应用概率统计　第二十三卷
第四期　2007 年 11 月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol. 23 No. 4 Nov. 2007

一类单死过程的遍历性 *

张丽华
(北京邮电大学理学院，北京， 100876)

张余辉 *
(北京师范大学数学科学学院，北京， 100875)

摘　要

本文通过与生灭过程击中时矩的比较和随机可比的方法分别得出有限生单死过程各种遍历性的充分条件和必要条件．文末，讨论了一个例子的各种遍历性．

关键词: 单死过程，遍历性，生灭过程.

学科分类号: O211.6.

§1. 引　言

本文考虑可数状态空间 $E=\{0,1,2,\cdots\}=:\mathbf{Z}_+$ 上的不可约正则 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$, 即 $q_{ij}\geq 0\ (i\neq j)$ 且 $0<q_i:=-q_{ii}=\sum\limits_{j\neq i}q_{ij}<\infty\ (i\in E)$, (q_{ij}) 唯一地决定 Q 过程或者马氏链 $(X(t))_{t\geq 0}$, 记其转移概率矩阵为 $P_t=(p_{ij}(t))$.

在马氏链的遍历理论中，一般涉及三类遍历性，即通常的遍历性或称正常返，指数遍历性和强遍历性 (也称一致遍历性). 关于这三类遍历性的定义及更多内容可参看文献 [1]. 随着近些年对遍历理论的深入研究，就生灭过程而言，它的各种遍历性都已有显式判别准则 (见 [1]). 这必定会带动我们对其它复杂过程遍历性的进一步研究．在遍历性的研究中，通常会采用比较的方法，即将这些过程与已知的简单过程 (如生灭过程) 作某种比较，然后利用简单过程的已知结论，给出复杂过程遍历性的显式充分条件或必要条件．比较的方法也有所不同，有用随机可比性的比较，也有用击中时的矩进行比较．前者是通过构造新的 "控制" 过程，由 q 对的比较来直接控制所考虑的复杂过程．关于随机可比的概念以及更多结果可参考 [13, 15], 文献 [15] 中已给出了跳过程随机可比的充分必要条件．后者的应用实例可参看文献 [6, 7, 16]. 两种比较各有优点，有不同的应用．本文将应用这两种方法分别研究一类单死过程的各种遍历性．

记 $\mathbf{N}:=\{1,2,\cdots\}$. 下面给出一些基本概念的定义．

定义 1.1　若存在 $M\in\mathbf{N}$ 使得当 $i-j>M$ 时 $q_{ij}=0$, 则称相应的 Q 过程为有限死 Q 过程，该 Q 矩阵称为有限死 Q 矩阵，简记为 ${}_MQ$. 特别地，当 $M=1$ 时，称为单死过程．同样地，若存在 $N\in\mathbf{N}$ 使得当 $j-i>N$ 时有 $q_{ij}=0$, 则称相应的 Q 过程为有限生 Q 过程，该 Q 矩阵称为有限生 Q 矩阵，简记为 ${}^NQ$. 特别地，当 $N=1$ 时，称为单生过程．若 Q 矩阵既是有限生 $({}^NQ)$ 也是有限死 $({}_MQ)$ 的，则简记为 ${}^N_MQ$.

* 973项目, 国家自然科学基金 (批准号: 10121101, 10025105和10101003) 和教育部博士点基金 (批准号: 20010027007 和 20040027009) 资助项目.

* 通讯作者，email 地址： zhangyh@bnu.edu.cn.

本文 2005 年 4 月 21 日收到， 2006 年 2 月 1 日收到修改稿.

由单死过程的定义，从某个状态可以跳到很远处，所以单死过程不可能被生灭过程随机控制，随机可比的方法失效，所以我们转而利用矩比较的方法来处理．因为矩实际上是平均，即使在单个状态单死过程不能被生灭过程控制，只要平均以后能被控制住就行．当然，用生灭过程去控制，也是基于对生灭过程的唯一性、常返性、正常返性、指数遍历性以及强遍历性都已找到显式的判别准则．所以对已知的有限生单死过程，我们的目标是设法构造一个合适的生灭过程，以期该生灭过程的各阶矩控制原过程的矩，从而得到原过程各种遍历的充分条件．

