# 几类单生 $Q$ 矩阵*

张余辉[1) ] 赵倩倩[2)]
(1) 北京师范大学数学科学学院, 100875, 北京; 2) 曲阜师范大学数学科学学院, 273165, 山东, 曲阜)

摘要 研究了几类特定的单生 $Q$ 矩阵, 得到了其决定的单生过程常返、遍历、指数遍历和强遍历的判别, 同时给出了平稳分布的显式表达式.

关键词 单生过程; 遍历; 指数遍历; 强遍历; 平稳分布
分类号 O 211.6

## 1 引言和主要结果

本文只考虑不可约全稳定且保守的 $Q$ 矩阵, 即对一切 $i\geqslant 0$ 有

$$q_i := -q_{ii} = \sum_{j\neq i} q_{ij} < \infty.$$

单生 $Q$ 矩阵是指对所有的 $i\geqslant 0$ 和 $j\geqslant 2$ 满足 $q_{i,i+1}>0$, $q_{i,i+j}=0$ 的 $Q$ 矩阵. 单生过程则是由单生 $Q$ 矩阵决定的 $Q$ 过程. 本文的工作是我们对单生过程的系统研究工作的继续, 见文献[1-5].

先简单回顾一些关于单生过程的研究背景和工作. 我们开始研究单生过程的背景主要是 3 个: 1) 由于一般单生过程是不可逆的, 不可逆过程的研究通常要困难得多, 这给我们的研究带来挑战; 2) 由于单生 $Q$ 矩阵的流出边界至多一个极点, 这又给研究带来希望, 我们可能就一些经典问题得到显式的判别准则; 3) 单生过程本身的应用价值, 此过程又称为非向上跃过程, 在人口理论中, 还称之为带大灾难的生灭过程, 由此可以看到其在生物学上广泛应用的实例, 同时, 单生过程在数学上又是一个重要的工具, 常将复杂过程与之比较进行研究. 这些年来, 关于单生过程的研究已获得很多结果, 详细内容参见文献[6-8]. 国内外学者研究的侧重点也不一样, 国外同行主要用母函数的方法研究灭绝概率的问题, 因此要对 $Q$ 矩阵施加条件, 即研究一些特定的单生 $Q$ 矩阵[8-9]. 国内学者则对一般的单生 $Q$ 矩阵使用分析方法研究其唯一性和遍历理论等经典问题. 对其唯一性、常返性、遍历性和强遍历性, 已得到了显式判别准则, 还获得了其平稳分布的表达式, 但对指数遍历性目前仅获得一个显式充分条件.

本文旨在通过研究几类单生 $Q$ 矩阵, 加深对其认识, 为今后进一步的研究打下基础.

我们的主要结果如下.

**定理 1** 令 $q_{i,i+1}=\beta_i>0\ (i\geqslant 0)$, $q_{ij}=\beta_i/i\ (0\leqslant j\leqslant i-1)$, 其他的 $q_{ij}=0\ (i\neq j)$. 则

1) 该 $Q$ 矩阵是正则且不可约的, 相应的单生过程是常返的.

2) 当 $\beta=\inf\limits_{i\geqslant 0}\beta_i>0$ 时, 相应的单生过程是指数遍历的.

3) 假定 $h_i := i/\beta_i$ 单调增且

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(h_i-h_{i-1})(i-1)!}{(2i-1)!!} =: C<\infty,$$

则过程遍历且平稳分布为

$$\pi_0=\frac{1}{1+\beta_0 C},\quad \pi_k=\frac{\beta_0(k+1)!}{\beta_k(1+\beta_0 C)(2k+1)!!},\quad k\geqslant 1.$$

此外, 过程强遍历当且仅当

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{h_i-h_{i-1}}{i}<\infty.$$

**定理 2** 令 $q_{i0}=\alpha_i>0\ (i\geqslant 1)$, $q_{i,i+1}=\beta_i>0\ (i\geqslant 0)$, 其他的 $q_{ij}=0\ (i\neq j)$. 假定该单生 $Q$ 矩阵是正则的, 约定 $\alpha_0=+\infty$, 则

1) 该 $Q$ 矩阵相应的单生过程是常返的当且仅当级数 $\sum\limits_{i=2}^{\infty}\frac{\alpha_i}{\beta_i}\prod\limits_{k=1}^{i-1}\frac{q_k}{\beta_k}$ 是发散的.

