第36卷第6期
2007年12月

数 学 进 展
ADVANCES IN MATHEMATICS

Vol.36, No.6
Dec., 2007

Latała-Oleszkiewicz 不等式的常数估计

张丽华 [1,*]， 张余辉 [2,**]

(1. 北京邮电大学理学院，北京， 100876; 2. 北京师范大学数学科学学院， 100875, 北京)

摘要: 本文主要通过构造一个新的函数并利用 Cheeger 技术给出推广的 Latała-Oleszkiewicz 不等式的常数估计.

关键词: Latała-Oleszkiewicz 不等式; Latała-Oleszkiewicz 常数; Cheeger 技术
MR(2000) 主题分类: 26D10; 60E15; 60J25 / **中图分类号**: O211.6
文献标识码: A   **文章编号**: 1000-0917(2007)06-0672-07

0 引言

设 $(E,\mathcal{F},\mu)$ 为概率空间， $\{(x,x):x\in E\}\in\mathcal{F}\times\mathcal{F}$. 定义 $L^p(\mu)$ 为通常的实 L^p 空间，其上的范数为 $\|\cdot\|_p$. 若 $p=2$, 简写为 $\|\cdot\|$. 本文所处理的对称型 $(\mathcal{E},\mathcal{D}(\mathcal{E}))$ 定义如下:

$$\mathcal{E}(f,g)=\frac{1}{2}\int_{E\times E}J(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)(f(y)-f(x))(g(y)-g(x)), \tag{0.1}$$

$$f,g\in\mathcal{D}(\mathcal{E}):=\{h\in L^2(\mu):\mathcal{E}(h,h)<\infty\},$$

其中 J 是非负对称测度，即 $J(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)=J(\mathrm{d}y,\mathrm{d}x)$. 不失一般性，可假设 $J(\{(x,x):x\in E\})=0$.

Poincaré 不等式和对数 Sobolev 不等式在概率论中都具有重要意义. 前者反映了马氏过程在 L^2 意义下以指数速度收敛，关于它的一些结果可参见 [1–3], 而后者则反映了马氏过程的相对熵以指数速度收敛，且在一定条件下与超压缩性等价，关于对数 Sobolev 不等式的结果可参见 [2, 4–7]. 另外，对数 Sobolev 不等式强于 Poincaré 不等式，两者之间存在很大的空隙. 由 Beckner 在 [8] 中引入的 Beckner 不等式填充了这一空隙，其形式如下

$$\frac{\mu(f^2)-\mu(|f|^p)^{\frac{2}{p}}}{2-p}\le\frac{1}{C(p)}\mathcal{E}(f,f),\quad f\in\mathcal{D}(\mathcal{E}). \tag{0.2}$$

当 $p=1$ 时， (0.2) 式化为 Poincaré 不等式; 而当 $p\to 2-$ 时，

$$\lim_{p\to 2-}\frac{\mu(f^2)-\mu(|f|^p)^{\frac{2}{p}}}{2-p}=\frac{1}{2}\left(\mu(f^2)\log(f^2)-\mu(f^2)\log(\mu(f^2))\right)=:\frac{1}{2}\mathrm{Ent}_\mu(f^2).$$

(0.2) 式化为对数 Sobolev 不等式. 邓平基在其博士论文 [9] 中讨论了有限维紧黎曼流形，连续自旋粒子系统，自由黎曼轨道空间以及最近粒子系统上的 Beckner 不等式. 在 [10] 中，Latała 和 Olesz

收稿日期: 2005-08-29.
基金项目: 973 项目，国家自然科学基金 (No. 10121101, No. 10101003) 和教育部博士点基金 (No. 20010027007, No. 20040027009).
E-mail: * zhanglh_ h@yahoo.com.cn; ** zhangyh@bnu.edu.cn(通信作者)

kiewicz 考虑了如下一类不等式:

$$\int_{\mathbb{R}} f^2\mu(\mathrm{d}x) - \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p\mu(\mathrm{d}x)\right)^{\frac{2}{p}} \le C(2-p)^\alpha \int_{\mathbb{R}} |\nabla f|^2\mu(\mathrm{d}x), \quad \forall p\in[1,2), \tag{0.3}$$

