# 单生过程击中时与平稳分布*

张余辉
(北京师范大学数学系, 100875, 北京∥35 岁, 男, 副教授)

摘要 给出了单生过程首中时、击中时一阶矩的显式表达, 由此得到了单生过程平稳分布的显式表达, 并计算了 3 个具体例子的平稳分布.

关键词 单生过程; 首中时; 击中时; 平稳分布
分类号 O 211.6

本文是文献[1]工作的继续, 仍考虑不可约的全稳定且保守的单生过程 $Q$ 矩阵, 即对所有 $i \geqslant 0$ 和 $j \geqslant 2$ 满足: $q_{i,i+1} > 0$, $q_{i,i+j} = 0$, 且对一切 $i \geqslant 0$ 有 $q_i = -q_{ii} = \sum_{j \neq i} q_{ij} < \infty$.

对所有 $0 \leqslant k < n$, 定义 $q_n^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} q_{nj}$, 以及

$$m_0 = \frac{1}{q_{01}}, \quad m_n = \frac{1}{q_{n,n+1}}\Big(1 + \sum_{k=0}^{n-1} q_n^{(k)} m_k\Big), \quad n \geqslant 1,$$

$$F_n^{(n)} = 1, \quad F_n^{(i)} = \frac{1}{q_{n,n+1}} \sum_{k=i}^{n-1} q_n^{(k)} F_k^{(i)}, \quad 0 \leqslant i < n,$$

$$d_0 = 0, \quad d_n = \frac{1}{q_{n,n+1}}\Big(1 + \sum_{k=0}^{n-1} q_n^{(k)} d_k\Big), \quad n \geqslant 1.$$

由文献[2-5]知道, 这 3 组记号用于刻画单生过程的唯一性、常返性、遍历性和强遍历性. 实际上, 根据我们的研究, 它们也可用于单生过程指数遍历的研究. 这些记号之间有如下关系:

$$m_n = q_{01}^{-1} F_n^{(0)} + d_n, \quad n \geqslant 0. \tag{1}$$

令 $(X(t))_{t \geqslant 0}$ 为相应的单生过程. 第一次跳时刻 $\eta_1 = \inf\{t > 0: X(t) \neq X(0)\}$. 定义 $\sigma_i = \inf\{t \geqslant \eta_1: X(t) = i\}$ (称为 $i$ 击中时). 定义 $\tau_i = \inf\{t > 0: X(t) = i\}$ (称为 $i$ 的首中时). 显然, 若出发点不是 $i$, 则 $\sigma_i = \tau_i$.

现在任意给定 $i_0 \geqslant 0$. 考虑 $i_0$ 的首中时一阶矩: $u_i = E_i \tau_{i_0}$ $(i \neq i_0)$. 文献[1]给出了以下的公式:

$$F_i^{(j)} = \sum_{k=j+1}^{i} \frac{F_i^{(k)} q_k^{(j)}}{q_{k,k+1}}, \quad i > j \geqslant 0; \quad d_i = \sum_{k=1}^{i} \frac{F_i^{(k)}}{q_{k,k+1}}, \quad i \geqslant 1. \tag{2}$$

实际上, 由式(1)和(2)还可以得出 $m_i = \sum_{k=0}^{i} F_i^{(k)} / q_{k,k+1}$ $(i \geqslant 0)$. 现在令

$$c_k = \sup_{i > k} \frac{\sum_{j=k}^{i-1} m_j}{\sum_{j=k}^{i-1} F_j^{(k)}} = \sup_{i \geqslant k} \frac{\sum_{j=k}^{i} m_j}{\sum_{j=k}^{i} F_j^{(k)}}. \tag{3}$$

* 国家"九七三"计划资助项目; 国家自然科学基金资助项目(10121101, 10101003); 教育部博士点基金资助项目
收稿日期: 2003-04-24

显然 $c_k \geqslant m_k$ 且 $c_0 = q_{01}^{-1} + d$, 其中 $d = \sup_{i \geqslant 0} \frac{\sum_{j=0}^{i} d_j}{\sum_{j=0}^{i} F_j^{(0)}}$ 是用于判断遍历性的[2]. 下面是关于首中时的一阶矩的结果.

