应用概率统计　第二十一卷
第三期　2005 年 8 月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol. 21 No. 3 Aug. 2005

一维 Brusselator 模型 *

吴　波　　张余辉 [1]

(北京师范大学数学科学学院，北京， 100875)

摘　要

用两种方法证明了一维 Brusselator 模型对应的 Q 过程非强遍历．对一个修正的一维 Brusselator 模型，证明了其对应的 Q 过程是强遍历的．应用其方法研究了一类扩展的分支过程，得到该过程强遍历的一个必要条件．

关 键 词: Brusselator 模型，强遍历，生灭过程.

学 科 分 类 号: O211.6.

§1.　引言和主要结果

反应扩散过程是非紧状态空间上的无穷粒子马尔可夫过程，用来描述例如化学反应等的有关模型．由于状态空间非紧，研究要困难得多．对于单物种情形，文献 [1, 2] 作了系统研究．而对多物种情形，所得结果不够丰富，尤其在无穷维情形．

Brusselator 模型是两物种的，这是多物种的基本模型之一．本文只讨论一维情形 Brusselator 模型．此时，其状态空间为 $\mathbf{Z}_+^2$ (其中 $\mathbf{Z}_+$ 是指非负整数集)．设盒子中有固定数目的作用相当于催化剂的两种粒子 A 和 B．参加反应的是粒子 X_1 和 X_2．由文献 [3] 知道，盒子中的化学反应模型是：

$$A \xrightarrow{\lambda_1} X_1, \qquad B + X_1 \xrightarrow{\lambda_2} X_2 + D, \qquad 2X_1 + X_2 \xrightarrow{\lambda_3} 3X_1, \qquad X_1 \xrightarrow{\lambda_4} C,$$

其中 $\lambda_i > 0$ 为反应速率 ($i = 1, 2, 3, 4$)．该模型可用如下二维保守的 Q 矩阵描述：对 $(m, n), (m', n') \in \mathbf{Z}_+^2$，有

$$q(m, n; m', n') = \begin{cases} \lambda_1 a, & 当\ (m', n') = (m+1, n); \\ \lambda_2 bm, & 当\ (m', n') = (m-1, n+1); \\ \lambda_3 m(m-1)n/2, & 当\ (m', n') = (m+1, n-1); \\ \lambda_4 m, & 当\ (m', n') = (m-1, n); \\ 0, & 其它的\ (m', n') \neq (m, n). \end{cases} \tag{1.1}$$

而且 $q(m, n) = \sum\limits_{(m', n') \neq (m, n)} q(m, n; m', n')$.

---

* 973 项目，国家自然科学基金 (批准号 10121101, 10025105 和 10101003) 和教育部博士点基金 (批准号 20010027007 和 20040027009) 资助项目.

[1] 通讯作者， email 地址： zhangyh@bnu.edu.cn.

本文 2003 年 6 月 24 日收到.

文献 [4] 提出了化多维 Q 过程为一维 Q 过程来讨论其唯一性，常返性与遍历性的方法．此方法对反应扩散过程的大部分基本模型有效 (其中对 [4] 中所有概率模型的唯一性均有效，包括 Brusselator 模型)，但对 Brusselator 模型的遍历性失效．1991 年，韩东 ([5]) 证明了一维 Brusselator 模型是遍历的；而后，陈金文 ([6]) 证明有限维 Brusselator 模型是指数遍历的．本文研究一维 Brusselator 模型的强遍历性问题．所用方法对有限维或无穷维 Brusselator 模型依然有效．主要结果如下．

定理 1.1 一维 Brusselator 模型对应的 Q 过程非强遍历．

定理 1.2 对一维 Brusselator 模型作如下修正：

$$\widetilde{q}(m,0;m-1,0)=\lambda_4 km^2, \tag{1.2}$$

其中常数 $k>2\lambda_2 b/\lambda_4$，其它的 $\widetilde{q}(m,n;m',n')=q(m,n;m',n')$．则一维 Brusselator 修正模型对应的 Q 过程强遍历．

为方便证明，再复习一些记号和结果．给定可数集 E 上的不可约 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$．令 $(X(t))_{t\geq 0}$ 为定义在一概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$ 上相应的马氏链．设 H 为 E 的一非空有限子集，定义

$$\sigma_H=\inf\{t\geq\eta_1:X(t)\in H\},\qquad \tau_H=\inf\{t\geq 0:X(t)\in H\},$$