2) 当 $\alpha=\inf\limits_{i\geqslant 1}\alpha_i>0$ 时, 相应的单生过程是强遍历的.

3) 假定 $\alpha_i$ 单调减且

$$\sum_{i=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha_i}-\frac{1}{\alpha_{i-1}}\right)\left(\prod_{k=1}^{i-1}\frac{q_k}{\beta_k}\right)^{-1}+\frac{1}{\alpha_1} =: C<\infty,$$

则过程是遍历的且平稳分布为

$$\pi_0=\frac{1}{1+\beta_0 C},\quad \pi_k=\frac{\beta_0}{\beta_k(1+\beta_0 C)}\prod_{j=1}^{k}\frac{\beta_j}{q_j},\quad k\geqslant 1.$$

* 国家"九七三"计划资助项目; 国家自然科学基金资助项目(10121101, 10101003); 教育部博士点基金资助项目(20010027007, 20040027009)
收稿日期: 2005-08-15

进一步, 假定$\lim_{i\to\infty}\frac{\alpha_i q_{i-1}}{\beta_i\alpha_{i-1}} =: C_1 > 1$, 则单生过程强遍历的充分必要条件是级数

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1-\alpha_i/\alpha_{i-1}}{\beta_i} < \infty.$$

下面的定理得到了均匀大灾难模型的平稳分布, 其方法是不同于文献[8]的.

**定理 3** 考虑人口模型中的均匀大灾难模型, 即 $q_{i,i+1} = \lambda_i := a + \lambda i\ (i \geqslant 0)$, $q_{ij} = \beta\ (0 \leqslant j < i)$, 其他 $q_{ij} = 0\ (i \neq j)$, 其中的 $a, \lambda, \beta$ 均为正常数, 则该 $Q$ 矩阵正则当且仅当

$$\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{\lambda_{k-1}+k\beta}{\lambda_k} = \infty.$$

此时, 相应的过程是强遍历的且平稳分布为

$$\pi_0 = \frac{\beta}{a+\beta},$$

$$\pi_k = \frac{(k+1)\beta}{a+\beta}\prod_{j=0}^{k-1}\frac{\lambda_j}{\lambda_{j+1}+(j+2)\beta}\quad k \geqslant 1.$$

特别当 $a = \lambda$ 时, 则 $\pi_k = \beta a^k/(a+\beta)^{k+1}\ (k \geqslant 0)$. 进一步, 当 $a = \lambda = \beta = 1$ 时, 则 $\pi_k = 1/2^{k+1}\ (k \geqslant 0)$.

## 2 定理的证明

为证明定理, 对 $0 \leqslant k < n\ (k, n \in \mathbf{Z}_+)$, 定义 $q_n^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} q_{nj}$. 再定义

$$m_0 = \frac{1}{q_{01}},\quad m_n = \frac{1}{q_{n,n+1}}\Big(1 + \sum_{k=0}^{n-1} q_n^{(k)} m_k\Big),\quad n \geqslant 1,$$

$$F_n^{(n)} = 1,\quad F_n^{(i)} = \frac{1}{q_{n,n+1}}\sum_{k=i}^{n-1} q_n^{(k)} F_k^{(i)},\quad 0 \leqslant i < n,$$

$$d_0 = 0,\quad d_n = \frac{1}{q_{n,n+1}}\Big(1 + \sum_{k=0}^{n-1} q_n^{(k)} d_k\Big),\quad n \geqslant 1.$$

易知, $m_i = F_i^{(0)}/q_{01} + d_i\ (i \geqslant 0)$.

