几类单生 Q 矩阵(续)*

张余辉[1)] 赵倩倩[2)]

(1) 北京师范大学数学科学学院, 100875, 北京; 2) 曲阜师范大学数学科学学院, 273165, 山东, 曲阜)

摘要 研究了2类特定的单生 Q 矩阵, 得到了其决定的单生过程遍历和强遍历的判别准则, 同时就其指数遍历性, 给出了必要条件和充分条件.

关键词 单生过程; 遍历; 强遍历; 指数遍历

1 引言和主要结果

考虑不可约全稳定且保守的单生 Q 矩阵, 即对一切 $i\geqslant 0$ 有

$$q_i := -q_{ii} = \sum_{j\neq i} q_{ij} < \infty,$$

且对所有的 $i\geqslant 0$ 和 $j\geqslant 2$ 满足 $q_{i,i+1}>0$, $q_{i,i+j}=0$. 单生过程则是由单生 Q 矩阵决定的 Q 过程. 关于单生过程的研究背景和相关结果, 有兴趣的读者可参看文献[1-9]. 本文还是沿用国内文献中的记号. 我们的研究实际上是文献[7]工作的继续, 主要研究了2类单生 Q 过程的遍历、指数遍历和强遍历的判别准则, 这2类单生过程的平稳分布已经在文献[7]中给出.

我们的主要结果如下.

定理 1 令 $q_{i0}=\alpha_i>0(i\geqslant 1)$, $q_{i,i+1}=\beta_i>0(i\geqslant 0)$, 其他的 $q_{ij}=0(i\neq j)$. 假定该单生 Q 矩阵是正则的, α_i 单调减且过程是常返的. 约定 $\alpha_0=+\infty$ 和 $\frac{1}{\infty}=0$. 记 $h_i=\frac{1}{\alpha_i}(i\geqslant 0)$. 则

1) 过程遍历当且仅当级数

$$\sum_{i=1}^{\infty}(h_i-h_{i-1})\prod_{j=0}^{i-1}\beta_j/q_j \text{ 收敛.}$$

2) 过程指数遍历的必要条件是

$$\inf_{i\geqslant 1}(\alpha_i+\beta_i)>0$$

和

$$\delta := \sup_{i\geqslant 1}\sum_{j=0}^{i-1}F_j^{(0)}\sum_{j=i}^{\infty}\frac{\alpha_j(h_j-h_{j-1})}{\beta_j F_j^{(0)}}<\infty,$$

其中 $F_0^{(0)}=1$ 和 $F_i^{(0)}=\frac{\alpha_i}{\beta_i}\prod_{k=0}^{i-1}\frac{q_k}{\beta_k}(i\geqslant 1)$.

3) 若 $\inf_{i\geqslant 1}(\alpha_i+\beta_i)>0$, $\sup_{i\geqslant 1}\alpha_{i+1}/\alpha_i<1$ 且 $\delta<\infty$, 则过程指数遍历.

4) 过程强遍历的充分必要条件是级数

$$\sum_{i=0}^{\infty}F_i^{(0)}\sum_{j=i+1}^{\infty}\frac{\alpha_j(h_j-h_{j-1})}{\beta_j F_j^{(0)}},$$

即

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i(h_i-h_{i-1})}{\beta_i F_i^{(0)}}\sum_{j=0}^{i-1}F_j^{(0)}$$

收敛; 若 $\lim_{i\to\infty}\frac{\alpha_i q_{i-1}}{\beta_i\alpha_{i-1}}$ 存在且大于1, 则单生过程强遍历当且仅当级数 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i(h_i-h_{i-1})}{\beta_i}$ 收敛.

定理 2 令 $q_{i,i+1}=\beta_i>0(i\geqslant 0)$, $q_{ij}=\beta_i/i(0\leqslant j\leqslant i-1)$, 其他的 $q_{ij}=0(i\neq j)$. 假定 β_i/i 关于 i 单调减, 记 $h_i=i/\beta_i(i\geqslant 0)$, 则

1) 过程遍历当且仅当级数

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(h_i-h_{i-1})(i-1)!}{(2i-1)!!} \text{ 收敛.}$$

2) 过程指数遍历的必要条件是 $\inf_{i\geqslant 0}\beta_i>0$ 和

$$\sup_{i\geqslant 1}\sum_{j=0}^{i-1}F_j^{(0)}\sum_{j=i}^{\infty}\frac{h_j-h_{j-1}}{jF_j^{(0)}}<\infty, \qquad (1)$$

其中 $F_0^{(0)}=1$ 和 $F_i^{(0)}=(2i-1)!!/i!\ (i\geqslant 1)$.