其中 η_1 为第一次跳时刻，即 $\eta_1=\inf\{t>0:X(t)\neq X(0)\}$．一般当 H 为单点集 $\{i\}$ 时，分别简记为 σ_i 和 τ_i．以 E_i 表示出发点为 i 的数学期望．显然，若 $i\notin H$，则 $\mathsf{E}_i\sigma_H=\mathsf{E}_i\tau_H$；若 $i\in H$，则 $\mathsf{E}_i\tau_H=0$，且由强马氏性知，

$$\begin{aligned}\mathsf{E}_i\sigma_H &= \mathsf{E}_i\eta_1+\mathsf{E}_i\mathsf{E}_{X(\eta_1)}\tau_H=\frac{1}{q_i}+\sum_{j\neq i}\frac{q_{ij}}{q_i}\mathsf{E}_j\tau_H\\ &= \frac{1}{q_i}+\sum_{j\neq i,j\notin H}\frac{q_{ij}}{q_i}\mathsf{E}_j\tau_H=\frac{1}{q_i}+\sum_{j\neq i,j\notin H}\frac{q_{ij}}{q_i}\mathsf{E}_j\sigma_H.\end{aligned}$$

注 1.1 文献 [2] 的定理 4.44 告诉我们，该马氏链强遍历当且仅当 $\sup\limits_i\mathsf{E}_i\sigma_H<\infty$．自然，此时无吸收态．则由上式知，后者等价于 $\left(\sup\limits_{i\notin H}\mathsf{E}_i\sigma_H=\right)\sup\limits_{i\notin H}\mathsf{E}_i\tau_H<\infty$．亦即 $\sup\limits_i\mathsf{E}_i\tau_H<\infty$．

§2. 定理 1.1 的证明

首先文献 [4] 证明了一维 Brusselator 模型对应的 Q 矩阵 (1.1) 是正则的．记一维 Brusselator 模型对应的 Q 过程为 $(\xi(t),\eta(t))_{t\geq 0}$．定义

$$\tau=\inf\{t\geq 0:(\xi(t),\eta(t))=(0,0)\}=\inf\{t\geq 0:\xi(t)+\eta(t)=0\}.$$

其生成元算子 Ω 满足：

$$\Omega G(m,n)=\sum_{(m',n')\neq(m,n)}q(m,n;m',n')(G(m',n')-G(m,n)),\qquad (m,n)\in\mathbf{Z}_+^2.$$

构造生灭过程 $(\zeta(t))_{t\geq 0}$ 的 Q 矩阵为：

$$b_i:=q_{i,i+1}=\lambda_1 a,\quad i\geq 0;\qquad a_i:=q_{i,i-1}=\lambda_4 i,\quad i\geq 1. \tag{2.1}$$

定义 $\mu_0=1$, $\mu_i=b_0b_1\cdots b_{i-1}/a_1a_2\cdots a_i\ (i\geq 1)$. 令 $\mu[i,k]=\sum\limits_{i\leq j\leq k}\mu_j$. 容易看出

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\mu_n b_n}\mu[0,n]\geq\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{b_n}=\infty,$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\mu_n b_n}\mu[n+1,\infty)\geq\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{a_{n+1}}=\infty.$$

因此，由文献 [2] 和 [7] 或 [8] 知，该生灭过程正则但非强遍历．定义 $\widetilde{\tau}=\inf\{t\geq 0:\zeta(t)=0\}$. 则由文献 [2] 和注 1.1 知

$$\sup_{i\neq 0}\mathsf{E}_i\widetilde{\tau}=\infty. \tag{2.2}$$

由 Stirling 公式，还可以验证

$$\delta:=\sup_{i>0}\sum_{j=0}^{i-1}\frac{1}{\mu_j b_j}\sum_{j=i}^{\infty}\mu_j<\infty,$$

故由文献 [9] 或 [10] 立刻知道，该生灭过程指数遍历．该生灭过程的生成元算子 $\widetilde{\Omega}$ 满足：

$$\widetilde{\Omega}g(i)=b_i(g(i+1)-g(i))+a_i(g(i-1)-g(i)),\qquad i\geq 0,$$

此处约定 $a_0=0$. 下面我们将用两种不同的比较方法给出定理 1.1 的证明．

(a) 第一种证明 (耦合方法). 我们将对 Q 矩阵 (1.1) 和 (2.1) 作耦合．

首先，这两个边缘 Q 矩阵是正则的．因此，由文献 [11, 12] 和 [13] 知，任意耦合 Q 矩阵 $\overline{Q}=(q(m,n,i;m',n',i'):(m,n,i),(m',n',i')\in\mathbf{Z}_+^2\times\mathbf{Z}_+)$ 是全稳定，保守且正则．再由文献 [12] 知，相应的 (耦合)Q 过程转移概率满足边缘条件等价于 (耦合)$\overline{\Omega}$ 算子满足边缘条件．而且，不难验证 (参看文献 [14]) 后者等价于

$$\begin{cases}\sum\limits_{i'\in\mathbf{Z}_+}q(m,n,i;m',n',i')=q(m,n;m',n'), & \text{当 }(m,n)\neq(m',n');\\ \sum\limits_{(m',n')\in\mathbf{Z}_+^2}q(m,n,i;m',n',i')=q_{ii'}, & \text{当 }i\neq i'.\end{cases} \tag{2.3}$$

