4].

当 $\ell=1$ 时，ℓ遍历对应于通常的正常返(遍历). 不妨也把零常返称为 0 遍历. 对单生过程而言，0 遍历和 1 遍历这些问题已有完整的结果[4]. 下面我们将致力于研究单生过程更一般的 ℓ遍历问题($\ell\geqslant 1$).

定义

$$d_0^{(n)} = 0,$$

$$d_i^{(n)} = \frac{1}{q_{i,i+1}}\Big(m_{i0}^{(n-1)} + \sum_{k=0}^{i-1} q_i^{(k)} d_k^{(n)}\Big),\quad i\geqslant 1. \tag{3}$$

再令

$$d^{(n)} = \sup_{i\geqslant 1}\frac{\sum_{j=0}^{i-1} d_j^{(n)}}{\sum_{j=0}^{i-1}F_j^{(0)}} = \sup_{i\geqslant 0}\frac{\sum_{j=0}^{i} d_j^{(n)}}{\sum_{j=0}^{i}F_j^{(0)}},\quad n\geqslant 1. \tag{4}$$

* 国家"九七三"计划资助项目(2006CB805901)；国家自然科学基金资助项目(10721091)
收稿日期：2009-02-01

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

当 $n=1$ 时,我们分别省去式(3)和(4)中 $d_i^{(1)}$ 和 $d^{(1)}$ 的上标,简记为 d_i 和 d,这样与文献[1]的记号一致. 注意到对所有 $i\geqslant 1$ 有 $m_{i0}^{(0)}=1$ 成立,同时,在文献[7]中,我们已经证明了以下公式:

$$m_{i0}^{(n)} = n\sum_{j=0}^{i-1}\left(F_j^{(0)}d^{(n)}-d_j^{(n)}\right),\quad i\geqslant 1, n\geqslant 1. \tag{5}$$

所以式(3)中的 $m_{i0}^{(n-1)}$ 是递归可计算的. 我们的第2个结果如下.

定理2 给定正则不可约的单生 Q 矩阵 (q_{ij}). 设对应的单生过程 $X(t)$ 常返. 则 $X(t)$ 是 ℓ 遍历的当且仅当 $d^{(\ell)}<\infty$,其中 ℓ 是正整数. 此时,对所有 $i, j\geqslant 0$ 有 $p_{ij}(t)-\pi_j=o(t^{-(\ell-1)})$(当 $t\to\infty$ 时),其中 $(p_{ij}(t))$ 为 $X(t)$ 的转移概率矩阵,(π_i) 为 $X(t)$ 的平稳分布.

注意到,若过程指数遍历,则过程必定 ℓ 遍历(对一切 $\ell\geqslant 1$). 反之,若过程对一切 $\ell\geqslant 1$ 是 ℓ 遍历的,在什么条件下过程是指数遍历的呢? 下面的定理将就单生过程回答这一问题.

定理3 给定正则不可约的单生 Q 矩阵 (q_{ij}) 满足 $\inf\limits_i q_i>0$. 假定对应的单生过程 $X(t)$ 常返. 则 $X(t)$ 是指数遍历的当且仅当存在一个正常数 γ,使得对所有充分大的 ℓ 都有 $d^{(\ell)}/(\ell-1)!\leqslant\gamma^\ell$;等价地,

$$\varlimsup_{\ell\to\infty}\sqrt[\ell]{d^{(\ell)}/\ell!}<\infty.$$

2 定理1的证明

我们先讲一些定理1的研究背景. 在文献[5]中,我们致力于寻找单生过程指数遍历的显式判别准则,最后得到的显式充分条件就是式(2),用的方法是构造方程的 Lyapunov 检验函数(详细内容参考文献[5]). 本节的方法与之不同,是击中时矩的比较方法. 主要源于式(1)构造的特殊生灭 Q 矩阵 (a_i, b_i). 因为令 $\mu_0=1$, $\mu_i=b_0b_1\cdots b_{i-1}/a_1a_2\cdots a_i\,(i\geqslant 1)$. 则由式(1)有

$$\mu_i=\frac{q_{01}}{q_{i,i+1}F_i^{(0)}},$$
$$\frac{1}{\mu_ib_i}=\frac{F_i^{(0)}}{q_{01}},\quad i\geqslant 0. \tag{6}$$