考虑有限生单死 Q 矩阵 ${}_1^NQ$. 定义 $\overline{q}_n^{(k)}=\sum\limits_{j=k}^{n+N}q_{nj}\ (n+1\le k\le n+N)$ 及

$$G_n^{(n)}=1,\quad G_n^{(j)}=\frac{1}{q_{n,n-1}}\sum_{k=n+1}^{j}\overline{q}_n^{(k)}G_k^{(j)},\qquad n+1\le j\le n+N,\ n\ge 1. \tag{1.1}$$

构造生灭过程 (Z_t) 的 Q 矩阵为：

$$a_i=q_{i,i-1},\quad i\ge 1;\qquad b_i=\frac{q_{i,i-1}G_i^{(i+N)}}{G_{i+1}^{(i+1+N)}},\quad i\ge 1;\qquad b_0=\overline{q}_0^{(1)}=\sum_{j=1}^{N}q_{0j}. \tag{1.2}$$

本文的主要结果如下．

定理 1.1 给定正则不可约 Q 矩阵 ${}_1^NQ$. 假设下列不等式

$$\sum_{j=i+1}^{i+N}\overline{q}_i^{(j)}G_j^{(j+N)}\le q_{i,i-1}G_i^{(i+N)},\qquad i\ge 1 \tag{1.3}$$

成立且 (1.2) 定义的生灭矩阵 (a_i,b_i) 正则．若此生灭过程 (Z_t) 遍历 (或强遍历), 则原 Q 过程 (Y_t) 亦然；若 (Z_t) 指数遍历且 $\inf\limits_{i\ge 0}q_i>0$, 则 (Y_t) 亦指数遍历．即

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{q_{i,i-1}G_i^{(i+N)}}<\infty\Longrightarrow (Y_t)\text{ 遍历},$$

$$\inf_{i\ge 0}q_i>0,\ \sup_{i\ge 1}\sum_{j=1}^{i}G_j^{(j+N)}\sum_{k=i+1}^{\infty}\frac{1}{q_{k,k-1}G_k^{(k+N)}}<\infty\Longrightarrow (Y_t)\text{ 指数遍历},$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}G_j^{(j+N)}\sum_{k=j}^{\infty}\frac{1}{q_{k,k-1}G_k^{(k+N)}}<\infty\Longrightarrow (Y_t)\text{ 强遍历}.$$

注 1.1 在类似的假设条件下，用类似的方法，可以得到有限生双死 $({}_2^NQ)$ 或多死 $({}_M^NQ)$ 过程各种遍历的一些显式充分条件．参见 [11].

注 1.2 虽然假设 (1.3) 的条件是加在 Q 矩阵上的，但其计算太复杂．实际上，只需要 $G_j^{(j+N)}\le G_j^{(i+N)}\ (i+1\le j\le i+N)$, 由 (1.1) 就能保证假设 (1.3) 成立．因此，将定理 1.1 中的假设 (1.3) 换成

$$q_{ij}q_{j,j-1}\ge\overline{q}_i^{(j)}\overline{q}_j^{(j+1)},\qquad 1\le i<j\le i+N, \tag{1.4}$$

由数学归纳法不难验证, (1.4)蕴含 $G_j^{(k)}$ 关于 k 是单调减的即 $G_j^{(j)}\ge G_j^{(j+1)}\ge\cdots\ge G_j^{(j+N)}\ (j\ge 2)$, 所以 (1.3) 成立，进而依然得出定理的结论．

随机可比的方法在用于充分条件时失效，但对必要条件的寻找依然有效．此时通常构造生灭矩阵 $(\widetilde{a}_i,\widetilde{b}_i)$ 如下．

$$\widetilde{a}_i=q_{i,i-1},\quad i\ge 1;\qquad \widetilde{b}_i=\sum_{j=i+1}^{i+N}q_{ij}=\overline{q}_i^{(i+1)},\quad i\ge 0. \tag{1.5}$$

这样的 $(\widetilde{a}_i,\widetilde{b}_i)$ 与原 ${}_1^NQ$ 是可比的，因此相应的过程被有限生单死过程 (Y_t) 随机控制．同时，注意到，由 (1.2) 和 (1.3) 可以得出 $b_i \geq \overline{q}_i^{(i+1)} = \widetilde{b}_i$. 因此，在假设 (1.3) 下，$(\widetilde{a}_i,\widetilde{b}_i)$ 与 (1.2) 定义的生灭矩阵 (a_i,b_i) 可比，前者相应的生灭过程又被 (Z_t) 随机控制．但 (Y_t) 与 (Z_t) 不是随机可比的．

