一维 Brusselator 模型的一个性质*

吴 波 张余辉-
(北京师范大学数学科学学院, 100875, 北京)

摘要 用 2 种方法证明了一维 Brusselator 模型所对应的 Q 过程不满足超 Poincar 不等式, 并对其一种修正模型获得了同样的结论.

关键词 Brusselator 模型; 强遍历; 超 Poincar 不等式
分类号 O 211.6

1 引言和主要结果

反应扩散过程是非紧状态空间上的无穷粒子马尔可夫过程, 主要用来描述如化学反应等有关模型. 非紧的状态空间给问题的研究带来许多困难. 文献[1]和[2]对单物种情形作了系统研究, 而对多物种情形, 尤其在无穷维情形, 所得结果却不够丰富.

Brusselator 模型属于两物种模型, 是多物种的基本模型之一, 本文只讨论一维情形 Brusselator 模型. 此时的状态空间为 $\mathbf{Z}_+^2$ (其中 $\mathbf{Z}_+$ 是指非负整数集). 设盒子中有固定数目的作用相当于催化剂的 2 种粒子 A 和 B, 参加反应的是粒子 X_1 和 X_2. 由文献[3]知道, 盒子中的化学反应模型是:

$$A \xrightarrow{\lambda_1} X_1, \quad B + X_1 \xrightarrow{\lambda_2} X_2 + D,$$
$$2X_1 + X_2 \xrightarrow{\lambda_3} 3X_1, \quad X_1 \xrightarrow{\lambda_4} C,$$

其中 $\lambda_i > 0$ 为反应速率($i = 1, 2, 3, 4$). 该模型可用如下二维保守 Q 矩阵描述: 对(m, n)、$(m', n') \in \mathbf{Z}_+^2$, 有

$$q(m, n; m', n') = \begin{cases} \lambda_1 a, & 当(m', n') = (m+1, n); \\ \lambda_2 bm, & 当(m', n') = (m-1, n+1); \\ \lambda_3 m(m-1)n/2, & \\ \quad 当(m', n') = (m+1, n-1); & \\ \lambda_4 m, & 当(m', n') = (m-1, n); \\ 0, & 其他的(m', n') \neq (m, n). \end{cases} \tag{1}$$

而且 $q(m, n) = \sum_{(m', n') \neq (m, n)} q(m, n; m', n')$.

文献[4]提出了化多维 Q 过程为一维 Q 过程的方法来讨论多维过程的唯一性、常返性与遍历性. 此方法对反应扩散过程的大部分基本模型有效(对文献[4]中所有概率模型的唯一性均有效, 包括 Brusselator 模型), 但对 Brusselator 模型的遍历性失效. 1991 年韩东[5]证明了一维 Brusselator 模型是遍历的; 1995 年陈金文[6]证明有限维 Brusselator 模型是指数遍历的. 最近, 文献[7]证明了一维 Brusselator 模型对应的 Q 过程非强遍历并给出了一种强遍历的修正模型. 本文是继其之后进一步讨论该模型是否满足超 Poincar 不等式(Super-Poincar Inequality). 所谓超 Poincar 不等式即

$$\mu(f^2) \leqslant r\mathscr{E}(f, f) + \beta(r)\mu(|f|)^2, \quad r > 0,\ f \in L^2(\mu), \tag{2}$$

其中 $\mathscr{E}(f, f)$为狄氏型, 函数 $\beta: (0, \infty) \to (0, \infty)$, 而 μ 为不变测度. 简记该不等式为(SPI). 主要结果如下.

定理 1 一维 Brusselator 模型对应的 Q 过程不满足超 Poincar 不等式.

定理 2 对一维 Brusselator 模型作如下修正:

$$\hat{q}(m, 0; m', n') = \begin{cases} q(m, 0; m', n'), & 当(m', n') \neq (m-1, 0); \\ \lambda_4 km^2, & 当(m', n') = (m-1, 0). \end{cases} \tag{3}$$

其他的 $\hat{q}(m, n; m', n') = q(m, n; m', n')$, 其中常数 $k > 2\lambda_2 b/\lambda_4$. 则该修正模型对应的 Q 过程不满足超 Poincar 不等式.

2 定理的证明

为了证明定理 1, 我们需要下面 2 个引理.