3) 过程强遍历当且仅当

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{h_i-h_{i-1}}{i}<\infty.$$

实际上, 由文献[7]的定理1, 可以得到比上面这一类更广的单生 Q 矩阵指数遍历的判别准则如下.

定理 3 令 $q_{i,i+1}=\beta_i>0(i\geqslant 0)$, $q_{ij}=\beta_i/i(0\leqslant j\leqslant i-1)$, 其他的 $q_{ij}=0(i\neq j)$. 则过程指数遍历当且仅当 $\beta=\inf_{i\geqslant 0}\beta_i>0$.

注意定理3的条件中没有"β_i/i 关于 i 单调减"的假定, 所以该定理中的单生 Q 矩阵比定理2的更一般. 另外, 在定理2的条件下, "$\beta>0$"一定蕴含式(1)成立, 这一点由定理3立刻可知.

2 定理的证明

为了证明定理, 对 $0\leqslant k<n$ $(k,n\in\mathbf{Z}_+)$, 定义

* 国家"九七三"计划资助项目; 国家自然科学基金资助项目(10121101); 教育部博士点基金资助项目(20040027009)
收稿日期: 2007-04-06

$q_n^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} q_{nj}$. 再定义

$$m_0 = \frac{1}{q_{01}},\quad m_n = \frac{1}{q_{n,n+1}}\Big(1+\sum_{k=0}^{n-1} q_n^{(k)} m_k\Big),\quad n\geqslant 1,$$

$$F_n^{(n)} = 1,\quad F_n^{(i)} = \frac{1}{q_{n,n+1}}\sum_{k=i}^{n-1} q_n^{(k)} F_k^{(i)},\quad 0\leqslant i<n,$$

$$d_0=0,\quad d_n = \frac{1}{q_{n,n+1}}\Big(1+\sum_{k=0}^{n-1} q_n^{(k)} d_k\Big),\quad n\geqslant 1.$$

易知, $m_i = F_i^{(0)}/q_{01} + d_i\ (i\geqslant 0)$. 记$(X(t))_{t\geqslant 0}$为相应的单生过程. 定义状态 0 的首中时为 $\tau_0 := \inf\{t>0: X(t)=0\}$, 其从状态 i 出发的 n 阶矩为 $m_i^{(n)} = E_i\tau_0^n\ (i\geqslant 1)$. 再定义

$$d_0^{(n)}=0,$$

$$d_i^{(n)} = \frac{1}{q_{i,i+1}}\Big(m_i^{(n-1)} + \sum_{k=0}^{i-1} q_i^{(k)} d_k^{(n)}\Big),\ i\geqslant 1,$$

$$d^{(n)} = \sup_{i\geqslant 1}\frac{\sum_{j=0}^{i-1} d_j^{(n)}}{\sum_{j=0}^{i-1}F_j^{(0)}} = \sup_{i\geqslant 0}\frac{\sum_{j=0}^{i} d_j^{(n)}}{\sum_{j=0}^{i}F_j^{(0)}}.$$

注意 $m_i^{(0)}=1\ (i\geqslant1)$. 故当 $n=1$ 时, $d_j^{(1)} = d_j\ (j\geqslant 0)$, 进而可简记 $d^{(1)}$ 为 d. 由文献[5]知,

$$m_i^{(n)} = n\sum_{j=0}^{i-1}(F_j^{(0)} d^{(n)} - d_j^{(n)}),\quad i\geqslant 1.\qquad(2)$$

定理 1 的证明 (i) 易知, 对所有的 $0\leqslant j\leqslant i-1$, 有 $q_i^{(j)}=\alpha_i$ 且 $q_i = \alpha_i+\beta_i\ (i\geqslant 1)$, $q_0=\beta_0$. 由定义得

$$F_0^{(0)}=1,\quad F_i^{(0)} = \frac{\alpha_i}{\beta_i}\sum_{j=0}^{i-1}F_j^{(0)},\quad i\geqslant 1;$$

$$d_0^{(n)}=0,\quad d_i^{(n)} = \frac{m_i^{(n-1)}}{\beta_i} + \frac{\alpha_i}{\beta_i}\sum_{j=0}^{i-1} d_j^{(n)},\quad i\geqslant1.$$