**定理 1 的证明** 易知, 对所有 $0 \leqslant j \leqslant i-1$, 有 $q_i^{(j)} = (j+1)\beta/i$. 由定义得到

$$F_0^{(0)} = 1,\quad F_i^{(0)} = \frac{1}{i}\sum_{j=0}^{i-1}(j+1)F_j^{(0)},\quad i \geqslant 1;$$

$$d_0 = 0,\quad d_i = \frac{1}{\beta_i} + \sum_{j=0}^{i-1}(j+1)d_j,\quad i \geqslant 1.$$

归纳可证

$$F_i^{(0)} = \frac{2i-1}{i}F_{i-1}^{(0)},$$

$$d_i = \frac{1}{\beta_i} - \frac{i-1}{i\beta_{i-1}} + \frac{2i-1}{i}d_{i-1} = \frac{h_i - h_{i-1}}{i} + \frac{2i-1}{i}d_{i-1},\quad i \geqslant 2. \tag{1}$$

注意到 $F_1^{(0)} = 1$ 和 $d_1 = 1/\beta_1$, 所以式(1) 对所有 $i \geqslant 1$ 均成立. 由此可计算得到

$$F_i^{(0)} = \frac{(2i-1)!!}{i!},\quad i \geqslant 1. \tag{2}$$

因此 $\sum_{i=0}^{\infty}F_i^{(0)} = \infty$, 由 $m_i = \frac{F_i^{(0)}}{q_{01}} + d_i$ 知 $\sum_{i=0}^{\infty}m_i = \infty$. 所以由文献[6] 的定理 3. 16 和 4. 52 知, 该 $Q$ 矩阵是正则不可约的, 相应的单生过程是常返的.

若 $\beta = \inf_{i\geqslant 0}\beta_i > 0$, 则令 $y_i = i/\beta\ (i \geqslant 0)$. 不难验证 $(y_i)$是下列方程的一有限非负解:

$$\begin{cases}\sum_j q_{ij}y_j \leqslant -\lambda y_i - 1, & i \geqslant 4;\\ \sum_{i\leqslant 3}\sum_{j\neq i}q_{ij}y_j < \infty,\end{cases}$$

其中 $\lambda \in (0, \beta/8)$. 因此, 由文献[6] 的定理 4. 45 知, 该单生过程是指数遍历的.

为证明 3), 由数学归纳法和式(1)可以得到

$$\frac{d_i}{F_i^{(0)}} = \sum_{k=1}^{i}\frac{h_k - h_{k-1}}{kF_k^{(0)}},\quad i \geqslant 0. \tag{3}$$

进而由定理假设和式(3) 知

$$\frac{d_i}{F_i^{(0)}} \uparrow \tilde{d} := \sup_{i\geqslant 0}\frac{d_i}{F_i^{(0)}} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{h_k - h_{k-1}}{kF_k^{(0)}} = C < \infty,\quad i \to \infty.$$

所以由文献[2] 的注 2. 3 或文献[6] 的 4. 54 知,

$$d := \sup_{i\geqslant 0}\frac{\sum_{k=0}^{i}d_k}{\sum_{k=0}^{i}F_k^{(0)}} = \tilde{d} = C < \infty. \tag{4}$$

因此由文献[6] 的定理4. 52 知, 过程是遍历的. 此时,

$$\sup_{i\geqslant 1}\sum_{k=0}^{i-1}(dF_k^{(0)} - d_k) = \sum_{k=0}^{\infty}F_k^{(0)}\sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{h_i - h_{i-1}}{iF_i^{(0)}} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{h_i - h_{i-1}}{iF_i^{(0)}}\sum_{k=0}^{i-1}F_k^{(0)}. \tag{5}$$

由 Stolz 公式, 我们有

$$\lim_{i\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^{i-1}F_k^{(0)}}{F_i^{(0)}} = \lim_{i\to\infty}\frac{F_{i-1}^{(0)}}{F_i^{(0)} - F_{i-1}^{(0)}} = \lim_{i\to\infty}\frac{i}{i-1} = 1.$$

因此, 式(5)右端的级数与级数 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{h_i - h_{i-1}}{i}$ 同时收敛或同时发散. 所以由文献[2]的定理 1. 1 即可推出定理关于强遍历性的结论.