其次，令 $F:=\{(m,n,i)\in\mathbf{Z}_+^2\times\mathbf{Z}_+:m+n\geq i\}$. 我们的最终目的是在状态空间 $\mathbf{Z}_+^2\times\mathbf{Z}_+$ 上构造耦合 Q 过程 $(Z(t))_{t\geq 0}=(\xi(t),\eta(t),\zeta(t))_{t\geq 0}$ (其转移概率函数记为 $\mathsf{P}(t)$) 使得

$$\mathsf{P}(t;m,n,i;F)=1,\qquad t\geq 0,\ (m,n,i)\in F, \tag{2.4}$$

类似于文献 [2] 的定理 5.26, 可以证明 (2.4) 等价于耦合 Q 矩阵 $\overline{Q}$ 满足

$$q(m,n,i;F^c):=\sum_{(m',n',i'):m'+n'<i'}q(m,n,i;m',n',i')=0,\qquad (m,n,i)\in F. \tag{2.5}$$

所以，只需要构造满足 (2.3) 和 (2.5) 的耦合 Q 矩阵即可．为此，定义

$$q(m,n,i;m',n',i')=\begin{cases}\lambda_1 a, & \text{当 } (m',n',i')=(m+1,n,i+1);\\ \lambda_2 bm, & \text{当 } (m',n',i')=(m-1,n+1,i);\\ \lambda_3 m(m-1)n/2, & \text{当 } (m',n',i')=(m+1,n-1,i);\\ \lambda_4(m\wedge i), & \text{当 } (m',n',i')=(m-1,n,i-1);\\ \lambda_4(m-i)^+, & \text{当 } (m',n',i')=(m-1,n,i);\\ \lambda_4(i-m)^+, & \text{当 } (m',n',i')=(m,n,i-1);\\ 0, & \text{其它的 } (m',n',i')\neq(m,n,i),\end{cases}$$

而且 $q(m,n,i)=\sum\limits_{(m',n',i',)\neq(m,n,i)} q(m,n,i;m',n',i')$. 可以验证以上即为所需要的耦合 Q 矩阵．所以，对相应的耦合 Q 过程，(2.4) 是成立的，即

$$\mathsf{P}^{(m,n,i)}\{\xi(t)+\eta(t)\geq\zeta(t)\}=1,\qquad t\geq 0,\ (m,n,i)\in F.$$

进而，由轨道的右连续性得出 $\mathsf{P}^{(m,n,i)}\{\xi(t)+\eta(t)\geq\zeta(t),t\geq 0\}=1$ $((m,n,i)\in F)$. 再由此推出

$$\mathsf{P}^{(m,n,m+n)}\{\tau\geq\widetilde{\tau}\}=1.$$

所以，

$$\mathsf{E}_{(m,n)}\tau\geq\mathsf{E}_{m+n}\widetilde{\tau},\qquad (m,n)\in\mathbf{Z}_+^2.$$

结合 (2.2), 立刻有

$$\sup_{(m,n)\neq(0,0)}\mathsf{E}_{(m,n)}\tau\geq\sup_{(m,n)\neq(0,0)}\mathsf{E}_{m+n}\widetilde{\tau}=\sup_{i\neq 0}\mathsf{E}_i\widetilde{\tau}=\infty.$$