引理 1 设 $E = \{0, 1, 2, \cdots, N, \cdots\}$. $Q = (q_{ij})$ 为 E 上的一个正则遍历 Q 矩阵, μ 为其不变测度. 给定 $1 \leqslant N \in E$, 记 $E_N := \{0, 1, 2, \cdots, N-1\}$, 则(SPI)成立当且仅当 $\chi(N) \uparrow \infty$(当 $N \uparrow \infty$), 其中

* 国家"九七三"计划资助项目; 国家自然科学基金资助项目(10121101, 10025105, 10101003); 教育部博士点基金资助项目(20010027007, 20040027009)
- 通讯作者
收稿日期: 2005-03-30

$$\lambda(N)=\inf\{\mathscr{E}(f,f): f|_{E_N}=0,\ \mu(f^2)=1\}.$$

由于

$$C_N := \max_{i\leqslant N-1}\sum_{j\geqslant N}\mu_i q_{ij} < \infty\ (N\geqslant 1),$$

故引理 1 是文献[8] Theorem 3.4.2 的特例, 证明见文献[8].

引理 2 设 μ 为一维 Brusselator 模型对应的 Q 过程的不变测度. 简记 $\mu(\{(m,n)\})$ 为 $\mu(m,n)$, 则

$$\mu(0,0)\lambda_1 a=\mu(1,0)\lambda_4,$$

$$\mu(0,n)\lambda_1 a=\mu(1,n)\lambda_4+\mu(1,n-1)\lambda_2 b,\quad n\geqslant 1.$$

证 取定 $f=1_{\{(0,0)\}}$, 则有

$$0=\int\Omega f\,\mathrm{d}\mu=\sum_{(m,n)}\mu(m,n)\sum_{(m',n')\neq(m,n)}\cdot q(m,n;m',n')(f(m',n')-f(m,n))=$$
$$\mu(0,0)q(0,0;1,0)(f(1,0)-f(0,0))+\mu(1,0)q(1,0;0,0)(f(0,0)-f(1,0))=-\mu(0,0)\lambda_1 a+\mu(1,0)\lambda_4,$$

从而得证第 1 个等式. 再取 $f=1_{\{(0,n)\}}(n\geqslant 1)$, 则有

$$0=\int\Omega f\,\mathrm{d}\mu=\sum_{(m,n)}\mu(m,n)\sum_{(m',n')\neq(m,n)}\cdot q(m,n;m',n')(f(m',n')-f(m,n))=$$
$$\mu(0,n)q(0,n;1,n)(f(1,n)-f(0,n))+\mu(1,n-1)q(1,n-1;0,n)\cdot(f(0,n)-f(1,n-1))+$$
$$\mu(1,n)q(1,n;0,n)(f(0,n)-f(1,n))=-\mu(0,n)\lambda_1 a+\mu(1,n-1)\lambda_2 b+\mu(1,n)\lambda_4,$$

所以引理结论得证.

定理 1 的证明

第 1 种证法 首先将 Q 矩阵对称化. 令

$$q^*(x;y)=\frac{\mu(y)q(y;x)}{\mu(x)},$$

$$q(x;y)=\frac{q(x;y)+q^*(x;y)}{2},$$

则 $Q=(q(x;y))$ 为可配称的. 只需证 Q 过程不满足超 Poincaré 不等式. 令 $E_N=\{(m,n): m+n\leqslant N\}$. 设 Ω 为 Q 过程的生成元. 记 $\Omega_N := \Omega|_{E_N^c}$, 即对 $f\in C_0(E_N^c)$, $\Omega_N f=\Omega(1_{E_N^c}f)$, 则 Ω_N 是 $L^2(E_N^c)$ 上自伴算子. 由于状态空间离散, 所以算子对应的半群有密度.

反证法. 若 Q 满足(SPI), 则 Ω_N 对应的谱为离散的. 令 $\lambda(N)$ 为 $-\Omega_N$ 的第一特征值, 因此, 存在 $\varphi_N>0$, $\varphi_N\in\mathscr{D}(\Omega_N)$, 使得 $\Omega_N\varphi_N=-\lambda(N)\varphi_N$. 则对任意的 $x=(m,n)\in E_N^c$,