定理 1.2　给定正则不可约 Q 矩阵 ${}_1^NQ$. 如 (1.5) 定义生灭矩阵 $(\widetilde{a}_i,\widetilde{b}_i)$, 假定其正则．若原 Q 过程 (Y_t) 遍历 (或指数遍历，强遍历), 则此生灭过程 (W_t) 亦然，即

$$(Y_t)\text{ 遍历} \Longrightarrow \sum_{i=1}^{\infty}\widetilde{\mu}_i<\infty,$$

$$(Y_t)\text{ 指数遍历} \Longrightarrow \sup_{i\geq 1}\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{\widetilde{\mu}_j\widetilde{b}_j}\sum_{k=i+1}^{\infty}\widetilde{\mu}_k<\infty,$$

$$(Y_t)\text{ 强遍历} \Longrightarrow \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\widetilde{\mu}_j\widetilde{b}_j}\sum_{k=j}^{\infty}\widetilde{\mu}_k<\infty,$$

其中 $\widetilde{\mu}_i=(\widetilde{b}_0\widetilde{b}_1\cdots\widetilde{b}_{i-1})/(\widetilde{a}_1\widetilde{a}_2\cdots\widetilde{a}_i)$ $(i\geq 1)$.

§2.　主要结果的证明

对正则马氏链 (X_t) 定义第一次跳时刻 $\eta_1=\inf\{t>0: X_t\neq X_0\}$, 状态 j 的回返时和击中时分别为 $\sigma_j=\inf\{t>\eta_1: X(t)=j\}$ 和 $\tau_j=\inf\{t>0: X(t)=j\}$. 设 $\ell\geq 1$, 以 $m_{ij}^{(\ell)}:=\mathsf{E}_i\tau_j^\ell$ 和 $m_j^{(\ell)}:=\mathsf{E}_j\sigma_j^\ell$ 分别表 j 的击中时和回返时的 ℓ 阶矩，其中 E_i 是指出发点为 i 的数学期望．

定义 2.1　设 $\ell\geq 1$. 若对某个 (从而对所有)$j\in E$ 有 $m_j^{(\ell)}<\infty$, 则称常返链 $P(t)$ 为 ℓ 遍历的或具有遍历度 ℓ.

当 $\ell=1$ 时，1 遍历对应于通常的正常返．所以我们也将零常返称为 0 遍历．关于 ℓ 遍历的判别准则可以参看 [6], 该文献用最小非负解的方法给出了 ℓ 遍历的一个等价条件 (参看 [6] 的定理 1.5). 由于 [6] 的定理 3.1 是我们研究工作的一个重要工具，下面将其重述如下．

令 H 是 E 的一个非空有限集，定义 $\sigma_H=\inf\{t>0: X(t)\in H\}$, $m_{iH}^{(\ell)}=\mathsf{E}_i\sigma_H^\ell$. 定义 $m_{iH}^{(0)}=1$ $(i\notin H)$, $m_{iH}^{(0)}=0$ $(i\in H)$.

定理 2.1　对任意 $\ell\geq 1$, H 的击中时的矩 $m_{iH}^{(1)}, m_{iH}^{(2)},\cdots,m_{iH}^{(\ell)}$ 可归纳地由以下一系列不等式的最小非负解给出：对 $0\leq n\leq \ell-1$, 有

$$\sum_{k\neq i}q_{ik}x_k^{(n+1)}+(n+1)x_i^{(n)}\leq q_ix_i^{(n+1)},\quad i\notin H;\qquad x_i^{(n+1)}=0,\quad i\in H. \tag{2.1}$$

进一步地，$m_{iH}^{(1)}, m_{iH}^{(2)},\cdots,m_{iH}^{(\ell)}$ 满足 (2.1) 中的等式．

现在, 我们回顾关于单生过程的一些研究. 单生过程的 Q矩阵满足：所有的 $i\geq 0$有 $q_{i,i+1}>0$ 且当 $j>i+1$ 时 $q_{ij}=0$. 在对单生过程指数遍历问题的研究中，文献 [17] 构造了如下生灭过程：

$$\overline{b}_i=q_{i,i+1},\quad i\geq 0;\qquad \overline{a}_i=\frac{q_{i,i+1}F_i^{(0)}}{F_{i-1}^{(0)}},\quad i\geq 1,$$