此外,还有

$$\delta:=\sup_{i>0}\sum_{j=0}^{i-1}\frac{1}{\mu_jb_j}\sum_{j=i}^{\infty}\mu_j=$$
$$\sup_{i>0}\sum_{j=0}^{i-1}F_j^{(0)}\sum_{j=i}^{\infty}\frac{1}{q_{j,j+1}F_j^{(0)}}=M.$$

因此,若生灭 Q 矩阵 (a_i, b_i) 正则,由文献[5]的定理3.5及上式知,文献[5]得到的显式充分条件(1.2),其本质上应该是指,该生灭过程的指数遍历蕴含单生过程的指数遍历性. 而后我们进行研究发现,2个过程的击中时的各阶矩存在一个比较关系,由此得到了更多结论即为定理1,当然也就单生过程指数遍历的这个充分条件(2)给出了一个新证明,同时加强了对该条件的理解:对单生过程指数遍历性而言,该条件还不是最终的必要条件. 顺便说一句,定理1的一部分结论已经收录在文献[1]中.

在证明定理1之前,介绍一个命题.

命题1 给定全稳定保守不可约的单生 Q 矩阵 (q_{ij}). 定义生灭 Q 矩阵 (a_i^*, b_i^*) 如下:

$$a_i^*=\sum_{j=0}^{i-1}q_{ij}=q_i^{(i-1)},\quad i\geqslant 1;$$
$$b_i^*=q_{i,i+1},\quad i\geqslant 0. \tag{7}$$

假定 (a_i^*, b_i^*) 正则. 若该生灭过程指数遍历,则 (q_{ij}) 单生过程亦然.

证明 显然,2个 Q 矩阵 (q_{ij}) 和 (a_i^*, b_i^*) 是可比的. 由文献[1]和[14,15]知,对应的过程是随机可比的,而且 (q_{ij}) 正则. 因此,对于任意单增函数 g,我们有

$$\Omega g(i):=\sum_{j\neq i}q_{ij}(g_j-g_i)\leqslant\Omega^*g(i):=$$
$$b_i^*(g_{i+1}-g_i)+a_i^*(g_{i-1}-g_i),\quad i\geqslant 0.$$

故由命题的假设和文献[5]的注2.2知,方程 $\Omega^*g(i)\leqslant-\lambda g_i\,(i\geqslant 1)$ 有一个非负单增解,其中 λ 为满足对所有 $i\geqslant 0$ 有 $q_i>\lambda$ 的正常数. 由以上,我们就可得到方程 $\Omega g(i)\leqslant-\lambda g_i\,(i\geqslant 1)$ 的一个非负解. 由这些事实和文献[1]中定理4.45的(2),命题结论立刻得证.

注1 观察式(1)定义的生灭 Q 矩阵 (a_i, b_i) 和式(2)定义的生灭 Q 矩阵 (a_i^*, b_i^*). 由 $q_{i,i+1}F_i^{(0)}/F_{i-1}^{(0)}\geqslant q_i^{(i-1)}$,即 $a_i\geqslant a_i^*$,我们知道 (a_i, b_i) 和 (a_i^*, b_i^*) 是可比的. 所以,(a_i, b_i) 过程被 (a_i^*, b_i^*) 过程随机控制. 因此,类似于命题1,我们知道后者的指数遍历性蕴含前者的指数遍历性. 但原先的单生 Q 矩阵 (q_{ij}) 和 (a_i, b_i) 不是可比的,即 (a_i, b_i) 过程不能随机控制单生 (q_{ij}) 过程. 因此命题1的方法失效. 在定理1的证明中,我们将用到的是击中时矩的比较方法,它应该是弱于随机可比性的.