所以，由文献 [2] 和注 1.1 知，一维 Brusselator 模型非强遍历．

(b) 第二种证明 (反证法). 假设一维 Brusselator 模型强遍历．则由文献 [2] 和注 1.1 知

$$\sup_{(m,n)\neq(0,0)}\mathsf{E}_{(m,n)}\tau<\infty.$$

令 $F(m,n)=\mathsf{E}_{(m,n)}\tau((m,n)\in\mathbf{Z}_+^2)$. 则 F 是有界函数．熟知

$$\Omega F(m,n)=-1,\quad (m,n)\neq(0,0);\qquad F(0,0)=0.\tag{2.6}$$

记 $H_i=\{(m,n)\in\mathbf{Z}_+^2: m+n=i\}$. 取 $(m_i,n_i)\in H_i$ 使得

$$F(m_i,n_i)=\min_{(m,n)\in H_i}F(m,n),\qquad i\geq 0.\tag{2.7}$$

再令 $f(i)=F(m_i,n_i)$ $(i\geq 0)$. 显然 f 亦有界．下面我们来证明 f 关于 i 是单调递增的．由

(1.1) 知，从任意 $(m,n)\in H_{i+1}$ 出发， $\tau_{H_i}\le\tau_{H_0}=\tau$. 由强马氏性，

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}_{(m,n)}\tau &= \mathsf{E}_{(m,n)}\tau_{H_i}+\mathsf{E}_{(m,n)}\mathsf{E}_{X(\tau_{H_i})}\tau\\
&= \mathsf{E}_{(m,n)}\tau_{H_i}+\sum_{(m',n')\in H_i}\mathsf{P}^{(m,n)}\{X(\tau_{H_i})=(m',n')\}\mathsf{E}_{(m',n')}\tau\\
&\ge \sum_{(m',n')\in H_i}\mathsf{P}^{(m,n)}\{X(\tau_{H_i})=(m',n')\}\mathsf{E}_{(m_i,n_i)}\tau\\
&= f(i),\qquad (m,n)\in H_{i+1}.
\end{aligned}$$

因此，由上式知， $f(i+1)\ge f(i)$.

现在由 (2.1), (2.6) 和 (2.7) 及 f 的单增性，我们可以得到

$$\begin{aligned}
-1 &= \Omega F(m_i,n_i)\\
&= \lambda_1 a(F(m_i+1,n_i)-F(m_i,n_i))+\lambda_2 bm_i(F(m_i-1,n_i+1)-F(m_i,n_i))\\
&\quad +\lambda_3 m_i(m_i-1)n_i2^{-1}(F(m_i+1,n_i-1)-F(m_i,n_i))+\lambda_4 m_i(F(m_i-1,n_i)-F(m_i,n_i))\\
&\ge \lambda_1 a(F(m_i+1,n_i)-F(m_i,n_i))+\lambda_4 m_i(F(m_i-1,n_i)-F(m_i,n_i))\\
&\ge \lambda_1 a(F(m_{i+1},n_{i+1})-F(m_i,n_i))+\lambda_4 m_i(F(m_{i-1},n_{i-1})-F(m_i,n_i))\\
&= \lambda_1 a(f(i+1)-f(i))+\lambda_4 m_i(f(i-1)-f(i))\\
&\ge \lambda_1 a(f(i+1)-f(i))+\lambda_4 i(f(i-1)-f(i))\\
&= \widetilde{\Omega}f(i),\qquad i\ge 1,
\end{aligned}$$

而且 $f(0)=F(0,0)=0$. 所以 f 是方程 $\widetilde{\Omega}g(i)\le -1\ \ (i\ge 1)$ 的非负有界解．因此，由文献 [2] 立刻知，生灭过程 $(\zeta(t))_{t\ge 0}$ 是强遍历的，从而导致矛盾．故一维 Brusselator 模型非强遍历． #

注 2.1 定理 1.1 证明中的第二种证明方法是王凤雨教授提出的．两种方法对有限维 Brusselator 模型依然有效．特别地，第一种证明方法还适用于无穷维 Brusselator 模型．有兴趣者参见我们的后续文章．

§3. 修正的模型

本节我们要证明定理 1.2. 将修正模型的生成元算子仍记为 Ω, 它满足：

$$\Omega G(m,n)=\sum_{(m',n')\ne(m,n)}\widetilde{q}(m,n;m',n')(G(m',n')-G(m,n)),\qquad (m,n)\in\mathbf{Z}_+^2.$$

为证明强遍历，由文献 [2] 知，只需证明方程

$$\Omega G(m,n)\le -1,\qquad (m,n)\notin H \tag{3.1}$$

有一有界非负解，其中 H 为一有限集．下面直接来构造这个解．

令

$$g_1(m) := \frac{\lambda_1 a}{m(m+1)} + \frac{\lambda_3(m-1)}{m+1} - \frac{\lambda_2 b + \lambda_4}{m-1}, \qquad m > 1,$$
$$g_2(m) := \frac{\lambda_4 k m}{m-1} - \frac{\lambda_1 a}{m(m+1)} - \frac{\lambda_2 b(2m-1)}{m-1}, \qquad m > 1.$$

显然，$\lim\limits_{m\to\infty} g_1(m) = \lambda_3$ 且 $\lim\limits_{m\to\infty} g_2(m) = \lambda_4 k - 2\lambda_2 b$. 因此，存在 $m_0 \in [2,\infty)$ 使得当 $m \geq m_0$ 时，$g_1(m) \geq \lambda_3/2$ 且 $g_2(m) \geq \lambda_4 k/2 - \lambda_2 b$. 定义

$$G(m,n) = \begin{cases} 0; & \text{当 } (m,n) = (0,0); \\ C^* + C + 1/(\lambda_1 a), & \text{当 } (m,n) = (0,n),\ n \neq 0; \\ C^* - C/m, & \text{当 } (m,n) = (m,0),\ m \neq 0; \\ C^* + C/m, & \text{当 } m \neq 0,\ n \neq 0, \end{cases}$$

其中常数 C^* 和 C 满足

$$C^* > C \geq 2\max\left\{\frac{\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_4}{\lambda_1^2 a^2}, \frac{1}{\lambda_3}, \frac{1}{\lambda_4 k - 2\lambda_2 b}\right\}.$$

取定 $n_0 \geq 6(\lambda_2 b + \lambda_4 + C^{-1})/\lambda_3$. 现在令 $H = \{(m,n) : 0 \leq m < m_0,\ 0 \leq n < n_0\}$. 显然，$0 \leq G \leq C^* + C + 1/(\lambda_1 a)$, 所以 G 是有界的. 我们来验证 G 是 (3.1) 的解.