其中 $\alpha = \frac{2(r-1)}{r}$, $r\in[1,2]$, $\mu(\mathrm{d}x) = C_r\exp(-|x|^r)\,\mathrm{d}x$ 为 $\mathbb{R}$ 上的概率测度, 而 $C_r = \frac{r}{\Gamma(\frac{1}{r})}$ 为归一化常数. 我们把上面的不等式称为 Latała-Oleszkiewicz 不等式, 简称为 L-O 不等式. [11] 给出了直线上 (0.3) 式的判别准则. 将上述不等式稍作变形如下:

$$\sup_{p\in[1,2)} \frac{\mu(f^2) - \mu(|f|^p)^{\frac{2}{p}}}{(2-p)^\alpha} \le C\mathcal{E}(f,f), \quad f\in\mathcal{D}(\mathcal{E}). \tag{0.4}$$

容易看出, 随着 α 的增大, (0.4) 式逐渐增强, 且把 Poincaré 不等式和对数 Sobolev 不等式以及介于它们之间的不等式统一起来. 对于 Poincaré 不等式和对数 Sobolev 不等式, 目前都已有了很好的显式判别准则 [1,6]. 文献 [12–14] 讨论了 F-Sobolev 不等式以及超 Poincaré 不等式的判别准则. 为了得到 L-O 不等式的判定准则, 王凤雨在 [15] 中给出关于 (0.4) 式与 F-Sobolev 不等式以及超 Poincaré 不等式的重要等价命题. 王峰在其博士学位论文 [16] 中利用 Hardy 型不等式已对一维空间和无穷维空间给出 (0.4) 式的判别准则.

事实上, 在 [15] 中, 王凤雨还将 (0.3) 式进一步推广为

$$\sup_{p\in[1,2)} \frac{\mu(f^2) - \mu(|f|^p)^{\frac{2}{p}}}{\phi(p)} \le C\mathcal{E}(f,f), \quad f\in\mathcal{D}(\mathcal{E}), \tag{0.5}$$

其中 $\phi\in C[1,2]$, ϕ 单调递减且在 $[1,2)$ 上严格正, $\phi(2)=0$ 且 $\sup_{p\in[1,2)}\frac{2-p}{\phi(p)}$ 有限. 现在, 仍称 (0.5) 式为 L-O 不等式, 并称使上式成立的最小的 C 为 Latała-Oleszkiewicz 常数, 简称为 L-O 常数. 当 $\phi(p)$ 为常数时, (0.5) 式化为 Poincaré 不等式. 当 $\phi(p) = \frac{2C(2-p)}{p}$ 时, (0.5) 式等价于对数 Sobolev 不等式. 因此 (0.5) 的确是 Poincaré 不等式和对数 Sobolev 不等式的推广.

2004 年, Barthe, Cattiaux 和 Roberto 在 [17] 中用容度的方法给出了 (0.5) 式的判别准则和常数估计. 本文的方法不同于 [17], 是利用 Cheeger 技术, 通过构造一个新的函数, 直接给出推广的 L-O 不等式即 (0.5) 式的常数估计. 为此, 取一非负对称函数 $r\in\mathcal{E}\times\mathcal{E}$, 使得

$$\int_{A\times E} \frac{1_{\{r(x,y)>0\}}J(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)}{r(x,y)} \le \mu(A), \quad A\in\mathcal{E}. \tag{0.6}$$

记 $\lambda_1 := \inf\{\mathcal{E}(f,f):\mu(f^2)=1,\mu(f)=0\}$. 命

$$G(t) = \sup_{p\in[1,2)} \frac{1-t^{1-\frac{2}{p}}}{\phi(p)}, \quad t\ge 1; \qquad \kappa_0 = \inf_{\mu(A)>0} \frac{J(A\times A^c)}{\mu(A)G(\frac{1}{\mu(A)})};$$

$$F_p(t) = \frac{1-(1+t)^{1-\frac{2}{p}}}{\phi(p)}, \quad t\ge 0; \qquad \kappa(p) = \inf_{\mu(A)>0} \frac{J^{(\frac{1}{2})}(A\times A^c)}{\mu(A)F_p(\frac{1}{\mu(A)})^{\frac{1}{2}}};$$

$$\kappa = \inf_{p\in[1,2)} \kappa(p),$$

其中 $J^{(\frac{1}{2})}(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y) := 1_{\{r(x,y)>0\}}\frac{J(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)}{r(x,y)^{\frac{1}{2}}}$, 对 ϕ 的要求同前.