下面继续来计算平稳分布. 由定义得到

$$F_i^{(k)} = \frac{1}{i}\sum_{j=k}^{i-1}(j+1)F_j^{(k)},\ i \geqslant k+1;$$
$$F_k^{(k)} = 1, k \geqslant 0.$$

归纳可证

$$F_i^{(k)} = \frac{2i-1}{i}F_{i-1}^{(k)},\ i \geqslant k+2;$$
$$F_{k+1}^{(k)} = 1,\ k \geqslant 0. \tag{6}$$

再由式(1)和(6)得出

$$\frac{F_i^{(0)}}{F_i^{(k)}}=\frac{F_{i-1}^{(0)}}{F_{i-1}^{(k)}}=\cdots=\frac{F_{k+1}^{(0)}}{F_{k+1}^{(k)}}=F_{k+1}^{(0)}\geqslant F_k^{(0)},\quad i\geqslant k+1\geqslant 1. \tag{7}$$

注意到由式(3)可以得

$$m_i=\frac{1}{q_{01}}F_i^{(0)}+d_i=\left(\frac{1}{\beta_0}+\sum_{j=1}^{i}\frac{h_j-h_{j-1}}{jF_j^{(0)}}\right)F_i^{(0)},\quad i\geqslant 0.$$

因此, 由以上 2 式推出

$$\begin{cases}\dfrac{m_i}{F_i^{(k)}}=\left(\dfrac{1}{\beta_0}+\displaystyle\sum_{j=1}^{i}\dfrac{h_j-h_{j-1}}{jF_j^{(0)}}\right)F_{k+1}^{(0)},\ i\geqslant k+1\geqslant 1;\\ \dfrac{m_k}{F_k^{(k)}}=\left(\dfrac{1}{\beta_0}+\displaystyle\sum_{j=1}^{k}\dfrac{h_j-h_{j-1}}{jF_j^{(0)}}\right)F_k^{(0)},\ k\geqslant 0.\end{cases}$$

进而由定理假设再结合式(7), 我们知道, 对任意固定的 $k$ 有事实: $m_i/F_i^{(k)}$ 关于 $i$ 是单调增的. 进一步, 结合式(2)可得

$$\frac{m_i}{F_i^{(k)}}\uparrow\hat{c}_k:=\sup_{i\geqslant k}\frac{m_i}{F_i^{(k)}}=\left(\frac{1}{\beta_0}+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{h_j-h_{j-1}}{jF_j^{(0)}}\right)F_{k+1}^{(0)}=\left(\frac{1}{\beta_0}+C\right)\frac{(2k+1)!!}{(k+1)!},\quad i\to\infty,\ k\geqslant 0. \tag{8}$$

同时由 Stolz 公式知,

$$\lim_{i\to\infty}\frac{\sum_{j=k}^{i}m_j}{\sum_{j=k}^{i}F_j^{(k)}}=\lim_{i\to\infty}\frac{m_i}{F_i^{(k)}}=\hat{c}_k,\quad k\geqslant 0.$$

从而

$$c_k:=\sup_{i\geqslant k}\frac{\sum_{j=k}^{i}m_j}{\sum_{j=k}^{i}F_j^{(k)}}\geqslant\hat{c}_k,\quad k\geqslant 0. \tag{9}$$

显然有 $c_k\leqslant\hat{c}_k$, 故 $c_k=\hat{c}_k\ (k\geqslant 0)$. 继而由文献[4]的定理 3 可以得到平稳分布为

$$\pi_0=\frac{1}{q_{01}c_0}=\frac{1}{1+\beta_0C},$$

$$\pi_k=\frac{1}{q_{k,k+1}c_k}=\frac{\beta_0(k+1)!}{\beta_k(1+\beta_0C)(2k+1)!!},\quad k\geqslant 1.$$

从而定理结论证毕.

**定理 2 的证明**　易知, 对所有的 $0\leqslant j\leqslant i-1$, 有 $q_i^{(j)}=\alpha_i$ 且 $q_i=\alpha_i+\beta_i\ (i\geqslant 1)$, $q_0=\beta_0$. 由定义得到

$$F_0^{(0)}=1,\quad F_i^{(0)}=\frac{\alpha_i}{\beta_i}\sum_{j=0}^{i-1}F_j^{(0)},\quad i\geqslant 1;$$

$$d_0=0,\quad d_i=\frac{1}{\beta_i}+\frac{\alpha_i}{\beta_i}\sum_{j=0}^{i-1}d_j,\quad i\geqslant 1.$$

归纳可证

$$F_i^{(0)}=\frac{\alpha_iq_{i-1}}{\beta_i\alpha_{i-1}}F_{i-1}^{(0)},$$

$$d_i=\frac{1}{\beta_i}-\frac{\alpha_i}{\beta_i\alpha_{i-1}}+\frac{\alpha_iq_{i-1}}{\beta_i\alpha_{i-1}}d_{i-1},\quad i\geqslant 2. \tag{10}$$