其中

$$F_n^{(0)}=\frac{1}{q_{n,n+1}}\sum_{k=0}^{n-1}q_n^{(k)}F_k^{(0)},\quad q_n^{(k)}=\sum_{j=0}^{k}q_{nj},\qquad 0\le k<n,\ k,n\in E.$$

这样的构造保证了两个过程同时常返或同时非常返，而且它们同时被以下通常构造的生灭过程

$$b_i=q_{i,i+1},\quad i\ge 0;\qquad a_i=\sum_{j=0}^{i-1}q_{ij},\quad i\ge 1$$

随机控制，但 $(\overline{a}_i,\overline{b}_i)$ 却不能随机控制原单生过程. 从这个方面来看，矩比较比随机可比应该要弱一些，因此得到的条件要好一些. 此方法和生灭过程的构造正是我们的定理 1.1 之证明思想的来源.

定理 1.1 之证明: 令 $H=\{0\}$. 注意到若出发点不是零点，则 σ_H 即为击中时 $\tau_0=\inf\{t>0:Y_t=0\}$. 同样地对 (1.2) 决定的生灭过程 (Z_t) 可以定义 $\overline{\tau}_0=\inf\{t>0:Z_t=0\}$ 和 $\overline{m}_{i0}^{(n)}=\mathsf{E}_i\overline{\tau}_0^n$. 注意到 $m_{i0}^{(n)}=\mathsf{E}_i\tau_0^n$ 且由定理 2.1 知 $(m_{i0}^{(n)},i\in E)$ 是方程 (2.1) 的最小非负解. 令 $y_i^{(0)}=1$ 且

$$y_i^{(n)}=n\sum_{j=1}^{i}G_j^{(j+N)}\sum_{k=j}^{\infty}\frac{y_k^{(n-1)}}{q_{k,k-1}G_k^{(k+N)}},\qquad n\ge 1,\ i\ge 1. \tag{2.2}$$

令 $y_0^{(n)}=0\ (n\ge 1)$. 下面我们证明 $y_i^{(n)}=\overline{m}_{i0}^{(n)}$ 且 $(y_i^{(n)},i\in E)$ 也满足方程 (2.1). 首先，注意到 $\mu_0=1$ 且由 (1.2) 得到

$$\mu_i:=\frac{b_0b_1\cdots b_{i-1}}{a_1a_2\cdots a_i}=\frac{\overline{q}_0^{(1)}G_1^{(1+N)}}{q_{i,i-1}G_i^{(i+N)}},\quad i\ge 1;\qquad \frac{1}{\mu_ib_i}=\frac{G_{i+1}^{(i+1+N)}}{\overline{q}_0^{(1)}G_1^{(1+N)}},\quad i\ge 0. \tag{2.3}$$

所以，由 [8, 第 3 章] 的一个结果 (或 [5, 第 3 章], 或 [9]) 知，此生灭过程 (Z_t) 的状态 0 击中时的 n 阶矩

$$\begin{aligned}
\overline{m}_{i0}^{(n)} &= n\sum_{j=0}^{i-1}\frac{1}{\mu_jb_j}\sum_{k=j+1}^{\infty}\mu_k\overline{m}_{k0}^{(n-1)}\\
&= n\sum_{j=0}^{i-1}\frac{G_{j+1}^{(j+1+N)}}{\overline{q}_0^{(1)}G_1^{(N+1)}}\sum_{k=j+1}^{\infty}\frac{\overline{q}_0^{(1)}G_1^{(N+1)}\overline{m}_{k0}^{(n-1)}}{q_{k,k-1}G_k^{(k+N)}}\\
&= n\sum_{j=0}^{i-1}G_{j+1}^{(j+1+N)}\sum_{k=j+1}^{\infty}\frac{\overline{m}_{k0}^{(n-1)}}{q_{k,k-1}G_k^{(k+N)}}\\
&= n\sum_{j=1}^{i}G_j^{(j+N)}\sum_{k=j}^{\infty}\frac{\overline{m}_{k0}^{(n-1)}}{q_{k,k-1}G_k^{(k+N)}},\qquad i\ge 1,\ n\ge 1.
\end{aligned}$$

因此，$y_i^{(n)}=\overline{m}_{i0}^{(n)}\ (i\in E,\ n\ge 1)$.