$$0=\Omega_N\varphi_N(x)+\lambda(N)\varphi_N(x)=\sum_{y\neq x}q(x;y)(\varphi_N(y)-\varphi_N(x))+\lambda(N)\varphi_N(x)=$$
$$\sum_{(m',n')\neq(m,n)}q(m,n;m',n')\cdot(\varphi_N(m',n')-\varphi_N(m,n))+\lambda(N)\varphi_N(m,n)=$$
$$\frac{1}{2}\sum_{(m',n')\neq(m,n)}(q(m,n;m',n')+q^*(m,n;m',n'))\cdot(\varphi_N(m',n')-\varphi_N(m,n))+\lambda(N)\varphi_N(m,n)=$$
$$\frac{1}{2}\Big\{\Big(\lambda_1 a+\frac{\mu(m+1,n)}{\mu(m,n)}\lambda_4(m+1)\Big)\cdot(\varphi_N(m+1,n)-\varphi_N(m,n))+$$
$$\Big(\lambda_4 m+\frac{\mu(m-1,n)}{\mu(m,n)}\lambda_1 a\Big)(\varphi_N(m-1,n)-\varphi_N(m,n))+\Big(\lambda_2 bm+\frac{\mu(m-1,n+1)}{\mu(m,n)}\cdot\frac{\lambda_3(m-1)(m-2)(n+1)}{2}\Big)\cdot$$
$$(\varphi_N(m-1,n+1)-\varphi_N(m,n))+\Big(\frac{\lambda_3 m(m-1)n}{2}+\frac{\mu(m+1,n-1)}{\mu(m,n)}\lambda_2 b(m+1)\Big)\cdot$$
$$(\varphi_N(m+1,n-1)-\varphi_N(m,n))\Big\}+\lambda(N)\varphi_N(m,n).$$

由引理 1 知 $\lambda(N)\uparrow\infty(N\uparrow\infty)$, 所以存在 $N_0\in\mathbf{N}$ 使得 $N\geqslant N_0$ 有 $\lambda(N)>\lambda_1 a$. 因此, 取定 $N\geqslant N_0$, 再取 $m=0$, $n\geqslant N_0$ 使得 $(m,n)\in E_N^c$, 则有

$$0=\Big(\lambda_1 a+\frac{\mu(1,n)}{\mu(0,n)}\lambda_4\Big)(\varphi_N(1,n)-\varphi_N(0,n))+\frac{\mu(1,n-1)}{\mu(0,n)}\lambda_2 b(\varphi_N(1,n-1)-\varphi_N(0,n))+$$
$$2\lambda(N)\varphi_N(0,n)=\Big(\lambda_1 a+\frac{\mu(1,n)}{\mu(0,n)}\lambda_4\Big)\varphi_N(1,n)+\frac{\mu(1,n-1)}{\mu(0,n)}\lambda_2 b\varphi_N(1,n-1)+\Big(2\lambda(N)-$$
$$\Big(\lambda_1 a+\frac{\mu(1,n)}{\mu(0,n)}\lambda_4\Big)-\frac{\mu(1,n-1)}{\mu(0,n)}\lambda_2 b\Big)\varphi_N(0,n).$$

由引理 2 及 (m,n) 的取法知

$$2\lambda(N)-\Big(\lambda_1 a+\frac{\mu(1,n)}{\mu(0,n)}\lambda_4\Big)-\frac{\mu(1,n-1)}{\mu(0,n)}\lambda_2 b=2(\lambda(N)-\lambda_1 a)>0.$$

所以

$$\varphi_N(0,n)=\varphi_N(1,n)=\varphi_N(1,n-1)=0,$$

与 $\varphi_N>0$ 矛盾, 所以 Q 过程不满足(SPI). 因此, 一维 Brusselator 模型不满足超 Poincaré 不等式.

第 2 种证法 若一维 Brusselator 模型对应的 Q 过程满足(SPI)即式(2)成立. 由于一维 Brusselator 模型是(指数)遍历的, 故有 $\lim_{n\to\infty}\mu(0,n)=0$. 所以任意固定 $r>0$, 可以取充分大的 n 使得 $\beta(r)\mu(0,n)<1$. 再取 $f=1_{\{(0,n)\}}$, 则 $f\in L^2(\mu)$ 且由式(2)有

$$\mu(1_{\{(0,n)\}}{}^2)\leqslant r\mathscr{E}(1_{\{(0,n)\}},1_{\{(0,n)\}})+\beta(r)\mu(|1_{\{(0,n)\}}|)^2,$$

即

$$\frac{2\mu(0,n)}{\mu(0,n)\lambda_1 a+\mu(1,n)\lambda_4+\mu(1,n-1)\lambda_2 b}\leqslant$$

$$\frac{r}{1-\beta(r)\mu(0,n)}.$$

再由引理 2 知上式即为

$$\frac{1}{\lambda a} \leqslant \frac{r}{1-\beta(r)\mu(0,n)}.$$

令 $n \to \infty$, 有 $1/(\lambda a) \leqslant r$. 再由 r 的任意性得出 $1/(\lambda a) \leqslant 0$, 矛盾. 所以一维 Brusselator 模型不满足超 Poincar 不等式.