注意到 $F_1^{(0)}=\alpha_1/\beta_1$, 则由式(10)计算得到

$$F_i^{(0)}=\frac{\alpha_i}{\beta_i}\prod_{k=1}^{i-1}\frac{q_k}{\beta_k},\quad i\geqslant 2. \tag{11}$$

故由文献[6]的定理 4.52 知, 该 $Q$ 矩阵相应的单生过程常返的充分必要条件是 $\sum_{i=0}^{\infty}F_i^{(0)}=\infty$. 所以, 定理的结论 1)得证. 由文献[3]的命题 5 知, 结论 2)显然成立.

下面证明结论 3). 用数学归纳法可以得到

$$\frac{d_i}{F_i^{(0)}}=\sum_{k=1}^{i}\frac{1}{\beta_kF_k^{(0)}}\left(1-\frac{\alpha_k}{\alpha_{k-1}}\right),\quad i\geqslant 0. \tag{12}$$

进而由定理假设和式(12)知

$$\frac{d_i}{F_i^{(0)}}\uparrow\hat{d}:=\sup_{i\geqslant 0}\frac{d_i}{F_i^{(0)}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\beta_kF_k^{(0)}}\left(1-\frac{\alpha_k}{\alpha_{k-1}}\right)=C<\infty,\quad i\to\infty, \tag{13}$$

所以由文献[2]的注 2.3 或文献[6]的引理 4.54 有 $d=\hat{d}=C<\infty$, 其中 $d$ 的定义见式(4). 再由文献[6]的定理 4.52 知, 过程是遍历的. 为计算平稳分布, 由定义可以得到

$$F_i^{(k)}=\frac{\alpha_i}{\beta_i}\sum_{j=k}^{i-1}F_j^{(k)},\quad i\geqslant k+1;$$

$$F_k^{(k)}=1,\quad k\geqslant 0.$$

归纳可证

$$F_i^{(k)}=\frac{\alpha_iq_{i-1}}{\beta_i\alpha_{i-1}}F_{i-1}^{(k)},\quad i\geqslant k+2;$$

$$F_{k+1}^{(k)}=\frac{\alpha_{k+1}}{\beta_{k+1}},\quad k\geqslant 0. \tag{14}$$

由式(10)和(14)得出

$$\frac{F_i^{(0)}}{F_i^{(k)}}=\frac{F_{i-1}^{(0)}}{F_{i-1}^{(k)}}=\cdots=\frac{F_{k+1}^{(0)}}{F_{k+1}^{(k)}}=\frac{\beta_{k+1}F_{k+1}^{(0)}}{\alpha_{k+1}}\geqslant F_k^{(0)},\quad i\geqslant k+1\geqslant 1. \tag{15}$$

再由式(12)推出

$$m_i=\frac{1}{q_{01}}F_i^{(0)}+d_i=\left(\frac{1}{\beta_0}+\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{\beta_jF_j^{(0)}}\left(1-\frac{\alpha_j}{\alpha_{j-1}}\right)\right)F_i^{(0)},\quad i\geqslant 0.$$

因此, 由以上 2 式推出

$$\frac{m_i}{F_i^{(k)}}=\left(\frac{1}{\beta_0}+\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{\beta_jF_j^{(0)}}\left(1-\frac{\alpha_j}{\alpha_{j-1}}\right)\right)\frac{\beta_{k+1}F_{k+1}^{(0)}}{\alpha_{k+1}},\quad i\geqslant k+1\geqslant 1;$$

$$\frac{m_k}{F_k^{(k)}}=\left(\frac{1}{\beta_0}+\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{\beta_jF_j^{(0)}}\left(1-\frac{\alpha_j}{\alpha_{j-1}}\right)\right)F_k^{(0)},\quad k\geqslant 0.$$