为证明 $(y_i^{(n)},i\in E)$ 是 (2.1) 的解，一方面，由 (2.2) 和 $q_i=q_{i,i-1}+\overline{q}_i^{(i+1)}$ 的事实，我们有

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}q_iy_i^{(n)} &= q_i\sum_{j=1}^{i}G_j^{(j+N)}\sum_{k=j}^{\infty}\frac{y_k^{(n-1)}}{q_{k,k-1}G_k^{(k+N)}}\\
&= q_{i,i-1}\sum_{j=1}^{i-1}G_j^{(j+N)}\sum_{k=j}^{\infty}\frac{y_k^{(n-1)}}{q_{k,k-1}G_k^{(k+N)}}+\overline{q}_i^{(i+1)}\sum_{j=1}^{i}G_j^{(j+N)}\sum_{k=j}^{\infty}\frac{y_k^{(n-1)}}{q_{k,k-1}G_k^{(k+N)}}\\
&\quad +q_{i,i-1}G_i^{(i+N)}\sum_{k=i+1}^{\infty}\frac{y_k^{(n-1)}}{q_{k,k-1}G_k^{(k+N)}}+y_i^{(n-1)},\qquad i\ge 1,\ n\ge 1.
\end{aligned}$$

另一方面，由 (2.2) 得到

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{k\neq i} q_{ik}y_k^{(n)} &= \frac{1}{n}\Big(q_{i,i-1}y_{i-1}^{(n)}+\sum_{\ell=i+1}^{i+N} q_{i\ell}y_\ell^{(n)}\Big)\\
&= q_{i,i-1}\sum_{j=1}^{i-1}G_j^{(j+N)}\sum_{k=j}^{\infty}\frac{y_k^{(n-1)}}{q_{k,k-1}G_k^{(k+N)}}+\sum_{\ell=i+1}^{i+N}q_{i\ell}\sum_{j=1}^{\ell}G_j^{(j+N)}\sum_{k=j}^{\infty}\frac{y_k^{(n-1)}}{q_{k,k-1}G_k^{(k+N)}}\\
&= q_{i,i-1}\sum_{j=1}^{i-1}G_j^{(j+N)}\sum_{k=j}^{\infty}\frac{y_k^{(n-1)}}{q_{k,k-1}G_k^{(k+N)}}+\sum_{\ell=i+1}^{i+N}q_{i\ell}\sum_{j=1}^{i}G_j^{(j+N)}\sum_{k=j}^{\infty}\frac{y_k^{(n-1)}}{q_{k,k-1}G_k^{(k+N)}}\\
&\quad+\sum_{\ell=i+1}^{i+N}q_{i\ell}\sum_{j=i+1}^{\ell}G_j^{(j+N)}\sum_{k=j}^{\infty}\frac{y_k^{(n-1)}}{q_{k,k-1}G_k^{(k+N)}}\\
&= q_{i,i-1}\sum_{j=1}^{i-1}G_j^{(j+N)}\sum_{k=j}^{\infty}\frac{y_k^{(n-1)}}{q_{k,k-1}G_k^{(k+N)}}+\overline{q}_i^{(i+1)}\sum_{j=1}^{i}G_j^{(j+N)}\sum_{k=j}^{\infty}\frac{y_k^{(n-1)}}{q_{k,k-1}G_k^{(k+N)}}\\
&\quad+\sum_{j=i+1}^{i+N}\overline{q}_i^{(j)}G_j^{(j+N)}\sum_{k=j}^{\infty}\frac{y_k^{(n-1)}}{q_{k,k-1}G_k^{(k+N)}},\qquad i\geq 1,\ n\geq 1,
\end{aligned}
$$

再由假设 (1.3) 及上式可得

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{k\neq i} q_{ik}y_k^{(n)} &\leq q_{i,i-1}\sum_{j=1}^{i-1}G_j^{(j+N)}\sum_{k=j}^{\infty}\frac{y_k^{(n-1)}}{q_{k,k-1}G_k^{(k+N)}}+\overline{q}_i^{(i+1)}\sum_{j=1}^{i}G_j^{(j+N)}\sum_{k=j}^{\infty}\frac{y_k^{(n-1)}}{q_{k,k-1}G_k^{(k+N)}}\\
&\quad+q_{i,i-1}G_i^{(i+N)}\sum_{k=i+1}^{\infty}\frac{y_k^{(n-1)}}{q_{k,k-1}G_k^{(k+N)}},\qquad i\geq 1,\ n\geq 1.
\end{aligned}
$$