对于 (0.5), 容易看出若 f 恒等于常数, 不等式恒成立. 所以在下文中, 我们总假定 f 不恒等于常数. 本文的主要结果如下.

定理 0.1 令

$$\sigma=\inf\left\{\frac{\mathcal{E}(f,f)}{\sup_{p\in[1,2)}\frac{\mathrm{Var}(p)_\mu(f)}{\phi(p)}}: f\in\mathcal{D}(\mathcal{E})\text{ 且 } f \text{ 不恒等于常数}\right\},$$

则有

$$\kappa_0\ge\sigma\ge\frac{\lambda_1\kappa^2}{45\lambda_1+\kappa^2\sup_{p\in[1,2)}\frac{2-p}{\phi(p)}}.$$

推论 0.1 假定 Poincaré 不等式成立. 若 $\kappa>0$, 则 Latała-Oleszkiewicz 不等式 (0.5) 成立.

注记 0.1 我们知道, Latała-Oleszkiewicz 不等式强于 Poincaré 不等式. 所以, 在上面的推论中假定 Poincaré 不等式成立 (即 $\lambda_1>0$) 是必要的.

作为上述结果应用的例子, 我们下面考虑生灭过程. 设生速为 $b_i>0\,(i\ge 0)$, 死速为 $a_i>0\,(i\ge 1)$. 则 $\pi_0=\frac{1}{\mu}$, $\pi_i=\frac{b_0\cdots b_{i-1}}{a_1\cdots a_i\mu}\,(i\ge 1)$, 其中 $\mu=1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{b_0\cdots b_{j-1}}{a_1\cdots a_j}$; $J_{i,i+1}=\pi_i b_i$, $J_{i,i-1}=\pi_i a_i$, 而对于其他的 $j\ne i$, $J_{ij}=0$. 取 $r_{ij}=(a_i+b_i)\vee(a_j+b_j)$, $i\ne j$. 固定 $i>0$, 令 $A=I_i=\{i,i+1,\cdots\}$, 则

$$J_{ij}^{(\frac12)}=\begin{cases}\dfrac{\pi_i a_i}{\sqrt{r_{i,i-1}}}, & \text{当 } j=i-1;\\[2mm] \dfrac{\pi_i b_i}{\sqrt{r_{i,i+1}}}, & \text{当 } j=i+1.\end{cases}$$

推论 0.2 对于生灭过程而言, $\kappa>0$ 当且仅当

$$c:=\inf_{p\in[1,2)}\inf_{i\ge1}\frac{\pi_i a_i}{\sqrt{r_{i,i-1}}}\cdot\frac{\sqrt{\phi(p)}}{\sum_{j\ge i}\pi_j\sqrt{1-\left(1+\left(\sum_{j\ge i}\pi_j\right)^{-1}\right)^{1-\frac{2}{p}}}}>0.$$

注记 0.2 取 $\phi(p)=(2-p)^\alpha$, $\alpha\in[0,1]$ 为常数. 当 $\alpha=0$ 时, 回到 Poincaré 情形, 此时,

$$F_1\Big(\frac{1}{\mu(A)}\Big)=\frac{1}{\mu(A)+1},\quad \kappa(1)=\inf_{\mu(A)>0}\frac{J^{(\frac12)}(A\times A^c)\sqrt{\mu(A)+1}}{\mu(A)},$$

可以看出, $\kappa(1)\ge\inf_{\mu(A)>0}\frac{J^{(\frac12)}(A\times A^c)}{\mu(A)}=:h^{(\frac12)}$ (见 [3]). 当 $\alpha=1$ 时, 回到对数 Sobolev 情形,

$$\lim_{p\to2-}F_p\Big(\frac{1}{\mu(A)}\Big)=\lim_{p\to2-}\frac{1-(1+\frac{1}{\mu(A)})^{1-\frac{2}{p}}}{2-p}=\frac12\log\Big(1+\frac{1}{\mu(A)}\Big).$$

此时, $\kappa(2)$ 与 [4] 中的对数 Sobolev 常数除相差常数外阶是一致的.