归纳可证

$$F_i^{(0)} = \frac{\alpha_i q_{i-1}}{\beta_i\alpha_{i-1}}F_{i-1}^{(0)},$$

$$d_i^{(n)} = \frac{m_i^{(n-1)}}{\beta_i} - \frac{\alpha_i m_{i-1}^{(n-1)}}{\beta_i\alpha_{i-1}} + \frac{\alpha_i q_{i-1}}{\beta_i\alpha_{i-1}} d_{i-1}^{(n)},\ i\geqslant 2.\qquad(3)$$

注意到 $F_1^{(0)} = \alpha_1/\beta_1$ 和 $\beta_0 = q_0$. 则由式(3)计算得到

$$F_i^{(0)} = \frac{\alpha_i}{\beta_i}\prod_{k=0}^{i-1}\frac{q_k}{\beta_k},\quad i\geqslant 1.\qquad(4)$$

定义 $h_i^{(n)} = m_i^{(n-1)}/\alpha_i\ (i\geqslant 0)$. 用数学归纳法可以证明

$$d_i^{(n)} = F_i^{(0)}\sum_{k=1}^{i}\frac{\alpha_k}{\beta_k F_k^{(n)}}(h_k^{(n)} - h_{k-1}^{(n)}),\quad i\geqslant 0.\qquad(5)$$

所以, 我们推出

$$\sum_{j=0}^{i} d_j^{(n)} = \sum_{k=1}^{i}\frac{\alpha_k}{\beta_k F_k^{(n)}}(h_k^{(n)} - h_{k-1}^{(n)})\sum_{j=k}^{i}F_j^{(0)},\quad i\geqslant 0.$$

进而

$$\frac{\sum_{j=0}^i d_j^{(n)}}{\sum_{j=0}^i F_j^{(0)}} = \sum_{k=1}^{i}\frac{\alpha_k}{\beta_k F_k^{(0)}}(h_k^{(n)} - h_k^{(n)})\Big(1-\frac{\sum_{j=0}^{k-1}F_j^{(0)}}{\sum_{j=0}^{i}F_j^{(0)}}\Big) =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{\beta_k F_k^{(0)}}(h_k^{(n)} - h_{k-1}^{(n)})\Big(1-\frac{\sum_{j=0}^{k-1}F_j^{(0)}}{\sum_{j=0}^{i}F_j^{(0)}}\Big)\mathbf{1}_{\{k\leqslant i\}},\quad i\geqslant 0.$$

在后面将归纳证明对于每个 $n\geqslant1$, $m_i^{(n-1)}$ 关于 i 是单调增的, 因此

$$h_i^{(n)} - h_{i-1}^{(n)} \geqslant (h_i - h_{i-1})\, m_i^{(n-1)},\quad i\geqslant 1.\qquad(6)$$

由 α_i 单调减(即 h_i 单调增)的假设知 $h_i^{(n)}$ 关于 i 也单调增. 由过程是常返的假设及文献[2]的定理 4.52 知 $\sum_{j=0}^\infty F_j^{(0)}=\infty$. 故当 $i\to\infty$ 时, 由单调收敛定理可得

$$\frac{\sum_{j=0}^i d_j^{(n)}}{\sum_{j=0}^i F_j^{(0)}}\uparrow \sum_{k=1}^\infty \frac{\alpha_k}{\beta_k F_k^{(0)}}(h_k^{(n)} - h_{k-1}^{(n)}) = d^{(n)}.\qquad(7)$$

故由遍历判别准则[2]知, 过程遍历当且仅当 $d<\infty$, 即级数

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{\alpha_k(h_k^{(1)} - h_{k-1}^{(1)})}{\beta_k F_k^{(0)}}$$

收敛. 注意到 $h_i^{(1)} = h_i$ 和式(4). 由此即可得到结论 1).

下面补证 $m_i^{(n-1)}$ 关于 i 的单调增性质, 结论 1)的证明即完成. 显然结论对 $m_i^{(0)}$ 成立. 由式(2)、(5)和(7)知,

$$m_i^{(n)} = n\sum_{j=0}^{i-1}F_j^{(0)}\sum_{k=j+1}^\infty\frac{\alpha_k}{\beta_kF_k^{(0)}}(h_k^{(n)} - h_{k-1}^{(n)}),\quad i\geqslant1,\ n\geqslant1.\qquad(8)$$

由 h_i 单调增的假设及上式, 可推出 $m_i^{(1)}$ 是单调增的, 由此又可推出 $h_i^{(2)}$ 是单调增的, 进而再由上式得到 $m_i^{(2)}$ 的单调增性质. 因此, 由归纳法不难得出对于每个 $n\geqslant1$, $m_i^{(n-1)}$ 单调增的结论.