结合两方面得出，对 $n\geq 1$, 有

$$\sum_{k\neq i} q_{ik}y_k^{(n)}+ny_i^{(n-1)}\leq q_iy_i^{(n)},\qquad i\geq 1.$$

因此， $(y_i^{(n)}, i\in E)$ 即 $(\overline{m}_{i0}^{(n)}, i\in E)$ 是 (2.1) 的解 $(n\geq 1)$. 而由定理 2.1 知 $(m_{i0}^{(n)}, i\in E)$ 是方程 (2.1) 的最小非负解．所以， $m_{i0}^{(n)}\leq \overline{m}_{i0}^{(n)}$ $(i\in E,\ n\geq 1)$.

综上所述，对任意 $i\geq 1$ 有 $\mathsf{E}_i\tau_0\leq \mathsf{E}_i\overline{\tau}_0$ 及 $\sup_i \mathsf{E}_i\tau_0\leq \sup_i \mathsf{E}_i\overline{\tau}_0$. 由文献 [1] 的定理 4.44 及定理 4.45, 立刻由 (Z_t) 的遍历性 (强遍历性) 得到 (Y_t) 的遍历性 (强遍历性). 同时，由 Taylor 展开式知，对所有的 $i\in E$, 有 $\mathsf{E}_i e^{\lambda\tau_0}\leq \mathsf{E}_i e^{\lambda\overline{\tau}_0}$ $(\lambda>0)$. 若 (Z_t) 指数遍历，由 [1, 定理 4.45] 知，存在 $0<\lambda<a_i+b_i$ $(i\in E)$ 使得 $\mathsf{E}_i e^{\lambda\overline{\tau}_0}<\infty$ $(i\in E)$, 进而 $\mathsf{E}_i e^{\lambda\tau_0}<\infty$ $(i\in E)$. 由于 $a_i+b_i\geq q_i$ 及 $\inf_i q_i>0$, 所以可以取定 $\lambda\in(0,\inf_i q_i)$, 再由 [1, 定理 4.45] 即知 (Y_t) 是指数遍历的．

至于定理给出的显式条件，由 [1, 2, 3, 4, 10, 16] 及 (2.3) 立即可得． #

由于在定理 1.1 的证明中得出 $m_{i0}^{(n)}\leq \overline{m}_{i0}^{(n)}$ $(i\in E,\ n\geq 1)$, 结合定理 2.1 和 [6] 的定理 1.5, 我们自然得到下面关于 ℓ 遍历的推论．

推论 2.1 给定正则不可约常返 Q 矩阵 ${}_1^NQ$. 假定 (1.3) 成立且 (1.2) 定义的生灭矩阵 (a_i, b_i) 正则．若此生灭过程 (Z_t) 是 ℓ 遍历的 $(\ell\geq 1)$, 则原有限生单死 Q 过程 (Y_t) 亦然．

定理 1.2 之证明： 容易看出生灭矩阵 (1.5) 和 ${}_1^NQ$ 是可比的，因此由文献 [15] 知，相应的过程 (W_t) 和 (Y_t) 是随机可比的．由 [12] 或 [14] 知存在 (1.5) 和 ${}_1^NQ$ 的保序耦合，实际上也可

如下构造保序耦合 Q 矩阵:

$$q(i,j;k,\ell)=\begin{cases}(\overline{q}_i^{(i+1)}\wedge\overline{q}_j^{(j+1)})q_{j,j+m}/\overline{q}_j^{(j+1)}, & \text{当 } (k,\ell)=(i+1,j+m),\ 1\le m\le N;\\ (\overline{q}_i^{(i+1)}-\overline{q}_j^{(j+1)})^+, & \text{当 } (k,\ell)=(i+1,j);\\ (\overline{q}_j^{(j+1)}-\overline{q}_i^{(i+1)})^+q_{j,j+m}/\overline{q}_j^{(j+1)}, & \text{当 } (k,\ell)=(i,j+m),\ 1\le m\le N;\\ q_{i,i-1}\wedge q_{j,j-1}, & \text{当 } (k,\ell)=(i-1,j-1);\\ (q_{i,i-1}-q_{j,j-1})^+, & \text{当 } (k,\ell)=(i-1,j);\\ (q_{j,j-1}-q_{i,i-1})^+, & \text{当 } (k,\ell)=(i,j-1);\\ 0, & \text{其它的 } (k,\ell)\ne(i,j),\end{cases}$$