定理1的证明 首先,由式(1),我们有

$$\sum_{i=0}^{\infty}(\mu_ib_i)^{-1}=q_{01}^{-1}\sum_{i=0}^{\infty}F_i^{(0)}.$$

故定理的第1个结论由文献[1]的定理4.52和定理4.55立刻得出.

其次,由定理假设和上面的结论知,生灭过程是常返的,继而,生灭 Q 矩阵 (a_i, b_i) 是正则的. 下面对单生过程 $X(t)$ 和生灭 (a_i, b_i) 过程 $\overline{X}(t)$,分别考虑状态0的击中时 $\tau_0=\inf\{t>0: X(t)=0\}$ 和 $\overline{\tau}_0=\inf\{t>0: \overline{X}(t)=0\}$.

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

对所有 $i \geqslant 1$ 和 $n \geqslant 0$, 定义 $m_i^{(n)} = E_i \tau_0^n$, $\overline{m_i^{(n)}} = E_i \overline{\tau}_0^n$. 由文献[16]第 3 章的一个结果(或者文献[17]第 9 章, 或者文献[18]), 我们得到

$$\overline{m_i^{(n)}} = n\sum_{j=0}^{i-1}\frac{1}{\mu_j b_j}\sum_{k=j+1}^{\infty}\mu_k\overline{m_k^{(n-1)}} = n\sum_{j=0}^{i-1}F_j^{(0)}\sum_{k=j+1}^{\infty}\frac{\overline{m_k^{(n-1)}}}{q_{k,k+1}F_k^{(0)}},\quad i \geqslant 1, n \geqslant 1. \tag{8}$$

显然对所有 $i \geqslant 1$ 有 $\overline{m_i^{(0)}} = 1$.

由文献[4]知, $(m_i^{(n)})$ 是下列方程的最小非负解:

$$\begin{aligned} x_0^{(n)} &= 0,\\ x_i^{(n)} &= \sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{q_i}x_k^{(n)} + \frac{n}{q_i}x_i^{(n-1)},\quad i \geqslant 1, \end{aligned} \tag{9}$$

其中 $x_i^{(0)} = 1\ (i \geqslant 1)$. 现在, 令

$$\begin{aligned} y_i^{(0)} &= 1,\\ y_i^{(n)} &= n\sum_{j=0}^{i-1}F_j^{(0)}\sum_{k=j+1}^{\infty}\frac{y_k^{(n-1)}}{q_{k,k+1}F_k^{(0)}},\\ &\quad i \geqslant 1,\ n \geqslant 1. \end{aligned}$$

则不难由式(8)得出 $y_i^{(n)} = \overline{m_i^{(n)}}$, 而且 $(y_i^{(n)})$ 满足下列方程

$$\begin{aligned} \overline{x}_0^{(n)} &= 0,\\ \overline{x}_i^{(n)} &\geqslant \sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{q_i}\overline{x}_k^{(n)} + \frac{n}{q_i}\overline{x}_i^{(n-1)},\quad i \geqslant 1, \end{aligned} \tag{10}$$

其中 $\overline{x}_i^{(0)} = 1\ (i \geqslant 1)$. 因此, 由比较定理, 有 $m_i^{(n)} \leqslant \overline{m_i^{(n)}}$ 对所有 $i \geqslant 1$ 和 $n \geqslant 0$ 成立. 继而, 可以得到 $E_i e^{\lambda\tau_0} \leqslant E_i e^{\lambda\overline{\tau}_0}$ 对所有 $i \geqslant 1$ 和 $\lambda > 0$ 成立. 由上述事实, 结合文献[1]定理 4.44 和生灭过程的遍历性准则(参看文献[1]定理 4.55), 则定理的第 2 部分结论可以立刻得证.