(ii) 由式(6)、(8)和 $m_i^{(n-1)}$ 单调增性质, 我们有

$$m_i^{(n)}\geqslant n\sum_{j=0}^{i-1}F_j^{(0)}\sum_{k=i}^\infty\frac{\alpha_k(h_k-h_{k-1})}{\beta_kF_k^{(0)}}m_k^{(n-1)}\geqslant$$

$$n\Big(\sum_{j=0}^{i-1}F_j^{(0)}\sum_{k=i}^\infty\frac{\alpha_k(h_k-h_{k-1})}{\beta_kF_k^{(0)}}\Big)m_i^{(n-1)},\quad n\geqslant2.$$

同时, 注意到

$$m_i^{(1)}\geqslant\sum_{j=0}^{i-1}F_j^{(0)}\sum_{k=i}^\infty\frac{\alpha_k(h_k-h_{k-1})}{\beta_kF_k^{(0)}}.$$

因此, 归纳得到

$$m_i^{(n)}\geqslant n!\Big(\sum_{j=0}^{i-1}F_j^{(0)}\sum_{k=i}^\infty\frac{\alpha_k(h_k-h_{k-1})}{\beta_kF_k^{(0)}}\Big)^n,\quad n\geqslant1.$$

下面的证明同文献[3]. 由过程指数遍历知存在 λ 满足 $0<\lambda<q_i$ (对于一切 $i\geqslant0$), 使得 $E_ie^{\lambda\tau_0}<\infty\ (i\geqslant1)$. 再由其 Taylor 展开式及上式推出

$$\sum_{n=1}^\infty\Big(\lambda\sum_{j=0}^{i-1}F_j^{(0)}\sum_{k=i}^\infty\frac{\alpha_k(h_k-h_{k-1})}{\beta_kF_k^{(0)}}\Big)^n<\infty,$$

因此, 我们有

$$\sum_{j=0}^{i-1} F_j^{(0)} \sum_{k=i}^{\infty} \frac{\alpha_k(h_k - h_{k-1})}{\beta_k F_k^{(0)}} < \lambda^{-1}, \quad i \geqslant 1.$$

再关于 i 取上确界得 $\delta \leqslant \lambda^{-1} < \infty$. 由过程的指数遍历性及文献[2]中的定理 4.44 或定理 4.45, 可以推出 $q := \inf_{i\geqslant 0} q_i = \min\{\beta_0, \inf_{i\geqslant 1}(\alpha_i + \beta_i)\} > 0$, 等价地, $\inf_{i\geqslant 1}(\alpha_i + \beta_i) > 0$. 结论 2)得证.

(iii) 由文献[2]的定理 4.45(2)知, 单生过程指数遍历当且仅当对某个 λ 满足 $0 < \lambda < q_i (i \in \mathbf{Z}_+)$, 不等式组

$$y_i \geqslant 1, \quad i \geqslant 0;$$
$$\sum_j q_{ij} y_j \leqslant -\lambda y_i, \quad i \geqslant 1 \tag{9}$$

存在一有限解(y_i). 因此, 为证明结论 3), 对待定参数 $\lambda \in (0, q)$, 这里 q 的定义见(ii), 我们需要构造式(9)的一个有限解(g_i). 下面的构造方法来自文献[3]. 首先定义算子

$$\Pi_i(f) = \frac{1}{f_i} \sum_{j=0}^{i-1} F_j^{(0)} \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{\alpha_k(h_k - h_{k-1}) f_k}{\beta_k F_k^{(0)}}, \quad i \geqslant 1.$$

其次, 定义

$$\varphi_i = \beta_0^{-1} \sum_{j=0}^{i-1} F_j^{(0)}, \quad i \geqslant 1.$$

则 φ 关于 i 是单调增的且 $\varphi_1 = \beta_0^{-1}$. 令 $f = c\alpha_1 \sqrt{\beta_0 \varphi}$, 其中常数 $c > 1$. 则 f 单调增且 $f_1 = c\alpha_1$. 再定义 $g = f\,\Pi(f)$. 则 g 是单调增的且

$$g_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k(h_k - h_{k-1}) f_k}{\beta_k F_k^{(0)}} \geqslant \frac{f_1}{\alpha_1} = c > 1.$$