而且 $q(i,j)=\sum\limits_{(k,\ell)\ne(i,j)}q(i,j;k,\ell)$. 由于保序，所以对耦合 Q 过程有

$$\mathsf{P}_{(i,j)}\{W_t\le Y_t\}=1,\qquad t\ge0,\ i\le j.$$

进而，由轨道的右连续性得出 $\mathsf{P}_{(i,j)}\{W_t\le Y_t,t\ge0\}=1\ (i\le j)$. 再由此推出

$$\mathsf{P}_{(i,j)}\{\widetilde{\tau}_0\le\tau_0\}=1,\qquad i\le j,$$

其中 $\widetilde{\tau}_0=\inf\{t>0:W_t=0\}$. 所以，对任意 $i\ge1$ 有 $\mathsf{E}_i\widetilde{\tau}_0\le\mathsf{E}_i\tau_0$ 及 $\sup\limits_i\mathsf{E}_i\widetilde{\tau}_0\le\sup\limits_i\mathsf{E}_i\tau_0$. 由文献 [1] 的定理 4.44 及定理 4.45, 立刻由 (Y_t) 的遍历性 (强遍历性) 得到 (W_t) 的遍历性 (强遍历性). 同时，由 Taylor 展开式知，对所有的 $i\in E$, 有 $\mathsf{E}_i\mathrm{e}^{\lambda\widetilde{\tau}_0}\le\mathsf{E}_i\mathrm{e}^{\lambda\tau_0}\ (\lambda>0)$. 若 (Y_t) 指数遍历，由 [1, 定理 4.45] 知，存在 $0<\lambda<q_i\ (i\in E)$ 使得 $\mathsf{E}_i\mathrm{e}^{\lambda\tau_0}<\infty\ (i\in E)$, 进而 $\mathsf{E}_i\mathrm{e}^{\lambda\widetilde{\tau}_0}<\infty\ (i\in E)$. 再由 [1, 定理 4.45] 即知 (W_t) 是指数遍历的. #

在定理 1.2 的证明中同样可以得出 $\mathsf{E}_i\widetilde{\tau}_0^\ell\le\mathsf{E}_i\tau_0^\ell\ (i\in E,\ \ell\ge1)$, 所以我们得到下面的推论.

推论 2.2 给定正则不可约 Q 矩阵 ${}_1^NQ$. 如 (1.5) 定义生灭矩阵 $(\widetilde{a}_i,\widetilde{b}_i)$, 假定其正则. 若原 Q 过程 (Y_t) 是 ℓ 遍历的 $(\ell\ge1)$, 则此生灭过程 (W_t) 亦然.

下面是一个具体的例子. 更多的例子可参见 [11].

例 2.1 设 Q 矩阵 ${}_1^NQ$ 满足: $q_{i,i+k}=\lambda_kq_{i,i-1}\ (1\le k\le N)$, 其中 $\lambda_k\ge0\ (1\le k\le N)$ 且满足 $\sum\limits_{k=1}^Nk\lambda_k\le1$, 其余 $i\ne j$ 有 $q_{ij}=0$. 若 $q_{i,i-1}=i^\gamma\ (i\ge1)$, 则当 $\gamma>1$ 时，过程遍历; 当 $\gamma\ge2$ 时，过程指数遍历; 当 $\gamma>2$ 时，过程强遍历; 对任意 $\ell\ge1$, 当 $\gamma>2-\ell^{-1}$ 时，过程是 ℓ 遍历的. 若 $q_{i,i-1}=i^2\log^\gamma i\ (i\ge2)$, 则过程恒遍历且当 $\gamma\ge0$ 时，过程指数遍历，当 $\gamma>1$ 时，过程强遍历.