**定理 1** 单生过程的 $i_0$ 首中时的一阶矩可由如下表达式给出:

$$E_i \tau_{i_0} = \sum_{j=i}^{i_0 - 1} m_j, \quad i < i_0; \tag{4}$$

$$E_i \tau_{i_0} = \sum_{j=i_0}^{i-1} (F_j^{(i_0)} c_{i_0} - m_j), \quad i \geqslant i_0 + 1. \tag{5}$$

证 由文献[6]归纳得知, $(u_i)$ 是下列方程组的最小非负解:

$$x_{i_0} = 0, \quad x_i \geqslant \sum_{k \neq i} \frac{q_{ik}}{q_i} x_k + \frac{1}{q_i}, \quad i \neq i_0, \tag{6}$$

而且 $(u_i)$ 使上述方程组等号成立. 将等式(6)变形为

$$x_{i_0} = 0, \quad q_{i, i+1}(x_{i+1} - x_i) = \sum_{k=0}^{i-1} q_{ik}(x_i - x_k) - 1, \quad i \neq i_0,$$

则

$$x_{i+1} - x_i = \frac{1}{q_{i, i+1}} \left( \sum_{j=0}^{i-1} q_i^{(j)} (x_{j+1} - x_j) - 1 \right), \quad i \neq i_0. \tag{7}$$

一方面, 同文献[1]的式(10)之证明, 从式(7)可立刻得到

$$x_{i+1} - x_i = F_i^{(0)} (x_1 - x_0) - d_i, \quad i < i_0. \tag{8}$$

另一方面, 借助文献[1]的证明方法, 当 $i > i_0$ 时, 由式(2)和(7)及(8), 我们有:

$$\begin{aligned}
x_{i+1} - x_i = & \sum_{j=0}^{i-2} \frac{F_i^{(i)} q_i^{(j)}}{q_{i, i+1}} (x_{j+1} - x_j) + F_i^{(i-1)} (x_i - x_{i-1}) - \frac{F_i^{(i)}}{q_{i, i+1}} = \\
& \sum_{j=0}^{i-2} \sum_{k=i-1}^{i} \frac{F_i^{(k)} q_k^{(j)}}{q_{k, k+1}} (x_{j+1} - x_j) - \sum_{k=i-1}^{i} \frac{F_i^{(k)}}{q_{k, k+1}} = \cdots = \\
& \sum_{j=0}^{i_0} \sum_{k=i_0+1}^{i} \frac{F_i^{(k)} q_k^{(j)}}{q_{k, k+1}} (x_{j+1} - x_j) - \sum_{k=i_0+1}^{i} \frac{F_i^{(k)}}{q_{k, k+1}} = \\
& \sum_{j=0}^{i_0-1} \sum_{k=i_0+1}^{i} \frac{F_i^{(k)} q_k^{(j)}}{q_{k, k+1}} (x_{j+1} - x_j) - \\
& \sum_{k=i_0+1}^{i} \frac{F_i^{(k)}}{q_{k, k+1}} + \sum_{k=i_0+1}^{i} \frac{F_i^{(k)} q_k^{(i_0)}}{q_{k, k+1}} (x_{i_0+1} - x_{i_0}) = \\
& \sum_{j=0}^{i_0-1} \sum_{k=i_0}^{i} \frac{F_i^{(k)} q_k^{(j)}}{q_{k, k+1}} (x_{j+1} - x_j) - \sum_{k=i_0}^{i} \frac{F_i^{(k)}}{q_{k, k+1}} - \\
& \sum_{j=0}^{i_0-1} \frac{F_i^{(i_0)} q_{i_0}^{(j)}}{q_{i_0, i_0+1}} (x_{j+1} - x_j) + \frac{F_i^{(i_0)}}{q_{i_0, i_0+1}} + F_i^{(i_0)} x_{i_0+1} = \cdots = \\
& \sum_{k=1}^{i} \frac{F_i^{(k)} q_k^{(0)}}{q_{k, k+1}} (x_1 - x_0) - \sum_{k=1}^{i} \frac{F_i^{(k)}}{q_{k, k+1}} -
\end{aligned}$$