进而由定理假设及式(15)可知, 对任意固定的 $k$ 有 $m_i/F_i^{(k)}$ 关于 $i$ 单调增. 再结合式(11)可得

$$\frac{m_i}{F_i^{(k)}}\uparrow\hat{c}_k=\left(\frac{1}{\beta_0}+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\beta_jF_j^{(0)}}\left(1-\frac{\alpha_j}{\alpha_{j-1}}\right)\right)\cdot\prod_{j=1}^{k}\frac{q_j}{\beta_j}=\left(\frac{1}{\beta_0}+C\right)\prod_{j=1}^{k}\frac{q_j}{\beta_j},\quad i\to\infty,\ k\geqslant 1,$$

$$\frac{m_i}{F_i^{(0)}} \uparrow \hat{c}_0 = \left(\frac{1}{\beta_0} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_j F_j^{(0)}}\left(1 - \frac{\alpha_j}{\alpha_{j-1}}\right)\right) \cdot \frac{\beta_1 F_1^{(0)}}{\alpha_1} = \frac{1}{\beta_0} + C, \quad i \to \infty,$$

其中 $\hat{c}_k$ 的定义见式(8). 如同式(9)再定义 $c_k$, 同样由Stolz公式容易证明 $c_k = \hat{c}_k\ (k \geqslant 0)$. 进而由文献[4]的定理3可以求得平稳分布为

$$\pi_0 = \frac{1}{1+\beta_0 C}, \quad \pi_k = \frac{\beta_0}{\beta_k(1+\beta_0 C)} \prod_{j=1}^{k} \frac{\beta_j}{q_j}, \quad k \geqslant 1.$$

最后, 假设 $\lim_{i\to\infty} \frac{\alpha_i q_{i-1}}{\beta_i \alpha_{i-1}} =: C_1 > 1$. 由式(12)和(13), 我们有

$$\sup_{i\geqslant 1} \sum_{k=0}^{i-1} (dF_k^{(0)} - d_k) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k^{(0)} \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{\beta_i F_i^{(0)}} \cdot \left(1-\frac{\alpha_i}{\alpha_{i-1}}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_i F_i^{(0)}}\left(1-\frac{\alpha_i}{\alpha_{i-1}}\right) \sum_{k=0}^{i-1} F_k^{(0)}. \quad (16)$$

由Stolz公式, 定理假设和式(10)知

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{i-1}F_k^{(0)}}{F_i^{(0)}} = \lim_{i\to\infty}\frac{F_{i-1}^{(0)}}{F_i^{(0)}-F_{i-1}^{(0)}} = \frac{1}{C_1 - 1} > 0.$$

因此, 式(16)右端的级数与级数 $\sum_{i=1}^{\infty} \left(1-\frac{\alpha_i}{\alpha_{i-1}}\right)\frac{1}{\beta_i}$ 同时收敛或同时发散. 故由文献[2]的定理1.1得出过程强遍历的充分必要条件. 定理全部结论证毕.

**定理3的证明**　由定义得到

$$F_0^{(0)}=1, \quad F_i^{(0)} = \frac{\beta}{\lambda_i}\sum_{j=0}^{i-1}(j+1)F_j^{(0)}, \quad i\geqslant 1;$$

$$d_0 = 0, \quad d_i = \frac{1}{\lambda_i}\left(1+\beta\sum_{j=0}^{i-1}(j+1)d_j\right), \quad i \geqslant 1;$$

$$F_k^{(k)}=1, \quad F_i^{(k)} = \frac{\beta}{\lambda_i}\sum_{j=k}^{i-1}(j+1)F_j^{(k)}, \quad i>k\geqslant 0.$$

计算得 $F_1^{(0)} = \beta/\lambda_1$, $d_1 = 1/\lambda_1$, 且可以归纳得到

$$F_i^{(0)} = \frac{\lambda_{i-1}+i\beta}{\lambda_i}F_{i-1}^{(0)}, \quad d_i = \frac{\lambda_{i-1}+i\beta}{\lambda_i} d_{i-1}, \quad i\geqslant 2,$$

$$F_{k+1}^{(k)} = \frac{(k+1)\beta}{\lambda_{k+1}}, \quad F_i^{(k)} = \frac{\lambda_{i-1}+i\beta}{\lambda_i}F_{i-1}^{(k)}, \quad i\geqslant k+2\geqslant 2.$$

因此, 我们有

$$F_i^{(0)} = \prod_{k=2}^{i} \frac{\lambda_{k-1}+k\beta}{\lambda_k} F_1^{(0)} = \frac{\beta}{a+\beta}\prod_{k=1}^{i} \frac{\lambda_{k-1}+k\beta}{\lambda_k}, \quad i\geqslant 2. \quad (17)$$