证明: 由 (1.1) 经计算得知, $G_i^{(i+N)}$ 是一个由 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_N$ 构成的与 i 无关的常量. 因此，结合此例的条件易知假设条件 (1.3) 成立. 对前一情形, (1.2) 所构造的生灭矩阵为 $a_i=b_i=i^\gamma\ (i\ge1)$, 此即为 [1, 例 4.58], 或 [4, 例 8.3]. 因此，生灭过程遍历当且仅当 $\gamma>1$, 指数遍历当且仅当 $\gamma\ge2$, 强遍历当且仅当 $\gamma>2$; 对任意 $\ell\ge1$, 当 $\gamma>2-\ell^{-1}$ 时，该生灭过程 ℓ 遍历 (见 [6, 例 1.7]). 由定理 1.1 和推论 2.1 即得前一结论. 至于后者，此时 $a_i=b_i=i^2\log^\gamma i\ (i\ge2)$, 参见 [4, 例 8.3]. 该生灭过程恒遍历，指数遍历当且仅当 $\gamma\ge0$, 强遍历当且仅当 $\gamma>1$, 再由定理 1.1 即得结论. #

在遍历理论的研究中，还有其它的比较方法，可以参看 [1, 4, 7, 16]. 例如构造生灭矩阵 $a_i = q_{i,i-1}$，$b_i = \sum_{k=1}^{N} kq_{i,i+k}$. 若对该过程的遍历问题能够找到相应的检验函数 g 使其满足： g_i 单增且 $g_{i+1} - g_i$ 单减，则

$$\Omega g(i) := \sum_{j \neq i} q_{ij}(g_j - g_i) \le a_i(g_{i-1} - g_i) + b_i(g_{i+1} - g_i), \qquad i \ge 1.$$

由此可以得出单死过程相应遍历性的充分条件.

感谢审稿人提出的宝贵意见和建议.

参 考 文 献

[1] Chen, M.F., *From Markov Chains to Non-Equilibrium Particle Systems*, World Scientific, Singapore, Fist Edition 1992; Second Edition 2004.

[2] Chen, M.F., Explicit bounds of the first eigenvalue, *Sci. in China* (*A*), **43**(2000), 1051–1059.

[3] Chen, M.F., Explicit criteria for several types of ergodicity, *Chinese J. Appl. Stat.*, **17**(2001), 113–120.

[4] Chen, M.F., *Eigenvalues, Inequalities, and Ergodic Theory*, Springer, Berlin, 2005.

[5] 侯振挺，郭青峰，齐次可列马尔可夫过程，科学出版社，北京，1978.

[6] Mao, Y.H., Ergodic degress for continuous-time Markov chains, *Sci. in China* (*A*), **47**(2004), 161–174.

[7] Mao, Y.H. and Zhang, Y.H., Exponential ergodicity for single-birth processesv, *J. Appl. Prob.*, **41(4)**(2004), 1022–1032.

[8] 王梓坤，生灭过程与马尔可夫链，科学出版社，北京，1980.

[9] Wang, Z.K. and Yang, X.Q., *Birth and Death Processes and Markov Chains*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[10] 张汉君，林祥，侯振挺，标准转移函数的多项式一致收敛性，数学年刊，**21A**(2000), 351–356.

[11] 张丽华，L-O 不等式的常数估计与一类单死过程的遍历性，北京师范大学硕士学位论文，2004.

[12] 张余辉，一维马氏链保序耦合的构造，应用概率统计，**12(4)**(1996), 376–382.

[13] 张余辉，跳过程唯一性的一个问题，应用概率统计，**14(1)**(1998), 45–48.

[14] 张余辉，续"一维马氏链保序耦合的构造"，北京师范大学学报，**34(1)**(1998), 49–50.

[15] Zhang, Y.H., Sufficient and necessary conditions for stochastic comparability of jump processes, *Acta Math. Sin.*, **16(1)**(2000), 99–102.

[16] Zhang, Y.H., Strong ergodicity for single birth processes, *J. Appl. Prob.*, **38(1)**(2001), 270–277.

[17] Zhang, Y.H., A note on single birth processes, preprint (2005).

Ergodicity of a Class of Single Death Processes

ZHANG LIHUA

(*School of Science, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing, 100876*)

ZHANG YUHUI

(*School of Mathematical Sciences, Beijing Normal University, Beijing, 100875*)

In this paper, we consider the single death processes which go out of reversed Markov context. By comparing with the moments of hitting time of birth-death processes and stochastic comparability, some sufficient conditions and necessary conditions are obtained for some kinds of ergodicity of the single death processes respectively. Finally, one example are given to illustrate the results.