$$\frac{F_i^{(i_0)}}{q_{i_0 i_0+1}}\left(\sum_{j=0}^{i_0-1} q_{i_0}^{(j)}\left(F_j^{(0)}(x_1-x_0)-d_j\right)-1\right)+F_i^{(i_0)}x_{i_0+1}=$$
$$-\left(F_i^{(0)}(x_0-x_1)+d_i\right)+F_i^{(i_0)}\left(F_{i_0}^{(0)}(x_0-x_1)+d_{i_0}\right)+F_i^{(i_0)}x_{i_0+1}. \qquad (9)$$

事实上, 对所有的 $i \geqslant i_0$, 式(9) 皆成立.

注意到, 若在式(6) 中取定 $x_i = u_i\ (0 \leqslant i < i_0)$, 则由文献[2]的定理 2. 3(局部化定理) 知, $(u_i, i > i_0)$是方程组

$$x_{i_0} = 0, \quad x_i \geqslant \sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{q_i}x_k + \frac{1}{q_i}, \quad i > i_0 \qquad (10)$$

的最小非负解. 而由文献[7]知, $m_i = E_i\tau_{i+1}$, 此时, 对 $i < i_0$, 可直接证明

$$u_i = \sum_{j=i}^{i_0-1} m_j. \qquad (11)$$

实际上, 由 $u_0 - u_1 = q_{01}^{-1}$及式(1)和(8), 也可证明式(11). 再由式(9)、(11) 及(1)推出

$$x_{i+1} - x_i = -m_i + F_i^{(i_0)}(m_{i_0} + x_{i_0+1}), \quad i \geqslant i_0.$$

因此,

$$x_i = -\sum_{j=i_0}^{i-1} m_j + \sum_{j=i_0}^{i-1} F_j^{(i_0)}(m_{i_0} + x_{i_0+1}), \quad i > i_0. \qquad (12)$$

因为$(u_i, i > i_0)$是方程组(10)的非负解, 故由式(3)和(12)可知 $c_{i_0} - m_{i_0} \leqslant u_{i_0+1}$.

若令 $v_{i_0+1} = c_{i_0} - m_{i_0}$且 $v_i = \sum_{j=i_0}^{i-1}(F_j^{(i_0)}c_{i_0} - m_j)\ (i \geqslant i_0+2)$, 则可验证$(v_i, i > i_0)$是式(10) 的一非负解. 由$(u_i, i > i_0)$的最小性, 推出 $u_{i_0+1} \leqslant c_{i_0} - m_{i_0}$.

综合以上, 我们得出, $u_{i_0+1} = c_{i_0} - m_{i_0}$. 再由式(12)可验证, 前面所构造的解$(v_i, i > i_0)$正是$(u_i, i > i_0)$. 换而言之, $i_0$ 的首中时一阶矩的表达式是式(4)与(5).

**注 1**　由文献[1]或[7]知, $m_i = E_i\tau_{i+1}$且 $\sum_{j=k}^{i-1} m_j = E_k\tau_i$. 再由式(5), 可以看出

$$c_i = m_i + E_{i+1}\tau_i = E_i\tau_{i+1} + E_{i+1}\tau_i, \quad i \geqslant 0.$$

所以, $E_{i+1}\tau_i = c_i - m_i > 0$, 即 $c_i > m_i$, $i \geqslant 0$. 若 $c_k < \infty$, 由式(5)及上式推出

$$\sum_{j=k}^{i-1} F_j^{(k)} = \frac{E_k\tau_i + E_i\tau_k}{E_k\tau_{k+1} + E_{k+1}\tau_k}, \quad 0 \leqslant k < i.$$