(a) 对 $(m,n) = (0,n)$ $(n \neq 0)$, 有

$$\Omega G(0,n) = \lambda_1 a(G(1,n) - G(0,n)) = -1.$$

(b) 对 $(m,n) = (1,n)$ $(n \neq 0)$, 有

$$\begin{aligned} \Omega G(1,n) &= \lambda_1 a(G(2,n) - G(1,n)) + \lambda_2 b(G(0,n+1) - G(1,n)) + \lambda_4(G(0,n) - G(1,n)) \\ &= -\frac{\lambda_1 a C}{2} + \frac{\lambda_2 b + \lambda_4}{\lambda_1 a} \leq -1 \iff \frac{\lambda_1 a C}{2} \geq 1 + \frac{\lambda_2 b + \lambda_4}{\lambda_1 a}. \end{aligned}$$

(c) 对满足 $2 \leq m < m_0$, $n \geq n_0$ 的 (m,n), 有

$$\begin{aligned} \Omega G(m,n) &= \lambda_1 a(G(m+1,n) - G(m,n)) + \lambda_2 b m(G(m-1,n+1) - G(m,n)) \\ &\quad + \lambda_3 m(m-1)n2^{-1}(G(m+1,n-1) - G(m,n)) + \lambda_4 m(G(m-1,n) - G(m,n)) \\ &= -\frac{\lambda_1 a C}{m(m+1)} - \frac{\lambda_3(m-1)nC}{2(m+1)} + \frac{(\lambda_2 b + \lambda_4)C}{m-1} \leq -1 \\ &\iff \frac{\lambda_1 a}{m(m+1)} + \frac{\lambda_3(m-1)n}{2(m+1)} - \frac{\lambda_2 b + \lambda_4}{m-1} \geq C^{-1} \\ &\Longleftarrow \frac{\lambda_3 n}{6} - (\lambda_2 b + \lambda_4) \geq C^{-1} \Longleftarrow n \geq \frac{6(\lambda_2 b + \lambda_4 + C^{-1})}{\lambda_3}. \end{aligned}$$

(d) 对满足 $m \geq m_0$, $n \geq 2$ 的 (m,n), 有

$$\begin{aligned} \Omega G(m,n) &= -\frac{\lambda_1 a C}{m(m+1)} - \frac{\lambda_3(m-1)nC}{2(m+1)} + \frac{(\lambda_2 b + \lambda_4)C}{m-1} \leq -1 \\ &\iff \frac{\lambda_1 a}{m(m+1)} + \frac{\lambda_3(m-1)n}{2(m+1)} - \frac{\lambda_2 b + \lambda_4}{m-1} \geq C^{-1} \\ &\Longleftarrow g_1(m) \geq C^{-1} \Longleftarrow \lambda_3/2 \geq C^{-1}. \end{aligned}$$

(e) 对满足 $m \ge m_0$ 的 $(m,1)$, 有

$$\begin{aligned}\Omega G(m,1) &= \lambda_1 a(G(m+1,1)-G(m,1)) + \lambda_2 bm(G(m-1,2)-G(m,1)) \\ &\quad +\lambda_3 m(m-1)2^{-1}(G(m+1,0)-G(m,1)) + \lambda_4 m(G(m-1,1)-G(m,1)) \\ &= -\frac{\lambda_1 aC}{m(m+1)} - \frac{\lambda_3(m-1)(2m+1)C}{2(m+1)} + \frac{(\lambda_2 b+\lambda_4)C}{m-1} \le -1 \\ &\Longleftrightarrow \frac{\lambda_1 a}{m(m+1)} + \frac{\lambda_3(m-1)(2m+1)}{2(m+1)} - \frac{\lambda_2 b+\lambda_4}{m-1} \ge C^{-1} \\ &\Longleftarrow g_1(m) \ge C^{-1} \Longleftarrow \lambda_3/2 \ge C^{-1}.\end{aligned}$$