定理 2 的证明需要用下面类似引理 2 的引理.

引理 3　设 μ 为一维 Brusselator 修正模型(3)对应的 Q 过程的不变测度, 则

$$\mu(0,n)\lambda a = \mu(1,n)\lambda k + \mu(1,n-1)\lambda b,\ \ n \geqslant 1.$$

此引理的证明类似于引理 2, 故此处略去.

定理 2 的证明　若一维 Brusselator 修正模型(3)对应的 Q 过程满足(SPI), 采用定理 1 证明中的第 2 种方法. 由于一维 Brusselator 修正模型是(强)遍历的, 故有 $\lim_{n\to\infty}\mu(0,n) = 0$. 进而, 对任意固定 $r > 0$, 总可取充分大的 n 使得 $\beta(r)\mu(0,n) < 1$. 再取 $f = 1_{\{(0,n)\}}$, 由式(2)可得

$$\frac{2\mu(0,n)}{\mu(0,n)\lambda a + \mu(1,n)\lambda k + \mu(1,n-1)\lambda b} \leqslant \frac{r}{1-\beta(r)\mu(0,n)}.$$

由引理 3 及上式知

$$\frac{1}{\lambda a} \leqslant \frac{r}{1-\beta(r)\mu(0,n)}.$$

在上式中先令 $n \to \infty$, 再对 r 取下确界, 推出矛盾. 所以一维 Brusselator 修正模型(3) 不满足超 Poincar 不等式.

注 1　对于高维(无穷维)Brusselator 模型对应的 Q 过程来说, 由于盒子之间存在扩散, 有交互作用, 这给作类似引理 2 这样的测度估计带来一定的困难, 所以我们还未能证明不满足(SPI).

注 2　现在由文献[7] 和本文的定理 2, 我们知道一维 Brusselator 修正模型(3)对应的 Q 过程强遍历但不满足超 Poincar 不等式, 这说明对不可逆过程, 强遍历与超 Poincar 不等式强弱不可比. 对可逆过程, 我们已经知道强遍历与超 Poincar 不等式是不可比强弱的, 参见文献[9-10].

在本文完成过程中, 作者与王凤雨教授进行了有益讨论, 特致感谢!

3　参考文献

[1]　陈木法. 跳过程与粒子系统[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 1986

[2]　Chen Mufa. From Markov chains to non-equilibrium particle systems[M]. Singapore: World Scientific, 1992

[3]　严士健, 李占柄. 非平衡系统的概率模型及 Master 方程的建立[J]. 物理学报, 1980, 29: 139

[4]　Yan Shijian, Chen Mufa. Multidimensional Q-processes [J]. Chinese Ann Math, 1986, 7B: 90

[5]　韩东. 一维 Brusselator 模型的遍历性[J]. 新疆大学学报: 自然科学版, 1991, 8: 37

[6]　陈金文. 有限维 Brusselator 模型的正常返性[J]. 数学物理学报, 1995, 15: 121

[7]　吴波, 张余辉. 一维 Brusselator 模型[J]. 应用概率统计, 2005, 21: 225

[8]　Wang Fengyu. Functional inequalities, Markov semigroups and spectral theorey[M]. Beijing: Science Press, 2005

[9]　Chen Mufa. A new story of ergodic theory[J]. Studies in Advanced Mathmatics, 2002, 26: 25

[10]　Wang Fengyu. Functional inequalities for empty essential spetrum[J]. J Funct Anal, 2000, 170: 219

A PROPERTY OF ONE-DIMENSIONAL BRUSSELATOR MODEL

Wu Bo　Zhang Yuhui

(School of Mathematical Sciences, Beijing Normal University, 100875, Beijing, China)

Abstract　It is proven that the super-Poincar inequalities fail for the Q-process corresponding to one-dimensional Brusselator model by two different methods. The same result is obtained for one modified model.

Key words　Brusselator model; strongly ergodic; super-Poincar inequalities