实际上, 上式对所有的 $i\geqslant 1$ 都成立. 进而, 由以上2式可以推出

$$\frac{d_i}{F_i^{(0)}} = \frac{d_{i-1}}{F_{i-1}^{(0)}} = \cdots = \frac{d_1}{F_1^{(0)}} = \frac{1}{\beta}, \quad i\geqslant 1,$$

$$\frac{F_i^{(0)}}{F_i^{(k)}} = \frac{F_{i-1}^{(0)}}{F_{i-1}^{(k)}} = \cdots = \frac{F_{k+1}^{(0)}}{F_{k+1}^{(k)}} = \frac{\lambda_k+(k+1)\beta}{(k+1)\beta}F_k^{(0)},$$

$$i\geqslant k+1\geqslant 2. \quad (18)$$

再由 $m_n = q_{01}^{-1}F_n^{(0)} + d_n$ 得

$$m_0 = 1/a,$$

$$m_i = \frac{a+\beta}{a\beta}F_i^{(0)} = \frac{1}{a}\prod_{k=1}^{i} \frac{\lambda_{k-1}+k\beta}{\lambda_k}, \quad i\geqslant 1. \quad (19)$$

由文献[6]的定理3.16, 我们得出过程正则的充分必要条件. 此时, 由 $\inf_{i\geqslant 1} q_{i0} = \beta > 0$ 及文献[3]的命题5知过程是强遍历的, 从而存在平稳分布. 为求平稳分布, 由式(18)和(19), 我们对任意的 $k$ 有

$$\frac{m_i}{F_i^{(k)}} = \frac{a+\beta}{a\beta}\cdot\frac{\lambda_k+(k+1)\beta}{(k+1)\beta}F_k^{(0)} \geqslant \frac{a+\beta}{a\beta}F_k^{(0)} = \frac{m_k}{F_k^{(k)}}, \quad i\geqslant k+1\geqslant 2,$$

$$\frac{m_0}{F_0^{(0)}} = \frac{1}{a}, \quad \frac{m_i}{F_i^{(0)}} = \frac{a+\beta}{a\beta}, \quad i\geqslant 1.$$

由 $\hat c_k$ 的定义(见式(8))和式(17), 我们有

$$\frac{m_i}{F_i^{(k)}}\uparrow \hat c_k = \frac{1}{a}\cdot\frac{\lambda_k+(k+1)\beta}{(k+1)\beta}\prod_{j=1}^{k}\frac{\lambda_{j-1}+j\beta}{\lambda_j},$$

$$i\to\infty, \quad k\geqslant 1,$$

$$\frac{m_i}{F_i^{(0)}}\uparrow\hat c_0 = \frac{a+\beta}{a\beta}, \quad i\to\infty.$$

如同式(9)再定义 $c_k$, 同样由Stolz公式容易证明 $c_k = \hat c_k\ (k\geqslant 0)$. 进而由文献[4]的定理3可求得平稳分布为

$$\pi_0 = \frac{\beta}{a+\beta},$$

$$\pi_k = \frac{a}{\lambda_k}\cdot\frac{(k+1)\beta}{\lambda_k+(k+1)\beta}\prod_{j=1}^{k}\frac{\lambda_j}{\lambda_{j-1}+j\beta} = \frac{(k+1)\beta}{a+\beta}\prod_{j=0}^{k-1}\frac{\lambda_j}{\lambda_{j+1}+(j+2)\beta}, \quad k\geqslant 1.$$

至此, 定理结论全部证毕.

## 3　几个例子

作为定理的应用, 我们在此节来介绍几个有意义的例子.

**例1**　令 $q_{01}$ 为任意正数,

$$q_{i,i+1} = 1/2\ (i\geqslant 1), \quad q_{ij} = 1/(2i)\ (0\leqslant j\leqslant i-1),$$

其他的 $q_{ij} = 0\ (i\neq j)$, 则相应的单生过程指数遍历但非强遍历, 且其平稳分布为

$$\pi_0 = \frac{1}{1+q_{01}\pi}, \quad \pi_k = \frac{2q_{01}(k+1)!}{(1+q_{01}\pi)(2k+1)!!}, \quad k\geqslant 1.$$

证　我们应用定理1. 此时, $h_i = 2i\ (i\geqslant 0)$, 由定理1的2)和3)易得前2结论, 同时由Eular级数(此事实是由陈木法院士指出)

$$\frac{\pi}{2} = 1+\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 2}{3\cdot 5}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{3\cdot 5\cdot 7}+\cdots$$

知 $C=\pi$, 故得到平稳分布的表达式.

