中国科学 (A 辑)
第 33 卷 第 4 期 SCIENCE IN CHINA (Series A) 2003 年 7 月

半直线上第一Dirichlet特征值的对偶变分公式*

陈木法 张余辉 赵晓亮
(北京师范大学数学系, 北京 100875)

摘要 目标是建立半直线上二阶椭圆算子的第一 Dirichlet 特征值的对偶变分公式, 并给出该特征值的仅依赖于算子系数的显式估计. 还可处理相应的离散情形以及连续情形的高阶特征值问题.

关键词 第一 Dirichlet 特征值 变分公式 椭圆算子 生灭过程

Sturm-Liouville 特征值问题是分析学的一个经典课题. 有限区间上的第一 Dirichlet 特征值则是其最基本、最典型的问题. 关于此方向, 已有大量的文献 (例如见文献 [1] 第 5 章及所列文献). 作为经典理论的补充, 也作为文献 [2,3] 的继续, 这里给出了这种特征值的变分公式和显式估计. 文末还将处理高阶特征值问题. 以下分连续和离散两种情形讨论.

1 连续情形

考虑有限区间或半直线 $(p,q)(-\infty < p < q \leqslant +\infty)$ 上的微分算子 $L = a(x)d^2/dx^2 + b(x)d/dx$, $a(x)$ 处处为正 (当 $q=+\infty$ 时即 $\lim_{x\to+\infty} a(x) > 0$), 在边界 p 和 q 上施加 Dirichlet 条件 (为处理 $q=+\infty$ 的情形, 约定 $f(+\infty)=\lim_{x\to+\infty} f(x)$). 贯穿全文, 假定

$$\int_p^q \frac{e^{C(x)}}{a(x)}\,dx < \infty, \qquad \int_p^q e^{-C(x)}dx < \infty, \tag{1.0}$$

其中 $C(x)=\int_p^x b/a$. 从概率的观点看, 在前一条件下, 后一条件等价于非常返, 否则正常返, 此时无穷边界不起作用, 化成文献 [2] 已处理的情形. 关于条件 (1.0) 更详细的分析评注见注 1.7. 当 $q<\infty$ 且 a 连续时, 这两个条件都是平凡的. 考虑 L 的主特征值 λ_0, 其经典变分公式为 $\lambda_0 = \inf\{D(f): f\in C^1(p,q)\cap C[p,q], f(p)=f(q)=0, \pi(f^2)=1\}$, 此处 $D(f)=\int_p^q a(x)f'(x)^2\pi(dx)$, $\pi(dx)=(a(x)Z)^{-1}e^{C(x)}dx$, Z 为归一化常数即 (1.0) 的前一积分值, $\pi(g)=\int_p^q g(x)\pi(dx)$.

因为相应于 λ_0 的特征函数 g 只有一个驻点 (命题 1.3), 依照 g 的驻点将区间 (p,q) 分为两个子区间, 从而把 λ_0 的研究归结为子区间上、文献 [2,3] 已处理过的混合特征值问题. 详言之, 任意固定 $x_0\in(p,q)$, 分别考虑 (p,x_0) 和 (x_0,q) 上的微分算子 L, 前者在边界 p 和 x_0 上分别施加 Dirichlet 和 Neumann 条件, 后者在边界 x_0 和 q 上分别施加 Neumann 和 Dirichlet 条

2002-04-16 收稿, 2003-03-18 收修改稿
* 国家自然科学基金 (批准号: 10121101,10101003) 和国家重点基础研究发展规划及高等学校博士学科点专项科研基金资助项目

件. 在 $[p,x_0]$ 和 $[x_0,q]$ 上定义相应的 π 和 D, 分别记为 π_1,π_2 和 D_1,D_2, 即

$$\pi_1(dx)=\pi(dx\cap[p,x_0])/\pi[p,x_0],\qquad D_1(f)=\pi\big(af'^2I_{[p,x_0]}\big)/\pi[p,x_0],\quad f\in C^1(p,x_0),$$

$$\pi_2(dx)=\pi(dx\cap[x_0,q])/\pi[x_0,q],\qquad D_2(f)=\pi\big(af'^2I_{[x_0,q]}\big)/\pi[x_0,q],\quad f\in C^1(x_0,q),$$