1 主要结论的证明

为了证明定理 (0.1), 先介绍两个简单引理.

引理 1.1 设 (E,μ) 是概率空间, $1\le p_1<p_2<\infty$, $f\in L^{p_2}(E)$. 则 $\mu(f^{p_1})\le\mu(f^{p_2})^{\frac{p_1}{p_2}}$.

引理 1.2 对任意 $f \in L^2(\mu)$, 下面的不等式成立

$$\sup_{p\in[1,2)} \frac{\mathrm{Var}(p)_\mu(f)}{\phi(p)} \le \sup_{p\in[1,2)} \frac{\mathrm{Var}(p)_\mu(\hat{f})}{\phi(p)} + \mu(\hat{f}^2) \sup_{p\in[1,2)} \frac{2-p}{\phi(p)}, \tag{1.1}$$

其中 $\hat{f} = f - \mu(f)$.

证明 根据 [15] 的性质 2.1 和引理 2.1, 对任意 $p \in [1,2)$, 有

$$\mathrm{Var}(p)_\mu(f) \le \mu(\hat{f}^2) + (1-p)\mu(|\hat{f}|^p)^{\frac{2}{p}} = \mathrm{Var}(p)_\mu(\hat{f}) + (2-p)\mu(|\hat{f}|^p)^{\frac{2}{p}}.$$

因此,

$$\frac{\mathrm{Var}(p)_\mu(f)}{\phi(p)} \le \frac{\mathrm{Var}(p)_\mu(\hat{f})}{\phi(p)} + \mu(\hat{f}^2)\frac{2-p}{\phi(p)} \le \frac{\mathrm{Var}(p)_\mu(\hat{f})}{\phi(p)} + \mu(\hat{f}^2) \sup_{p\in[1,2)} \frac{2-p}{\phi(p)},$$

所以, 不等式 (1.1) 成立.

定理 0.1 之证明 第一个不等式的证明很简单. 只需将函数 $f = 1_A\,(\mu(A) > 0)$ 代入不等式即得

$$\inf_{\mu(A)>0} \frac{J(A \times A^c)}{\mu(A)G(\frac{1}{\mu(A)})} \ge \sigma.$$

继续证明第二个不等式. 记 $\hat{f} = f - \mu(f)$. 不妨假设 $\mu(|\hat{f}|^p) = 1$. 令 $\psi(t) = t\sqrt{F_p(t)}$, $\eta(t) = \psi(t^2)$, 其中 $t \in [0,\infty)$. 易知 $F_p(t)$ 是 $[0,\infty)$ 上的连续严格增函数, 从而 ψ 是增函数, η 也是增函数且

$$\psi'(t) = \sqrt{F_p(t)}\left(1 + \frac{tF_p'(t)}{2F_p(t)}\right), \qquad \eta'(t) = \frac{2\eta(t)}{t}\left(1 + \frac{t^2F_p'(t^2)}{2F_p(t^2)}\right).$$

又因为

$$\sup_{p\in[1,2)} \sup_{t\ge 0} \frac{tF_p'(t)}{F_p(t)} \le 1, \tag{1.2}$$

所以 $\eta'(t) \le \frac{3\eta(t)}{t} = 3t\sqrt{F_p(t^2)}$.