下面的例子将告诉我们, 条件(2)只是指数遍历的一个充分条件而不能成为判别准则.

例 1　任意给定 $q_{01} > 0$. 对所有 $i \geqslant 1$, 取 $q_{i,i+1} = i^{\gamma}$, $q_{i0} = i^{\gamma-1}$, 其中常数 $\gamma \in (1,2)$, 而对其他的 $i \neq j$, 取 $q_{ij} = 0$. 显然, Q 矩阵不可约. 容易算得 $F_i^{(0)} = 1$ (对所有 $i \geqslant 0$). 所以对应的单生过程是常返的, 进而单生 Q 矩阵正则. 注意到 $\inf_{i\geqslant 1} q_{i0} = 1 > 0$. 一方面, 由文献[7]知, 该单生过程是强遍历的, 进而是指数遍历的.

另一方面, 由式(1)的定义有 $a_i = b_i = i^{\gamma}$. 再由文献[1, 5]或[13], 我们知道该生灭过程遍历而不是指数遍历的. 所以 $M = \infty$.

3　定理 2 和定理 3 的证明

定理 2 的证明　当 $\ell = 1$ 时定理的结论是熟知的, 参看文献[1]. 在文献[7]的定理 1 中, 我们已经证明下列结果:

$$\begin{aligned} m_{10}^{(n)} &= nd^{(n)},\\ m_{i0}^{(n)} &= n\sum_{j=0}^{i-1}\left(F_j^{(0)}d^{(n)} - d_j^{(n)}\right),\quad i \geqslant 1, \end{aligned} \tag{11}$$

和

$$m_{00}^{(n)} = n!\left(q_{01}^{-n} + \sum_{k=1}^{n}\left(k!\,q_{01}^{n-k}\right)^{-1}m_{10}^{(k)}\right),\quad n \geqslant 1. \tag{12}$$

因此, 若单生过程 $X(t)$ 是 ℓ 遍历的, 则 $m_{00}^{(\ell)} < \infty$. 由式(11)和(12)立刻可知 $d^{(\ell)} = m_{10}^{(\ell)}/\ell < \infty$.

反之, 若 $d^{(\ell)} < \infty$, 则由式(11)知 $m_{10}^{(\ell)} < \infty$, 进而我们得到 $m_{10}^{(k)} < \infty\ (k = 1, \cdots, \ell)$. 再由式(12)知 $m_{00}^{(\ell)} < \infty$, 所以 $X(t)$ 是 ℓ 遍历的. 定理的最后一部分结论则由文献[4]定理 1.2 直接得到.

定义 $\bar{d}^{(n)} := \sup_{i\geqslant 0} d_i^{(n)}/F_i^{(0)}$. 特别地, 将 $\bar{d}^{(1)}$ 简记为 $\bar{d}$. 一般地, 容易知道 $d^{(n)} \leqslant \bar{d}^{(n)}$. 我们还有下面类似于文献[1]引理 4.54 的结论.

命题 2　给定单生 Q 矩阵 (q_{ij}). 则方程

$$\begin{aligned} x_0^{(n)} &= 0,\\ x_i^{(n)} &\geqslant \sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{q_i}x_k^{(n)} + \frac{n}{q_i}m_{i0}^{(n-1)},\quad i \geqslant 1. \end{aligned} \tag{13}$$

有一有限非负单调增的解当且仅当 $\bar{d}^{(n)} < \infty\ (n \geqslant 1)$. 此时, 以下即是这样的解:

$$\begin{aligned} x_1^{(n)} &\in [n\bar{d}^{(n)}, \infty),\\ x_i^{(n)} &= \sum_{j=0}^{i-1}\left(F_j^{(0)}x_1^{(n)} - nd_j^{(n)}\right),\quad i \geqslant 1. \end{aligned} \tag{14}$$

证明　类似于文献[7]定理 1 的证明, 从式(13)出发, 可以推出

$$x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)} \leqslant F_i^{(0)}x_1^{(n)} - nd_i^{(n)},\quad i \geqslant 0. \tag{15}$$