其中 $\pi[s,t]=\int_s^t d\pi$. 此时, $[p,x_0]$ 和 $[x_0,q]$ 上的混合特征值分别为

$$\lambda_0[p,x_0]=\inf\{D_1(f):f\in C^1(p,x_0)\cap C[p,x_0],f(p)=0,\pi_1(f^2)=1\},$$

$$\lambda_0[x_0,q]=\inf\{D_2(f):f\in C^1(x_0,q)\cap C[x_0,q],f(q)=0,\pi_2(f^2)=1\}.$$

为陈述主要结果, 还需使用一些记号. 首先是分别定义在 $C[p,x_0]$ 和 $C[x_0,q]$ 上的两个 (双重积分) 算子

$$\varPi_1(f)(x)=\frac{1}{f(x)}\int_p^x dy\,e^{-C(y)}\int_y^{x_0}[fe^C/a](u)du,\quad x\in(p,x_0],$$

$$\varPi_2(f)(x)=\frac{1}{f(x)}\int_x^q dy\,e^{-C(y)}\int_{x_0}^{y}[fe^C/a](u)du,\quad x\in[x_0,q).$$

再定义

$$\mathcal{F}[p,x_0]=\{f\in C^1(p,x_0)\cap C[p,x_0]:f(p)=0,f'|_{(p,x_0)}>0\},$$

$$\xi_0'[p,x_0]=\inf_{f\in\mathcal{F}[p,x_0]}\sup_{x\in(p,x_0)}\varPi_1(f)(x)^{-1},\quad \xi_0''[p,x_0]=\sup_{f\in\mathcal{F}[p,x_0]}\inf_{x\in(p,x_0)}\varPi_1(f)(x)^{-1},$$

$$\mathcal{F}[x_0,q]=\{f\in C^1(x_0,q)\cap C[x_0,q]:f(q)=0,f'|_{(x_0,q)}<0\},$$

$$\xi_0'[x_0,q]=\inf_{f\in\mathcal{F}[x_0,q]}\sup_{x\in(x_0,q)}\varPi_2(f)(x)^{-1},\quad \xi_0''[x_0,q]=\sup_{f\in\mathcal{F}[x_0,q]}\inf_{x\in(x_0,q)}\varPi_2(f)(x)^{-1}.$$

与文献 [3] 的设计相同, ξ_0' 用于上界估计, 而 ξ_0'' 用于下界估计. 不同的是, 为保证可积性, 那里使用了比 $\mathcal{F}$ 更大的集合, 但有了条件 (1.0), 使用 $\mathcal{F}$ 已足够. 下述变分公式上、下界互为对偶: 交换 sup 和 inf, 可从一个得出另一个.

定理 1.1 关于 λ_0 的变分公式如下:

$$\begin{aligned}\inf_{x_0\in(p,q)}\big(\xi_0'[p,x_0]\vee\xi_0'[x_0,q]\big)&\geqslant\inf_{x_0\in(p,q)}\big(\lambda_0[p,x_0]\vee\lambda_0[x_0,q]\big)\geqslant\lambda_0\\&\geqslant\sup_{x_0\in(p,q)}\big(\lambda_0[p,x_0]\wedge\lambda_0[x_0,q]\big)\\&\geqslant\sup_{x_0\in(p,q)}\big(\xi_0''[p,x_0]\wedge\xi_0''[x_0,q]\big).\end{aligned}\tag{1.1}$$

若再设 a,b 在 $[p,q]$ 上连续, 则 (1.1) 式中诸不等式均可改为等式. 进一步地, 若 $[p,q]$ 为有限区间而 a 为连续函数, 则后一断言对于一切 Lebesgue 可测函数 b 成立.

证 共分 4 步.