由文献[10]的引理 3.6 可推出

$$g_i = c\alpha_1 \sqrt{\beta_0} \sum_{j=0}^{i-1} F_j^{(0)} \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{\alpha_k(h_k - h_{k-1})\sqrt{\varphi_k}}{\beta_k F_k^{(0)}} \leqslant$$
$$\frac{2\delta c\alpha_1}{\sqrt{\beta_0}} \sum_{j=0}^{i-1} F_j^{(0)} \varphi_{j+1}^{1/2} \leqslant 2\delta c\alpha_1 \sum_{j=0}^{i-1} F_j^{(0)} < \infty, \quad i \geqslant 1.$$

令 $g_0 = 1$, 则 $1 \leqslant g_i < \infty (i \geqslant 0)$. 下面我们基于式(9)来取定参数 λ. 当 $i = 1$, 有 $\lambda \leqslant (c-1)c^{-1}\Pi_1(f)^{-1}$. 当 $i \geqslant 2$, 可以推出 λ 应该满足

$$\lambda g_i \leqslant \sum_{k=0}^{i-1} q_i^{(k)} F_k^{(0)} \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{\alpha_j(h_j - h_{j-1}) f_j}{\beta_j F_j^{(0)}} -$$
$$q_{i,i+1} F_i^{(0)} \sum_{k=i+1}^{\infty} \frac{\alpha_k(h_k - h_{k-1}) f_k}{\beta_k F_k^{(0)}}.$$

为此, 只需要

$$\lambda g_i \leqslant \sum_{k=0}^{i-1} q_i^{(k)} F_k^{(0)} \sum_{j=i}^{\infty} \frac{\alpha_j(h_j - h_{j-1}) f_j}{\beta_j F_j^{(0)}} -$$
$$q_{i,i+1} F_i^{(0)} \sum_{k=i+1}^{\infty} \frac{\alpha_k(h_k - h_{k-1}) f_k}{\beta_k F_k^{(0)}} =$$
$$q_{i,i+1} F_i^{(0)} \sum_{k=i}^{\infty} \frac{\alpha_k(h_k - h_{k-1}) f_k}{\beta_k F_k^{(0)}} -$$
$$q_{i,i+1} F_i^{(0)} \sum_{k=i+1}^{\infty} \frac{\alpha_k(h_k - h_{k-1}) f_k}{\beta_k F_k^{(0)}} =$$
$$(1 - \alpha_i/\alpha_{i-1}) f_i.$$

换而言之, 为满足式(9), 仅需要

$$\lambda \leqslant (1 - \alpha_i/\alpha_{i-1}) f_i / g_i =$$
$$(1 - \alpha_i/\alpha_{i-1}) \Pi_i(f)^{-1} (i \geqslant 2)$$

和

$$\lambda \leqslant (c-1)c^{-1}\Pi_1(f)^{-1}.$$

因此, 我们可以取定这样的 λ:

$$0 < \lambda < \left(\frac{c-1}{c}\Pi_1(f)^{-1}\right) \wedge$$
$$\left(\inf_{i\geqslant 2}\left(1 - \frac{\alpha_i}{\alpha_{i-1}}\right)\Pi_i(f)^{-1}\right) \wedge q. \tag{10}$$

这里需要证明式(10)的右边是正的, 等价地证明

$$\sup_{i\geqslant 2}\left(1 - \frac{\alpha_i}{\alpha_{i-1}}\right)^{-1} \Pi_i(f) < \infty.$$

为证明此性质, 定义在文献[10]中多次用到的另一个算子

$$I_i(f) = \frac{F_i^{(0)}}{f_{i+1} - f_i} \sum_{k=i+1}^{\infty} \frac{\alpha_k(h_k - h_{k-1}) f_k}{\beta_k F_k^{(0)}}, \quad i \geqslant 1.$$