**例2**　令 $q_{01}$ 为任意正数,

$$q_{i,i+1} = i\ (i \geqslant 1),\ q_{ij} = 1\ (0 \leqslant j \leqslant i-1),$$

其他的 $q_{ij} = 0\ (i \neq j)$. 则相应的单生过程强遍历且其平稳分布为

$$\pi_0 = \frac{1}{1+q_{01}},\ \pi_k = \frac{q_{01}(k+1)!}{(1+q_{01})k(2k+1)!!},\ k \geqslant 1.$$

证　为应用定理 1, 注意此时 $h_i = 1\ (i \geqslant 1), h_0 = 0$, 因此 $C = 1$. 进而易得结论. 此外, 注意到 $\inf_{i \geqslant 1} q_{i0} = 1 > 0$, 所以由文献[3]的命题 5 同样可知此单生过程强遍历.

例 **3**　令 $q_{01}$ 为任意正数,

$$q_{i,i+1} = i^{\gamma}(i \geqslant 1),\ q_{ij} = i^{\gamma-1}(0 \leqslant j \leqslant i-1),$$

其中 $\gamma \in (0, 1)$, 其他的 $q_{ij} = 0\ (i \neq j)$, 则相应的单生过程强遍历, 且其平稳分布为

$$\pi_0 = \frac{1}{1+q_{01}C},$$

$$\pi_k = \frac{q_{01}(k+1)!}{(1+q_{01}C)k^{\gamma}(2k+1)!!},\ k \geqslant 1,$$

其中

$$C = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^{1-\gamma} - (i-1)^{1-\gamma})(i-1)!}{(2i-1)!!}.$$

证　注意此时 $h_i = i^{1-\gamma}(i \geqslant 0)$, 因此 $C$ 为以上形式且

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{h_i - h_{i-1}}{i} \leqslant 1 + (1-\gamma) \sum_{i=2}^{\infty} \frac{(i-1)^{-\gamma}}{i} < \infty.$$ 进而由定理 1 易得结论.

感谢 北京师范大学陈木法院士在本文的完成过程中所给予的帮助.

## 4　参考文献


[1] Chen Mufa. Single birth processes[J]. Chinese Ann Math, 1999, 20B: 77

[2] Zhang Yuhui. Strong ergodicity for single birth processes[J]. J Appl Prob, 2001, 38: 270

[3] 张余辉. 单生过程首中时的各阶矩[J]. 北京师范大学学报: 自然科学版, 2003, 39: 430

[4] 张余辉. 单生过程击中时与平稳分布[J]. 北京师范大学学报: 自然科学版, 2004, 40: 157

[5] Mao Yonghua, Zhang Yuhui. Exponential ergodicity for single birth processes[J]. J Appl Prob, 2004, 41: 1022

[6] Chen Mufa. From Markov chains to non-equilibrium particle systems (Second edition)[M]. Singapore: World Scientific, 2004

[7] Chen Mufa. Eigenvalues, inequalities, and ergodic theory[M]. Berlin: Springer, 2004

[8] Anderson W J. Continuous-time Markov chains[M]. New York: Springer-Verlag, 1991

[9] Cairns B, Pollett P K. Extinction times for a general birth, death and catastrophe process[J]. J Appl Prob, 2004, 41: 1211


# SOME SINGLE BIRTH $Q$-MATRICES

Zhang Yuhui[1)]　Zhao Qianqian[2)]

(1) School of Mathematical Sciences, Beijing Normal University, 100875, Beijing, China;
2) School of Mathematical Sciences, Qufu Normal University, 273165, Qufu, Shangdong, China)

**Abstract**　Some specific single birth $Q$-matrices are studied and some criteria are obtained on recurrence, ergodicity, exponential ergodicity and strong ergodicity for these single birth processes. Meanwhile, the expressions of stationary distributions are presented explicitly.

**Key words**　single birth processes; ergodic; exponentially ergodic; strongly ergodic; stationary distribution