令 $g = \eta(|\hat{f}|) = \psi(\hat{f}^2)$. 那么,

$$|g(y) - g(x)| = |\eta(|\hat{f}(y)|) - \eta(|\hat{f}(x)|)| = |\eta'(\xi)| \cdot \big||\hat{f}(y)| - |\hat{f}(x)|\big|,$$

其中 $\xi \in [\,|\hat{f}(x)| \wedge |\hat{f}(y)|, |\hat{f}(x)| \vee |\hat{f}(y)|\,]$. 由于 $\frac{\eta(t)}{t}$ 是连续且递增的, 所以

$$\eta'(\xi) \le \frac{3\eta(\xi)}{\xi} \le \frac{3\eta(|\hat{f}(x)| \vee |\hat{f}(y)|)}{|\hat{f}(x)| \vee |\hat{f}(y)|},$$

进而

$$|g(y) - g(x)| \le 3\big||\hat{f}(y)| - |\hat{f}(x)|\big| \cdot \frac{\eta(|\hat{f}(x)| \vee |\hat{f}(y)|)}{|\hat{f}(x)| \vee |\hat{f}(y)|}. \tag{1.3}$$

设 $f\in\mathcal{D}(\mathcal{E})$ 有界,则 (0.5) 中各项均有限. 对 f 无界的情况,只需要将 f 修改为 $(f\vee(-n))\wedge n$, 继而再令 $n\to\infty$. 这样由 (1.3) 及 Cauchy-Schwatz 不等式得出

$$\begin{aligned}
I:&=\frac{1}{2}\int J^{(\frac{1}{2})}(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)|g(y)-g(x)|\\
&\le\frac{3}{2}\left\{\int J(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)\big||\hat f(y)|-|\hat f(x)|\big|^2\right\}^{\frac{1}{2}}\\
&\quad\cdot\left\{\int J^{(1)}(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)(|\hat f(x)|\vee|\hat f(y)|)^2F_p\big((|\hat f(x)|\vee|\hat f(y)|)^2\big)\right\}^{\frac{1}{2}}\\
&\le\frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{\mathcal{E}(|\hat f|,|\hat f|)}\cdot\left\{\int J^{(1)}(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)\Big(\hat f(y)^2F_p(\hat f(y)^2)+\hat f(x)^2F_p(\hat f(x)^2)\Big)\right\}^{\frac{1}{2}}\\
&=3\sqrt{\mathcal{E}(|\hat f|,|\hat f|)\mu(\hat f^2F_p(\hat f^2))},
\end{aligned}$$

其中, $J^{(1)}(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)$ 的定义类似于 $J^{(\frac{1}{2})}(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)$ 的定义. 另一方面, 命 $h(t)=\mu(\hat f^2>t)$, $A_t=\{g>t\}=\{\psi(\hat f^2)>t\}$. 则

$$h(t)=\mu(|\hat f|^p>t^{\frac{p}{2}})\le t^{-\frac{p}{2}}\wedge 1,$$

且有 $\mu(A_t)=\mu(\hat f^2>\psi^{-1}(t))=h\circ\psi^{-1}(t)$, 这里 ψ^{-1} 表示 ψ 的反函数. 由 $\kappa(p)$ 的定义得出

$$\begin{aligned}
I&=\int_{\{g(x)>g(y)\}}J^{(\frac{1}{2})}(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)\big(g(x)-g(y)\big)=\int_0^\infty J^{(\frac{1}{2})}(A_t\times A_t^c)\,\mathrm{d}t\\
&\ge\kappa(p)\int_0^\infty\mu(A_t)\sqrt{F_p\Big(\frac{1}{\mu(A_t)}\Big)}\,\mathrm{d}t=\kappa(p)\int_0^\infty h(s)\sqrt{F_p\Big(\frac{1}{h(s)}\Big)}\psi'(s)\,\mathrm{d}s\\
&\ge\kappa(p)\int_0^\infty h(t)\sqrt{F_p(t^{\frac{p}{2}})}\psi'(t)\,\mathrm{d}t=\kappa(p)\int_E\mathrm{d}\mu\int_0^{\hat f^2}\sqrt{F_p(t^{\frac{p}{2}})}\psi'(t)\,\mathrm{d}t\\
&=\kappa(p)\int_E\mathrm{d}\mu\int_0^{\hat f^2}\sqrt{F_p(t^{\frac{p}{2}})}\sqrt{F_p(t)}\,\frac{2F_p(t)+tF_p{}'(t)}{2F_p(t)}\,\mathrm{d}t\\
&\ge\frac{\kappa(p)}{2}\int_E\mathrm{d}\mu\int_0^{\hat f^2}\frac{\sqrt{F_p(t^{\frac{p}{2}})}}{\sqrt{F_p(t)}}\big(tF_p(t)\big)'\,\mathrm{d}t\\
&\ge\frac{\kappa(p)\sqrt{c}}{2}\mu(\hat f^2F_p(\hat f^2)),
\end{aligned}$$