一方面, 由合分比性质, 我们得到

$$\sup_{i\geqslant 1} \Pi_i(f) \leqslant \sup_{i\geqslant 1} I_i(f).$$

另一方面, 由文献[10]的引理 3.6 和条件 $\delta < \infty$, 可以得出

$$I_i(f) = \frac{F_i^{(0)}}{\sqrt{\varphi_{i+1}} - \sqrt{\varphi_i}} \sum_{k=i+1}^{\infty} \frac{\alpha_k(h_k - h_{k-1})\sqrt{\varphi_k}}{\beta_k F_k^{(0)}} \leqslant$$
$$\frac{2\delta F_i^{(0)}}{\beta_0(\sqrt{\varphi_{i+1}} - \sqrt{\varphi_i})\sqrt{\varphi_{i+1}}} \leqslant 4\delta, \quad i \geqslant 1.$$

因此, $\sup_{i\geqslant 1} \Pi_i(f) \leqslant 4\delta$. 进而, 结合定理的假设, 得到

$$\sup_{i\geqslant 2}(1 - \alpha_i/\alpha_{i-1})^{-1} \Pi_i(f) \leqslant$$
$$4\delta(1 - \sup_{i\geqslant 2} \alpha_i/\alpha_{i-1})^{-1} < \infty.$$

所以, 我们构造出了满足式(9)的有限解(g_i). 由此推出单生过程是指数遍历的.

(iv) 至于过程强遍历判别准则, 可以参看文献[7]的证明. 为节省篇幅, 这里我们不再给出结论 3)和 4)的证明细节. 至此, 定理结论全部证毕.

定理 2 的证明 易知, 对所有 $0 \leqslant j \leqslant i-1$, 有 $q_i^{(j)} = (j+1)\beta_i / i$. 由定义得到

$$F_0^{(0)} = 1, \quad F_i^{(0)} = \frac{1}{i} \sum_{j=0}^{i-1} (j+1) F_j^{(0)}, \quad i \geqslant 1;$$

$$d_0^{(n)} = 0, \quad d_i^{(n)} = \frac{m_i^{(n-1)}}{\beta_i} + \frac{1}{i} \sum_{j=0}^{i-1} (j+1) d_j^{(n)}, \ i \geqslant 1.$$

(i) 我们在后面将归纳证明对于每个 $n \geqslant 1$, $m_i^{(n-1)}$ 关于 i 是单调增的. 定义 $h_i^{(n)} = i m_i^{(n-1)} / \beta_i (i \geqslant 0)$, 因此

$$h_i^{(n)} - h_{i-1}^{(n)} \geqslant (h_i - h_{i-1}) m_i^{(n-1)}, \quad i \geqslant 1. \quad (11)$$

再由 h_i 单调增的假设知 $h_i^{(n)}$ 关于 i 也单调增.

(ii) 归纳可证

$$F_i^{(0)} = \frac{2i-1}{i}F_{i-1}^{(0)},$$

$$d_i^{(n)} = \frac{h_i^{(n)} - h_{i-1}^{(n)}}{i} + \frac{2i-1}{i} d_{i-1}^{(n)}, \quad i \geqslant 2. \quad (12)$$

注意到 $F_1^{(0)} = 1$ 和 $d_1^{(n)} = m_1^{(n-1)}/\beta_1$. 所以, 式(12)对所有 $i \geqslant 1$ 均成立. 由此可计算得到

$$F_i^{(0)} = \frac{(2i-1)!!}{i!}, \quad i \geqslant 1. \quad (13)$$

由数学归纳法和式(12)可以得到

$$d_i^{(n)} = F_i^{(0)} \sum_{k=1}^{i} \frac{h_k^{(n)} - h_{k-1}^{(n)}}{kF_k^{(0)}}, \quad i \geqslant 0. \quad (14)$$

所以, 我们有

$$\sum_{j=0}^{i} d_j^{(n)} = \sum_{j=1}^{i} d_j^{(n)} = \sum_{j=1}^{i} F_j^{(0)} \sum_{k=1}^{j} \frac{h_k^{(n)} - h_{k-1}^{(n)}}{kF_k^{(0)}} = \sum_{k=1}^{i} \frac{h_k^{(n)} - h_{k-1}^{(n)}}{kF_k^{(0)}} \sum_{j=k}^{i} F_j^{(0)}, \quad i \geqslant 0.$$

进而

$$\frac{\sum_{j=0}^{i} d_j^{(n)}}{\sum_{j=0}^{i} F_j^{(0)}} = \sum_{k=1}^{i} \frac{h_k^{(n)} - h_{k-1}^{(n)}}{kF_k^{(0)}} \left(1 - \frac{\sum_{j=0}^{k-1} F_j^{(0)}}{\sum_{j=0}^{i} F_j^{(0)}}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k^{(n)} - h_{k-1}^{(n)}}{kF_k^{(0)}} \left(1 - \frac{\sum_{j=0}^{k-1} F_j^{(0)}}{\sum_{j=0}^{i} F_j^{(0)}}\right) \mathbf{1}_{\{k \leqslant i\}}, \quad i \geqslant 0.$$