如果 $\bar{d}^{(n)} < \infty$, 由上式容易看出, 式(14)即是方程(13)的有限非负单调增解(且使得方程(13)的等号成立). 反之, 如果方程(13)存在有限非负单调增解 $(x_i^{(n)})$, 则由式(15)和单调增性, 可以推出

$$0 \leqslant F_i^{(0)}x_1^{(n)} - nd_i^{(n)},\quad i \geqslant 0.$$

因此, 有 $\bar{d}^{(n)} \leqslant x_1^{(n)}/n < \infty$.

注意到生灭过程是单生过程的特例. 因此, 对任意生灭 Q 矩阵 (a_i, b_i) 而言, 对应地有

$$F_i^{(0)} = \frac{b_0}{\mu_i b_i},$$

$$d_i^{(n)} = \frac{1}{\mu_i b_i}\sum_{j=1}^{i}\mu_j m_{j0}^{(n-1)},\quad i \geqslant 1,\ n \geqslant 1,$$

其中 $\mu_0 = 1$ 和 $\mu_i = \dfrac{b_0 b_1 \cdots b_{i-1}}{a_1 a_2 \cdots a_i}\ (i \geqslant 1)$. 观察到

$$\lim_{i\to\infty}\frac{\sum_{j=0}^{i}d_j^{(n)}}{\sum_{j=0}^{i}F_j^{(0)}} = \lim_{i\to\infty}\frac{d_i^{(n)}}{F_i^{(0)}} = \frac{1}{b_0}\sum_{j=1}^{\infty}\mu_j m_{j0}^{(n-1)}.$$

所以, 对生灭过程有

$$d^{(n)} = \bar{d}^{(n)} = \frac{1}{b_0}\sum_{i=1}^{\infty}\mu_i m_{i0}^{(n-1)}. \tag{16}$$

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　　http://www.cnki.net

此时, 由式(11)和以上讨论, 可以得到(见文献[16])

$$m_{i0}^{(n)} = n\sum_{j=0}^{i-1}\frac{1}{\mu_j b_j}\sum_{k=j+1}^{\infty}\mu_k m_{k0}^{(n-1)},\quad i\geqslant 1,\ n\geqslant 1.$$

注意 $m_{i0}^{(0)}=1\ (i\geqslant 1)$. 然后由定理2和式(16)立刻得到下面的推论(参看文献[19]).

推论1 给定正则不可约的生灭 Q 矩阵 (a_i, b_i). 设对应的生灭过程常返. 则其 ℓ 遍历当且仅当 $\sum_{i=1}^{\infty}\mu_i m_{i0}^{(\ell-1)}<\infty$, 其中 $\ell\geqslant 1$, 而 $m_{i0}^{(n)}$ 由上式递推计算.

基于定理1证明中的比较方法和上述推论, 可得到单生过程 ℓ 遍历的一个充分条件.

定理4 给定正则不可约的单生 Q 矩阵 (q_{ij}). 设对应的单生过程 $X(t)$ 常返. 同式(1)定义生灭 Q 矩阵 (a_i, b_i). 如果对应的生灭过程 $\overline{X}(t)$ 是 ℓ 遍历的, 即若

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\overline{m}_{i0}^{(\ell-1)}}{q_{i,i+1}F_i^{(0)}}<\infty, \tag{17}$$

其中

$$\overline{m}_{i0}^{(0)} = 1,$$
$$\overline{m}_{i0}^{(n)} = n\sum_{j=0}^{i-1}F_i^{(0)}\sum_{k=j+1}^{\infty}\frac{\overline{m}_{k0}^{(n-1)}}{q_{k,k+1}F_k^{(0)}},$$
$$n\geqslant 1,\ i\geqslant 1,$$

则单生过程 $X(t)$ 亦 ℓ 遍历.