(f) 对满足 $m \ge m_0$ 的 $(m,0)$, 则有

$$\begin{aligned}\Omega G(m,0) &= \lambda_1 a(G(m+1,0)-G(m,0)) + \lambda_2 bm(G(m-1,1)-G(m,0)) \\ &\quad +\lambda_4 km^2(G(m-1,0)-G(m,0)) \\ &= \frac{\lambda_1 aC}{m(m+1)} + \frac{\lambda_2 b(2m-1)C}{m-1} - \frac{\lambda_4 mC}{m-1} \le -1 \\ &\Longleftrightarrow g_2(m) \ge C^{-1} \Longleftarrow \lambda_4 k/2 - \lambda_2 b \ge C^{-1}.\end{aligned}$$

综合以上，我们知道 G 是 (3.1) 的非负有界解．因此，修正的模型是强遍历的．　#

§4.　一类扩展的分支过程

文献 [15] 介绍并研究了一类扩展的连续时间分支过程的唯一性，灭绝，常返性及正常返性，该过程的 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$ 为：

$$q_{ij} = \begin{cases} q_{0j}, & \text{当 } j > i = 0; \\ -q_0, & \text{当 } j = i = 0; \\ r_i p_0, & \text{当 } j = i-1,\ i \ge 1; \\ r_i p_{k+1}, & \text{当 } j = i+k,\ i,k \ge 1; \\ -r_i(1-p_1), & \text{当 } j = i \ge 1; \\ 0, & \text{其它的 } i,j \in \mathbf{Z}_+; \end{cases} \tag{4.1}$$

其中 $r_i > 0\ \ (i \ge 1)$, $0 < q_0 = \sum\limits_{j=1}^{\infty} q_{0j} < \infty$, $(p_j : j \in \mathbf{Z}_+)$ 是一概率分布且满足 $p_0 + p_1 < 1$ 即 $\sum\limits_{j=2}^{\infty} p_j > 0$ (否则为平凡情形). 约定 $q_{0,-1} = 0$. 定义 $M_1 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} kp_k$.

基于文献 [15] 的比较想法，文献 [7] 给出了此类过程强遍历的充分条件．在这一节，我们用前面介绍的耦合方法，给出此类过程强遍历的一个必要条件．

定理 4.1　设 (4.1) 给出的 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$ 是不可约的．假定 $M_1 \le 1$. 若该过程强遍历，则当 $p_0 = 1-p_0-p_1$ 时，有 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} i/r_i < \infty$; 当 $p_0 > 1-p_0-p_1$ 时，有 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} 1/r_i < \infty$.

进一步，当 $M_1=1$ 且 $p_0=1-p_0-p_1$ 时，则该过程强遍历当且仅当 $\sum_{i=1}^{\infty} i/r_i<\infty$; 当 $M_1<1$ (此时必有 $p_0>1-p_0-p_1$) 且 r_i 关于 i 单调增时，则该过程强遍历当且仅当 $\sum_{i=1}^{\infty} 1/r_i<\infty$. 特别地，当 $M_1<1$ 且 $r_i=i^\theta$ $(\theta>0)$ 时，该过程强遍历当且仅当 $\theta>1$.

证明: 下面对前一部分结论给出两种证明.

类似于第二节，构造 $\mathbf{Z}_+$ 上一个生灭过程 $(Y(t))_{t\geq 0}$ 的 Q 矩阵 $\widetilde{Q}=(\widetilde{q}_{ij})$ 为:

$$b_0=q_0,\qquad b_i=r_i(1-p_0-p_1),\qquad a_i=r_ip_0,\qquad i\geq 1. \tag{4.2}$$

令 $\Gamma=\sum_{k=1}^{\infty} kp_{k+1}$. 容易验证 $\Gamma=M_1+p_0-1$. 因此，由 $M_1\leq 1$ 知,

$$p_0\geq\Gamma\geq\sum_{k=1}^{\infty} p_{k+1}=1-p_0-p_1>0.$$

(a) 一方面，当 $p_0=1-p_0-p_1$ 时，则 $a_i=b_i$ $(i\geq 1)$. 当 $p_0>1-p_0-p_1$ 时，则 $a_i=\lambda b_i$ $(i\geq 1)$, 其中 $\lambda=p_0/(1-p_0-p_1)>1$. 由文献 [2] 易知，该生灭过程是正则的. 定义 $\tilde{\tau}=\inf\{t\geq 0: Y(t)=0\}$.