(iii) 由(i)和(ii), 单调收敛定理及 $d^{(n)}$ 的定义知, 当 $i \to \infty$ 时,

$$\frac{\sum_{j=0}^{i} d_j^{(n)}}{\sum_{j=0}^{i} F_j^{(0)}} \uparrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k^{(n)} - h_{k-1}^{(n)}}{kF_k^{(0)}} = d^{(n)}.$$

故由遍历判别准则[2]知, 过程遍历当且仅当 $d < \infty$, 即级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k^{(1)} - h_{k-1}^{(1)}}{kF_k^{(0)}}$ 收敛. 注意到 $h_i^{(1)} = h_i$ 和式(13). 由此即可得到结论 1).

(iv) 下面来归纳证明 $m_i^{(n-1)}$ 关于 i 的单调增性质. 显然结论对 $m_i^{(0)}$ 成立. 由文献[5]、(iii)和式(14)知,

$$m_i^{(n)} = n\sum_{j=0}^{i-1} F_j^{(0)} \left(d^{(n)} - \frac{d_j^{(n)}}{F_j^{(0)}}\right) = n\sum_{j=0}^{i-1} F_j^{(0)} \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{h_k^{(n)} - h_{k-1}^{(n)}}{kF_k^{(0)}}, \quad i \geqslant 1,\ n \geqslant 1. \quad (15)$$

由 $h_i^{(1)} = h_i$ 及其单调增的假设, 结合上式, 推出 $m_i^{(1)}$ 是单调增的, 由此又可推出 $h_i^{(2)}$ 是单调增的, 进而再由上式得到 $m_i^{(2)}$ 的单调增性质. 因此, 由归纳法不难得出对于每个 $n \geqslant 1$, $m_i^{(n-1)}$ 单调增的结论.

(v) 由式(11)、(15)和 $m_i^{(n-1)}$ 单调增性质, 有

$$m_i^{(n)} \geqslant n\sum_{j=0}^{i-1} F_j^{(0)} \sum_{k=i}^{\infty} \frac{(h_k - h_{k-1}) m_k^{(n-1)}}{kF_k^{(0)}} \geqslant n\left(\sum_{j=0}^{i-1} F_j^{(0)} \sum_{k=i}^{\infty} \frac{h_k - h_{k-1}}{kF_k^{(0)}}\right) m_i^{(n-1)}, \quad n \geqslant 2.$$

同时, 注意到

$$m_i^{(1)} \geqslant \sum_{j=0}^{i-1} F_j^{(0)} \sum_{k=i}^{\infty} \frac{h_k - h_{k-1}}{kF_k^{(0)}}.$$

因此, 归纳得到

$$m_i^{(n)} \geqslant n!\left(\sum_{j=0}^{i-1} F_j^{(0)} \sum_{k=i}^{\infty} \frac{h_k - h_{k-1}}{kF_k^{(0)}}\right)^n, \quad n \geqslant 1.$$

由过程指数遍历知存在 λ 满足 $0 < \lambda < q_i$ (对于一切 $i \geqslant 0$), 使得 $\boldsymbol{E}_i e^{\lambda\tau_0} < \infty\ (i \geqslant 1)$. 再由其 Taylor 展开式及上式推出

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda \sum_{j=0}^{i-1} F_j^{(0)} \sum_{k=i}^{\infty} \frac{h_k - h_{k-1}}{kF_k^{(0)}}\right)^n < \infty.$$

因此, 我们有

$$\sup_{i \geqslant 1} \sum_{j=0}^{i-1} F_j^{(0)} \sum_{k=i}^{\infty} \frac{h_k - h_{k-1}}{kF_k^{(0)}} \leqslant \lambda^{-1} < \infty.$$

由过程的指数遍历性及文献[2]的定理 4.44 或定理 4.45, 可以推出 $\dot{q} := \inf_{i \geqslant 0} q_i = \min\{\beta_0, 2\inf_{i \geqslant 1} \beta_i\} > 0$, 等价地, $\inf_{i \geqslant 0} \beta_i > 0$. 结论 2)得证.