结合式(3), 得出$\inf\limits_{i>k}\dfrac{E_i\tau_k}{E_k\tau_i} = 0$. 注意, $k = 0$时,

$$\sum_{j=0}^{i-1} F_j^{(0)} = \frac{E_0\tau_i + E_i\tau_0}{E_0\tau_1 + E_1\tau_0}, \quad i > 0,$$

所以, 由上式和式(1) 及 $E_0\tau_1 = 1/q_{01}$, 有

$$\sum_{j=0}^{i-1} d_j = \frac{E_1\tau_0 E_0\tau_i + E_i\tau_0 E_0\tau_1}{E_0\tau_1 + E_1\tau_0}, \quad i > 0.$$

当过程遍历时, 对一切 $i \neq j$ 有$E_i\tau_j < \infty$. 此时, 对任意 $i \geqslant 0$, 必然有 $c_i < \infty$.

**定理 2**　单生过程的 $i$ 击中时一阶矩为

$$E_i\sigma_i = q_{i,i+1}c_i/q_i, \quad i \geqslant 0.$$

进而,若单生过程是遍历的,则其平稳分布为

$$\pi_i = (q_{i,i+1}c_i)^{-1}, \quad i \geqslant 0.$$

证 由式(4)和(5)及 $m_n$ 的定义,有

$$\begin{aligned} E_i\sigma_i &= \frac{1}{q_i} + \sum_{k=0}^{i-1}\frac{q_{i,k}}{q_i}E_k\tau_i + \frac{q_{i,i+1}}{q_i}E_{i+1}\tau_i = \\ &\frac{1}{q_i} + \sum_{k=0}^{i-1}\frac{q_{i,k}}{q_i}\sum_{j=k}^{i-1}m_j + \frac{q_{i,i+1}}{q_i}(c_i - m_i) = \\ &\frac{q_{i,i+1}}{q_i}\left(\frac{1}{q_{i,i+1}}\left(1 + \sum_{j=0}^{i-1}m_j\sum_{k=0}^{j}q_{i,k}\right) + c_i - m_i\right) = \\ &\frac{q_{i,i+1}}{q_i}\left(\frac{1}{q_{i,i+1}}\left(1 + \sum_{j=0}^{i-1}q_i^{(j)}m_j\right) + c_i - m_i\right) = \frac{q_{i,i+1}c_i}{q_i}. \end{aligned}$$

所以得证前一结论. 再由 $\pi_i q_i E_i\sigma_i = 1$ 推出后一结论.

注 2 由定理 2,当单生过程遍历时,应该有 $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{q_{i,i+1}c_i} = 1$. 这个式子并不直观,遗憾的是尚不能用另外的办法直接证明它.

例 1 考虑单生过程的特例——生灭过程:生速 $b_i = q_{i,i+1} > 0\ (i \geqslant 0)$,死速 $a_i = q_{i,i-1} > 0\ (i \geqslant 1)$. 定义 $\mu_0 = 1$, $\mu_i = \frac{b_0 \cdots b_{i-1}}{a_1 \cdots a_i}\ (i \geqslant 1)$. 再令 $\mu = \sum_{i=0}^{\infty}\mu_i$. 生灭过程遍历等价于 $\mu < \infty$. 通过计算,得到 $c_i = \mu/\mu_i b_i$,再由定理 3,得到熟知的结果:平稳分布为 $\pi_i = \mu_i/\mu\ (i \geqslant 0)$.