其中

$$c=\inf_{p\in[1,2)}\inf_{t\ge0}\frac{F_p(t^{\frac{p}{2}})}{F_p(t)}.$$

可以证明 $c>0$. 事实上, 记 $c_{p,t}=\frac{F_p(t^{\frac{p}{2}})}{F_p(t)}$. 当 $p\uparrow 2$ 时, $c_{p,t}\to1$, 因此对任意 $\varepsilon\in(0,1)$, 存在 $p_\varepsilon\in[1,2)$, 使得当 $p\in(p_\varepsilon,2)$ 时, 有 $c_{p,t}>1-\varepsilon$; 当 $p\in[1,p_\varepsilon]$ 时,

$$c_{p,t}\ge1-(1+t^{\frac{p}{2}})^{1-\frac{2}{p}}\ge1-2^{1-\frac{2}{p}}\ge1-2^{1-\frac{2}{p_\varepsilon}}>0.$$

所以, $c_{p,t}\ge\min\{1-2^{1-\frac{2}{p_\varepsilon}}),1-\varepsilon\}>0$. 事实上, 可以计算出 $c\approx0.842$ (此时 $t\approx24.7602$, $p\approx1.3622$).

综上结论得到

$$\kappa(p)\sqrt{c}\,\mu(\hat{f}^2F_p(\hat{f}^2)) \le 6\sqrt{\mathcal{E}(|\hat{f}|,|\hat{f}|)\mu(\hat{f}^2F_p(\hat{f}^2))}.$$

容易得到

$$\frac{\mathcal{E}(|\hat{f}|,|\hat{f}|)}{\mu(\hat{f}^2F_p(\hat{f}^2))} \ge \frac{\kappa(p)^2c}{36} \ge \frac{\kappa^2c}{36} \ge \frac{\kappa^2}{45}.$$

下面我们对 $\mu(\hat{f}^2F_p(\hat{f}^2))$ 进行变形以希望得到 L-O 不等式的左端的形式.

$$\begin{aligned}\mu(\hat{f}^2F_p(\hat{f}^2)) &= \frac{\mu(\hat{f}^2)-\mu(\hat{f}^2(1+\hat{f}^2)^{1-\frac{2}{p}})}{\phi(p)}\\ &= \frac{\mathrm{Var}(p)_\mu(\hat{f})}{\phi(p)} + \frac{\mu(|\hat{f}|^p)^{\frac{2}{p}}-\mu(\hat{f}^2(1+\hat{f}^2)^{1-\frac{2}{p}})}{\phi(p)},\end{aligned}$$

上述等式中左边第一项正是我们想得到的. 对于第二项而言, 由于

$$\hat{f}^2(1+\hat{f}^2)^{1-\frac{2}{p}} \le \hat{f}^{4-\frac{4}{p}},$$

且对任意 $p\in[1,2)$ 有 $p>4-\frac{4}{p}$, 故由引理 1.1 知, 第二项大于零. 那么, 就有

$$\frac{\mathcal{E}(|\hat{f}|,|\hat{f}|)}{\mathrm{Var}(p)_\mu(\hat{f})\phi(p)} \ge \frac{\mathcal{E}(|\hat{f}|,|\hat{f}|)}{\mu(\hat{f}^2F_p(\hat{f}^2))} \ge \frac{\kappa^2}{45}.$$

在上式的分母中对 p 求上确界, 再由 $\mathcal{E}(|\hat{f}|,|\hat{f}|)\le\mathcal{E}(\hat{f},\hat{f})$, 得到

$$\frac{\mathcal{E}(\hat{f},\hat{f})}{\sup_{p\in[1,2)}\frac{\mathrm{Var}(p)_\mu(\hat{f})}{\phi(p)}} \ge \frac{\kappa^2}{45}. \tag{1.4}$$