另一方面，在定理的条件下，该分支过程唯一且常返，因此 Q 矩阵 (4.1) 是正则的. 记该过程为 $(X(t))_{t\geq 0}$. 定义 $\tau=\inf\{t\geq 0: X(t)=0\}$. 记 $E=\mathbf{Z}_+\times\mathbf{Z}_+$. 由于这两个边缘 Q 矩阵是正则的，因此，其耦合 Q 矩阵 $\overline{Q}=(q(i,m;j,n):(i,m),(j,n)\in E)$ 是全稳定，保守且正则. 我们在 E 上对 Q 矩阵 (4.1) 和 (4.2) 作耦合如下:

$$q(i,m;j,n)=\begin{cases} q_{i,i-1}\wedge\widetilde{q}_{m,m-1}, & \text{当 } (j,n)=(i-1,m-1);\\ (q_{i,i-1}-\widetilde{q}_{m,m-1})^+, & \text{当 } (j,n)=(i-1,m);\\ (\widetilde{q}_{m,m-1}-q_{i,i-1})^+, & \text{当 } (j,n)=(i,m-1);\\ q_{i,i+k}, & \text{当 } (j,n)=(i+k,m),\ k\geq 1,\ i\neq m;\\ \widetilde{q}_{m,m+1}, & \text{当 } (j,n)=(i,m+1),\ i\neq m;\\ q_{i,i+k}, & \text{当 } (j,n)=(i+k,m+1),\ k\geq 1,\ i=m;\\ 0, & \text{其它的 } (j,n)\neq(i,m), \end{cases} \tag{4.3}$$

而且 $q(i,m)=\sum_{(j,n)\neq(i,m)} q(i,m;j,n)$, 其中 $(i,m)\in E$. 容易验证，所构造的 Q 矩阵 (4.3) 满足边缘条件

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} q(i,m;j,n)=q_{ij}, & j\neq i;\\ \sum_{j=0}^{\infty} q(i,m;j,n)=\widetilde{q}_{mn}, & n\neq m. \end{cases}$$

因此，(4.3) 是耦合 Q 矩阵. 再令 $F:=\{(i,m)\in E: i\geq m\}$. 我们来验证 (4.3) 满足

$$q(i,m;F^c):=\sum_{(j,n):j<n} q(i,m;j,n)=0,\qquad (i,m)\in F. \tag{4.4}$$

事实上，由于 (4.2) 是生灭矩阵，从 (4.3) 容易看出只需验证 $(q_{i,i-1}-\widetilde{q}_{i,i-1})^+=0$. 而由 (4.2) 知 $\widetilde{q}_{i,i-1}=r_ip_0=q_{i,i-1}$, 所以，(4.4) 成立，即所构造的耦合是保序耦合．记相应的耦合 Q 过程 $(Z(t))_{t\geq 0}=(X(t),Y(t))_{t\geq 0}$ 的转移概率函数为 $\mathsf{P}(t)$. 则由 [2, 定理 5.26] 知，(4.4) 等价于

$$\mathsf{P}(t;i,m;F)=1,\qquad t\geq 0,\ (i,m)\in F.$$

即

$$\mathsf{P}^{(i,m)}\{X(t)\geq Y(t)\}=1,\qquad t\geq 0,\ (i,m)\in F.$$

进而，由轨道的右连续性得出 $\mathsf{P}^{(i,m)}\{X(t)\geq Y(t),t\geq 0\}=1\quad((i,m)\in F)$. 再由此推出 $\mathsf{P}^{(i,i)}\{\tau\geq\widetilde{\tau}\}=1$. 所以，$\mathsf{E}_i\tau\geq\mathsf{E}_i\widetilde{\tau}\ \ (i\in\mathbf{Z}_+)$. 再由 $(X(t))_{t\geq 0}$ 强遍历及文献 [2] 的定理 4.44, 立刻有 $\sup\limits_{i\geq 0}\mathsf{E}_i\widetilde{\tau}\leq\sup\limits_{i\geq 0}\mathsf{E}_i\tau<\infty$. 因此，由文献 [2] 的定理 4.44 知，生灭过程 $(Y(t))_{t\geq 0}$ 是强遍历的．最后由文献 [7] 的例 2.6, 可推出定理的前一部分结论．

(b) 注意到 Q 矩阵 (4.2) 和 (4.1) 是可比的，则由文献 [2, 16] 可知，过程 $(Y(t))_{t\geq 0}$ 和 $(X(t))_{t\geq 0}$ 是随机可比的．因此，对一切单调增函数 g 和 $i\geq 0$, 有

$$\widetilde{\Omega}g(i):=b_i(g_{i+1}-g_i)+a_i(g_{i-1}-g_i)\leq\Omega g(i):=\sum_{k=1}^{\infty}q_{i,i+k}(g_{i+k}-g_i)+q_{i,i-1}(g_{i-1}-g_i).\qquad(4.5)$$

由于 $(X(t))_{t\geq 0}$ 是单死过程，显然，$y_i=\mathsf{E}_i\tau$ 是单调增函数．而 (y_i) 是以下方程的最小非负解 (实际上，使得等号成立): $\Omega y(i)\leq -1,\ i\geq 1$. 而由 $(X(t))_{t\geq 0}$ 强遍历知，(y_i) 有界．结合以上及 (4.5) 得出，(y_i) 也是方程 $\widetilde{\Omega}y(i)\leq -1\ \ (i\geq 1)$ 的非负有界解．因此，由文献 [2] 的定理 4.45 知，生灭过程 $(Y(t))_{t\geq 0}$ 是强遍历的．故定理的前一部分结论立刻由文献 [7] 推出．