证明 对生灭过程 $\overline{X}(t)$ 可类似地定义 $\overline{\mu}_i$ 和 $\overline{\sigma}_i$ 以及 $\overline{m}_{ij}^{(k)}$. 在定理1的证明中实际上已经有以下结论:

$$m_{i0}^{(k)}\leqslant\overline{m}_{i0}^{(k)},\quad i\geqslant 1,\ k\geqslant 0. \tag{18}$$

因此, 若生灭过程 $\overline{X}(t)$ 是 ℓ 遍历的, 由推论1经计算可知, 这与式(17)等价, 再由定理2知 $\overline{d}^{(\ell)}<\infty$. 结合式(11)和(18)得出

$$d^{(\ell)} = m_{10}^{(\ell)}/\ell\leqslant\overline{m}_{10}^{(\ell)}/\ell = \overline{d}^{(\ell)}<\infty.$$

再由定理2知单生过程 $X(t)$ 是 ℓ 遍历的. 定理证毕.

注2 在定理4的条件下, 由定理1的证明知, $(\overline{m}_{i0}^{(n)})$ 是方程(13)的有限非负单调增解. 从命题2的证明得到 $\overline{d}^{(n)}\leqslant\overline{m}_{10}^{(n)}/n$. 因此,

$$d^{(n)}\leqslant\overline{d}^{(n)}\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\overline{m}_{i0}^{(n-1)}}{q_{i,i+1}F_i^{(0)}}<\infty,\quad 1\leqslant n\leqslant\ell.$$

注3 由定理1知, 上述单生过程 $X(t)$ 与生灭过程 $\overline{X}(t)$ 的常返性是等价的. 但是该生灭过程 $\overline{X}(t)$ 零常返一般不蕴含单生过程 $X(t)$ 零常返. 否则, 等价地有, 单生过程 $X(t)$ 正常返(1遍历)蕴含该生灭过程 $\overline{X}(t)$ 正常返, 再由定理4知两者的正常返性是等价的, 这一般是不成立的.

定理3的证明

(i) 不失一般性, 假设对所有 $\ell\geqslant 1$ 有 $\frac{d^{(\ell)}}{(\ell-1)!}\leqslant\gamma^{\ell}$ 成立. 由式(11)知, $m_{10}^{(\ell)}=\ell d^{(\ell)}$. 所以, 对 $0<\lambda<\gamma^{-1}$, 我们得到

$$E_1 e^{\lambda\sigma_0} = \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{\lambda^{\ell}}{\ell!}m_{10}^{(\ell)} = 1+\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{\lambda^{\ell}}{(\ell-1)!}d^{(\ell)}\leqslant 1+\sum_{\ell=0}^{\infty}(\lambda\gamma)^{\ell} = \frac{1}{1-\lambda\gamma}<\infty.$$

定义

$$e_{i0}(\lambda) = \int_0^{\infty}e^{\lambda t}P_i[\sigma_0>t]\,dt,\quad i\geqslant 0.$$

则 $E_i e^{\lambda\sigma_0} = \lambda e_{i0}(\lambda)+1$. 选取 $\lambda\in(0,\gamma^{-1}\wedge\inf_i q_i)$. 由上述讨论我们知道 $e_{10}(\lambda)<\infty$. 因此, 由文献[1]的引理4.19和引理4.48及不可约性, 可得 $e_{00}(\lambda)<\infty$. 继而 $E_0 e^{\lambda\sigma_0}<\infty$. 再由文献[1]定理4.44得证充分性.

(ii) 若过程指数遍历, 由文献[1]定理4.44知, 存在 $\lambda\in(0,\inf_i q_i)$ 使得 $E_0 e^{\lambda\sigma_0}<\infty$. 再由文献[1]的引理4.19和引理4.48及不可约性, 得出 $e_{10}(\lambda)<\infty$. 所以 $E_1 e^{\lambda\sigma_0}<\infty$, 即级数

$$\sum_{\ell=0}^{\infty}\lambda^{\ell}d^{(\ell)}/(\ell-1)!$$

收敛.