例 2 令单生过程的 $Q$ 矩阵为:$q_{i,i+1} = 1\ (i \geqslant 0)$, $q_{10} = 1$ 且 $q_{i,i-2} = 1\ (i \geqslant 2)$,其他的 $q_{ij} = 0\ (i \neq j)$. 则 $F_k^{(k)} = F_{k+1}^{(k)} = 1$, $F_j^{(k)} = F_{j-1}^{(k)} + F_{j-2}^{(k)}\ (j \geqslant k+2)$. 因此,$\{F_j^{(k)}\}_{j=k}^{\infty}$ 是 Fibonacci 数列:

$$F_{k+n}^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{5}}[A^{n+1} - (-B)^{n+1}] =: F_n, \quad n \geqslant 0, k \geqslant 0,$$

其中 $A = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, $B = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 经过计算,得到 $m_j = \sum_{k=0}^{j}F_k\ (j \geqslant 0)$. 注意到 Fibonacci 数列有性质 $\sum_{k=0}^{n}F_k = F_{n+2} - F_1\ (n \geqslant 0)$,所以,$m_j = F_{j+2} - F_1\ (j \geqslant 0)$. 因此,

$$\frac{\sum_{j=k}^{i}m_j}{\sum_{j=k}^{i}F_j^{(k)}} = \frac{F_{i+4} - F_{k+3} - (i-k+1)F_1}{F_{i-k+2} - F_1} \to A^{k+2}, \quad i \to \infty.$$

同时,可以证明

$$\frac{\sum_{j=k}^{i}m_j}{\sum_{j=k}^{i}F_j^{(k)}} < A^{k+2}, \quad i \geqslant k.$$

综合以上及式(3),得到 $c_k = A^{k+2}$. 注意 $A \cdot B = 1$,进而,由定理 2 知,平稳分布为 $\pi_k = B^{k+2}\ (k \geqslant 0)$.

例 3 令单生过程的 $Q$ 矩阵为:$q_{i,i+1} = 1\ (i \geqslant 0)$ 且 $q_{i,0} = 1\ (i \geqslant 1)$,其他的 $q_{ij} = 0\ (i \neq j)$. 由文献[1]知,该过程是强遍历的. 经过计算,$F_k^{(k)} = 1$, $F_j^{(k)} = 2^{j-k-1}\ (j \geqslant k+1)$; $m_j = 2^j\ (j \geqslant 0)$. 因此,

$$\frac{\sum_{j=k}^{i} m_j}{\sum_{j=k}^{i} F_j^{(k)}} = 2^{k+1}(1-2^{k-i-1}) \uparrow 2^{k+1}, \quad i \to \infty.$$

所以得到 $c_k = 2^{k+1}$. 进而, 由定理 2 知, 平稳分布为 $\pi_k = 2^{-k-1} (k \geqslant 0)$.

作者曾与北京师范大学数学系陈木法院士、王凤雨教授及毛永华副教授进行了有益的讨论, 在此对他们给予的帮助表示衷心感谢.

# 参考文献

[1] 张余辉. 单生过程首中时的各阶矩[J]. 北京师范大学学报(自然科学版), 2003, 39(4): 430

[2] Chen Mufa. From Markov chains to non-equilibrium particle systems[M]. Singapore: World Scientific, 1992

[3] Chen Mufa. Single birth processes[J]. Chinese Ann Math, 1999, 20B: 77

[4] Chen Mufa. Explicit criteria for several types of ergodicity[J]. Chinese J Appl Stat, 2001, 17: 113

[5] Zhang Yuhui. Strong ergodicity for single-birth processes[J]. J Appl Prob, 2001, 38: 270

[6] 毛永华. 连续时间 Markov 链的遍历度[J]. 中国科学: A 辑, 2003, 33: 409

[7] Zhang Jiankang. On the generalized birth and death processes (I)[J]. Acta Math Sci, 1984, 4: 241

# THE HITTING TIME AND STATIONARY DISTRIBUTION FOR SINGLE BIRTH PROCESSES

Zhang Yuhui

(Department of Mathematics, Beijing Normal University, 100875, Beijing, China)

**Abstract** The explicit expressions are presented on the moment of the first-hitting time and the hitting time for single birth processes. Furthermore, the explicit expressions are obtained on the stationary distribution of single birth processes for the first time. At the end, the stationary distributions for three examples are computed in detail.

**Key words** single birth process; first-hitting time; hitting time; stationary distribution