定理的后一部分结论由文献 [7] 的定理 1.2 立刻得出．随便提一下，当 $M_1=1$ 且 $p_0=1-p_0-p_1$ 时，可以推出 $p_k=0\ \ (k\geq 3)$ 即 $1-p_0-p_1=p_2=p_0$. #

注 4.1 最近，文献 [17] 证明了：若 (4.1) 决定的分支过程强遍历，则 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}1/r_i<\infty$. 故所得结论与我们的相同，但方法不同．因为 [17] 证明了更一般的结论：若单死过程 (即 Q 矩阵为单死 Q 矩阵：$q_{i,i-1}>0,\ i\geq 1;\ q_{ij}=0,\ 0\leq j\leq i-2$) 强遍历，则 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}1/q_i<\infty$. 实际上，我们可如下证明之．注意到，由于是单死速率，从 i 出发要到达 0, 必先到达 $i-1$, 所以此时有 $\sigma_0\geq\sigma_{i-1}$. 故由强马氏性，容易得到

$$\mathsf{E}_i\sigma_0=\mathsf{E}_i\sigma_{i-1}+\mathsf{E}_{i-1}\sigma_0=\cdots=\sum_{k=1}^{i}\mathsf{E}_k\sigma_{k-1}\geq\sum_{k=1}^{i}\mathsf{E}_k\eta_1=\sum_{k=1}^{i}\frac{1}{q_k}.$$

再由强遍历得出 $\infty>\sup\limits_{i\geq 1}\mathsf{E}_i\sigma_0\geq\sum\limits_{k=1}^{\infty}1/q_k$.

感谢 感谢在本文的完成过程中与陈木法和王凤雨教授及毛永华副教授进行的有益讨论．

参 考 文 献

[1] 陈木法，*跳过程与粒子系统*, 北京师范大学出版社，北京，1986.

[2] Chen, M.F., *From Markov Chains to Non-Equilibrium Particle Systems*, World Scientific, Singapore, 1992.

[3] 严士健，李占柄，非平衡系统的概率模型及 Master 方程的建立， 物理学报, **29**(1980), 139–152.

[4] Yan, S.J. and Chen, M.F., Multidimensional Q-processes, *Chinese Ann. Math.*, **7B**(1986), 90–110.

[5] 韩东，一维 "Brusselator" 模型的遍历性， 新疆大学学报, **8**(1991), 37–40.

[6] 陈金文，有限维 Brusselator 模型的正常返性， 数学物理学报, **15**(1995), 121–125.

[7] Zhang, Y.H., Strong ergodicity for single-birth processes, *J. Appl. Prob.*, **38**(2001), 270–277.

[8] 张汉君，林祥，侯振挺，标准转移函数的多项式一致收敛性， 数学年刊, **21A**(2000), 351–356.

[9] Chen, M.F., Explicit bounds of the first eigenvalue, *Sci. in China (A)*, **43**(2000), 1051–1059.

[10] Chen, M.F., Explicit criteria for several types of ergodicity, *Chinese J. Appl. Stat.*, **17**(2001), 113–120.

[11] Chen, M.F., Coupling for jump processes, *Acta. Math. Sinica, New Series*, **2(2)**(1986), 123–136.

[12] Chen, M.F., Optimal Markovian couplings and applications, *Technical Report Series of the Laboratory for Research in Statistics and Probability*, No. 216, Carleton Univ., Univ. of Ottawa, 1993.

[13] 张余辉，耦合跳过程的保守性， 北京师范大学学报, **30(3)**(1994), 305–307.

[14] 张余辉，一维马氏链保序耦合的构造， 应用概率统计, **12(4)**(1996), 376–382.

[15] Chen, R.R., An extended class of time-continuous branching processes, *J. Appl. Prob.*, **34**(1997), 14–23.

[16] Zhang, Y.H., Sufficient and necessary conditions for stochastic comparability of jump processes, *Acta Math. Sin.*, **16**(2000), 99–102.

[17] 张唯一，路方法与遍历性，北京师范大学硕士学位论文， 2003.

One-Dimensional Brusselator Model

WU BO ZHANG YUHUI

(*Department of Mathematics, Beijing Normal University, Beijing, 100875*)

In the paper, it is proven that the Q-process corresponding to one-dimensional Brusselator model is not strongly ergodic by two different methods. Meanwhile, for a one-dimensional modified Brusselator model, the strong ergodicity of the corresponding Q-process is deduced. Applying the ideas for an extended class of continuous-time branching processes, one necessary condition is obtained for the strong ergodicity of the processes.