因此, $$\lim_{\ell\to\infty}\frac{\lambda^{\ell}d^{(\ell)}}{(\ell-1)!} = 0<1.$$

进而, 对所有充分大的 ℓ, 我们有 $\frac{d^{(\ell)}}{(\ell-1)!}\leqslant\gamma^{\ell}$, 其中 $\gamma=1/\lambda$. 必要性得证. 由Stirling公式, 容易证明该条件等价于 $\varlimsup_{\ell\to\infty}\sqrt[\ell]{d^{(\ell)}}/\ell<\infty$.

4 参考文献

[1] Chen Mufa. From Markov chains to non-equilibrium particle systems [M]. 2nd ed. Singapore: World Scientific, 2004

[2] Kemeny J G, Snell J L, Knapp A W. Denumerable Markov chains[M]. New York: Springer-Verlag, 1976

[3] Mao Yonghua. Algebraic convergent for discrete-time ergodic Markov chains[J]. Science in China: A, 2003, 46: 621

[4] Mao Yonghua. Ergodic degrees for continuous-time Markov chains[J]. Science in China: A, 2004, 47: 161

[5] Mao Yonghua, Zhang Yuhui. Exponential ergodicity for single birth processes[J]. J Appl Prob, 2004, 41: 1022

[6] Zhang Yuhui. Strong ergodicity for single-birth processes [J]. J Appl Prob, 2001, 38: 270

[7] 张余辉. 单生过程首中时的各阶矩[J]. 北京师范大学学报: 自然科学版, 2003, 39(3): 430

[8] 张余辉. 单生过程击中时与平稳分布[J]. 北京师范大学学报: 自然科学版, 2004, 40(2): 157

[9] Chen Mufa. Single birth processes[J]. Chinese Ann Math, 1999, 20B: 77

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

[10] 张余辉, 赵倩倩. 几类单生 Q 矩阵[J]. 北京师范大学学报: 自然科学版, 2006, 42(2): 111

[11] 张余辉, 赵倩倩. 几类单生 Q 矩阵(续)[J]. 北京师范大学学报: 自然科学版, 2008, 44(1): 4

[12] Zhang Jiankang. On the generalized birth and death processes(I)[J]. Acta Math Sci, 1984, 4: 241

[13] Chen Mufa. Explicit bounds of the first eigenvalue[J]. Science in China: A, 2000, 4: 1051

[14] Zhang Yuhui. Sufficient and necessary conditions for stochastic comparability of jump processes[J]. Acta Math Sin, 2000, 16: 99

[15] 张余辉. 跳过程唯一性的一个问题[J]. 应用概率统计, 1998, 14: 45

[16] 王梓坤. 生灭过程与马尔可夫链[M]. 北京: 科学出版社, 1980

[17] 侯振挺, 郭青峰. 齐次可列马尔可夫过程[M]. 北京: 科学出版社, 1978

[18] Wang Zikun, Yang Xiangqun. Birth and death processes and Markov chains[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1992

[19] Coolen Schrijner P, van Doorn E A. The deviation matrix of the continuous-time Markov chains[J]. Probab Engrg Inform Sci, 2002, 16: 351

A NOTE ON EXPONENTIAL ERGODICITY AND ℓ-ERGODICITY OF SINGLE BIRTH PROCESSES

ZHANG Yuhui

(School of Mathematical Sciences, Beijing Normal University, 100875, Beijing, China)

Abstract In the paper, an explicit and sufficient condition on exponential ergodicity of single birth processes is proven again by the comparison of moments of hitting time, which is different from the method reported in a previous work. Meanwhile, an explicit criterion on ℓ-ergodicity for single birth processes is obtained.

Key words single birth processes; birth-death processes; exponentially ergodic; strongly ergodic; ℓ-ergodic

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net