(vi) 过程强遍历判别准则的证明可以参看文献[7], 这里不再给出证明的细节. 定理全部结论证毕.

定理 3 的证明　文献[7]中已经证明了结论的充分性, 因此不再重复证明细节. 而由文献[2]的定理 4.44 或定理 4.45 知, 指数遍历蕴含

$$\dot{q} := \inf_{i \geqslant 0} q_i = \min\{\beta_0, 2\inf_{i \geqslant 1} \beta_i\} > 0,$$

等价地, $\beta > 0$, 定理结论的必要性由此得证.

注 1　实际上, 我们可以很容易得到这 2 类单生过程 ℓ遍历的判别准则. 关于 ℓ遍历性的内容, 读者可参看文献[11]及其相关文献.

3　参考文献

[1] Chen Mufa. Single birth processes[J]. Chinese Ann Math, 1999, 20B: 77

[2] Chen Mufa. From Markov chains to non-equilibrium particle systems[M]. 3th ed. Singapore: World Scientific, 2004

[3] Mao Yonghua, Zhang Yuhui. Exponential ergodicity for single birth processes[J]. J Appl Prob, 2004, 41: 1022

[4] Zhang Yuhui. Strong ergodicity for single birth processes[J]. J Appl Prob, 2001, 38: 270

[5] 张余辉. 单生过程首中时的各阶矩[J]. 北京师范大学学报: 自然科学版, 2003, 39: 430

[6] 张余辉. 单生过程击中时与平稳分布[J]. 北京师范大学学报: 自然科学版, 2004, 40: 157

[7] 张余辉, 赵倩倩. 几类单生 Q 矩阵[J]. 北京师范大学学报: 自然科学版, 2006, 42: 111

[8] Anderson W J. Continuous-Time Markov Chains [M]. New York: Springer-Verlag, 1991

[9] Cairns B, Pollett P K. Extinction times for a general birth, death and catastrophe process[J]. J Appl Prob, 2004, 41: 1211

[10] Chen Mufa. Explicit bounds of the first eigenvalue[J]. Science in China: A, 2000, 43: 1051

[11] Mao Yonghua. Ergodic degrees for continuous-time Markov chains[J]. Science in China: A, 2004, 47: 161

SOME SINGLE BIRTH *Q*-MATRICES (CONTINUED)

ZHANG Yuhui[1)] ZHAO Qianqian[2)]

(1) School of Mathematical Sciences, Beijing Normal University, 100875, Beijing, China;
2) School of Mathematical Sciences, Qufu Normal University, 273165, Qufu, Shandong, China)

Abstract Two specific single birth Q-matrices were examined, criteria for ergodicity and strong ergodicity were obtained, necessary and sufficient conditions for exponential ergodicity were presented.

Key words single birth processes; ergodic; strongly ergodic; exponentially ergodic

小心外来物种“入侵”首都

2007 年 12 月 22 日, “首都生态圈外来入侵物种监测项目启动暨首都生态圈外来入侵物种监测研究中心揭牌仪式”在我校举行, 葛剑平副校长主持了会议. 国家环保局、科技部、北京市科学技术委员会、北京市园林绿化局、北京市农业局、北京市环保局、北京市出入境检验检疫局的有关领导出席了启动仪式. 北京市科学技术委员会主任马林与我校陈光巨副校长共同为中心揭牌.

外来物种入侵已成为影响环境的全球性热点问题, 近年来北京地区也受到威胁. 北京市科学技术委员会联合北京市园林绿化局、北京市农业局、北京市环保局等相关职能部门, 依托北京师范大学, 整合中国农科院、中国林科院、中国农业大学、北京林业大学以及北京市林保站、植保站以及出入境检验检疫局等单位的科技资源, 开展了“首都生态圈外来入侵物种监测、研究和信息交流”项目, 以期建立一个集监测、研究、预警为一体的长效机制和平台, 为北京市政府服务. 该项目将结合北京的四大功能区(即首都功能核心区、城市功能拓展区、城市发展新区和生态涵养发展区), 按照可能传入和爆发的入侵物种名单, 针对各个生态系统类型建立 100 个监测点, 定期进行系统的调查. 在此基础上, 建立数据库和信息分析, 向政府有关部门进行通报. 该项目的启动, 对首都创新型城市的生态安全防控体系具有重要意义, 也是新奥运、新北京的重要举措.

(李 克)