利用引理 1.2, 结合 (1.4) 式及 $\mathcal{E}(f,f)=\mathcal{E}(\hat{f},\hat{f})$, 有

$$\sup_{p\in[1,2)}\frac{Var(p)_\mu(f)}{\phi(p)} \le \left(\frac{45}{\kappa^2}+\frac{1}{\lambda_1}\sup_{p\in[1,2)}\frac{2-p}{\phi(p)}\right)\mathcal{E}(f,f).$$

从而有

$$\sigma \ge \frac{\lambda_1\kappa^2}{45\lambda_1+\kappa^2\sup_{p\in[1,2)}\frac{2-p}{\phi(p)}}.$$

定理证毕.

致谢　感谢陈木法院士和王凤雨教授在本文的完成过程中所给予的帮助.

参考文献

[1] Chen M F, Estimation of spectral gap for Markov chains, *Acta Math. Sin. New Ser.*, 1996, 12(4): 337-360.
[2] Bakry D., Functional inequalities for Markov semigroup, Note de cours du Tata insititute, Bombay November 2002.
[3] Chen M F, Wang F Y, Cheeger's inequalities for general symmetric forms and exitence criteria for spectral gap, *Ann. Prob.*, 2000, 28: 235-257.
[4] Chen M F, Logarithmic Sobolev inequality for symmetric forms, *Sci. in China (A)*, 2000, 30(3): 203-209(Chinese Edition); 2000, 43(6): 601-608(English Edition).
[5] Gross, L., Logarithmic Sobolev inequalities, *Amer. J. Math.*, 1976, 97: 1061-1083.

[6] Bobkov, S. G., Götze F, Exponential integrability and transportation cost related to logarithmic Sobolev inequalities, *J. Funct. Anal.*, 1999, 163: 1-28.
[7] Wang F Y, Sobolev type inequalities for general symmetric forms, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2000, 128: 3675-3682.
[8] Beckner, W., A generalized Poincaré inequality for Gaussian measures, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1989, 105: 397-400.
[9] Deng P J, Functional inequalities on spin system and free Riemannian path spaces, Ph.D thesis, Beijing Normal University, 2005.
[10] Latała, R., Oleszkiewicz, K., Between Sobolev and Poincaré, *Lecture Notes in Math.*, Springer Verlag, 2000, 1745: 147-168.
[11] Barthe, F., Roberto, C., Sobolev inequalities for probability measures on the real line, *Studia Math.*, 2003, 159(3): 481-497.
[12] Wang F Y, Functional inequalities for empty essential spectrum, *J. Funct. Anal.*, 2000, 170: 219-245.
[13] Wang F Y, Functional inequalities,semigroup properties and spectrum estimates, *Infin. Dimens. Anal. Quant. Probab. Rel. Top.*, 2000, 3: 263-295.
[14] Wang F, Zhang Y H, *F*-Sobolev inequality for general symmetric forms, *Northeast. Math. J.*, 2003, 19: 133-138.
[15] Wang F Y, A generalization of Poincaré and Log-Sobolev inequalities, *Potential Analysis*, 2005, 22: 1-15.
[16] Wang F, Latała-Oleszkiewicz inequalities, Ph.D thesis, Beijing Normal University., 2003.
[17] Barthe, F., Cattiaux, P., Roberto, C., Interpolated inequalities between exponential and Gaussian, Orlicz hypercontractivity and isoperimetry, arXiv:math.PR/0407219, 2004.

Estimate of the Constant of the Generalized Latała-Oleszkiewicz Inequality

ZHANG Lihua[1], ZHANG Yuhui[2]

(1. School of Sciences, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing, 100876, P. R. China; 2. School of Mathematical Sciences, Beijing Normal University, Beijing, 100875, P. R. China)

Abstract: In this article, by constructing a new function and using the Cheeger's technique, we obtain the lower bound for the generalized Latała-Oleszkiewicz constant, and the upper bound is also considered.

Key words: Latała-Oleszkiewicz inequality; Latała-Oleszkiewicz constant; Cheeger's technique