(i) 下界估计. 任取 $f\in C^1(p,q)\cap C[p,q]$ 且 $f(p)=f(q)=0$, 再任意固定 $x_0\in(p,q)$, 则

$$\begin{aligned}D(f)&=\int_p^{x_0}[af'^2](x)\pi(dx)+\int_{x_0}^q[af'^2](x)\pi(dx)\\&\geqslant\lambda_0[p,x_0]\int_p^{x_0}f(x)^2\pi(dx)+\lambda_0[x_0,q]\int_{x_0}^q f(x)^2\pi(dx)\\&\geqslant\big(\lambda_0[p,x_0]\wedge\lambda_0[x_0,q]\big)\pi(f^2).\end{aligned}$$

由 f 和 x_0 的任意性得 $\lambda_0\geqslant\sup_{x_0\in(p,q)}\big(\lambda_0[p,x_0]\wedge\lambda_0[x_0,q]\big)$, 即 (1.1) 式的第 3 个不等式成立. 再由文献 [3] 定理 1.1 得证 (1.1) 式的第 4 个不等式.

(ii) 上界估计. 给定 $\varepsilon > 0$. 由定义，存在 $\tilde f \in C^1(p,x_0)\cap C[p,x_0]$, $\tilde f(p)=0$, $\pi_1(\tilde f^2)=1$, 使得 $D_1(\tilde f) < \lambda_0[p,x_0]+\varepsilon$. 如果必要，在 x_0 的充分小邻域内对 $\tilde f$ 作适当修改，可造出 $f \in C^1(p,x_0)\cap C[p,x_0]$ 满足 $f(p)=0$, $f'(x_0)=0$, $\pi_1(f^2)=1$ 且 $D_1(f)<\lambda_0[p,x_0]+\varepsilon$. 同理可取 $g\in C^1(x_0,q)\cap C[x_0,q]$ 满足 $g(q)=0$, $g'(x_0)=0$, $\pi_2(g^2)=1$ 且 $D_2(g)<\lambda_0[x_0,q]+\varepsilon$. 更进一步，还可设 $f(x_0)\neq 0$. 否则可对 f 作如下修正：因 $f\in C[p,x_0]$, 故 f 在 $[p,x_0]$ 上有最大值点 x_1 和最小值点 x_2. 不妨设 $|f(x_1)|\geqslant |f(x_2)|$, 则 $f(x_1)\neq 0$ (否则 $f=0$ 而与 $\pi_1(f^2)=1$ 矛盾). 令 $\bar f = fI_{[p,x_1)}+f(x_1)I_{[x_1,x_0]}$, 则 $\bar f\in C^1(p,x_0)\cap C[p,x_0]$ 且

$$\pi_1(\bar f^2)=\pi_1(f^2I_{[p,x_1)})+f(x_1)^2\pi_1[x_1,x_0]\geqslant \pi_1(f^2)=1,\quad D_1(\bar f)=\int_p^{x_1} af'^2d\pi_1\leqslant D_1(f).$$

再令 $\hat f=\pi_1(\bar f^2)^{-1/2}\bar f$, 则 $\hat f(p)=0, \hat f'(x_0)=0, \pi_1(\hat f^2)=1, \hat f(x_0)\neq 0$, 且 $D_1(\hat f)=\pi_1(\bar f^2)^{-1}D_1(\bar f)\leqslant D_1(f)<\lambda_0[p,x_0]+\varepsilon$, 因此当 $f(x_0)=0$ 时，可用 $\hat f$ 代替 f.

再令 $h=cfI_{[p,x_0]}+gI_{(x_0,q]}$, 其中 $c=g(x_0)/f(x_0)$, 则 $h\in C^1(p,q)\cap C[p,q], h(p)=h(q)=0$, 而且

$$\begin{aligned}\pi(ah'^2)&=c^2\int_p^{x_0}af'^2d\pi+\int_{x_0}^q ag'^2d\pi=c^2D_1(f)\pi[p,x_0]+D_2(g)\pi[x_0,q]\\&<c^2\big(\lambda_0[p,x_0]+\varepsilon\big)\pi[p,x_0]+\big(\lambda_0[x_0,q]+\varepsilon\big)\pi[x_0,q]\\&\leqslant\big(\lambda_0[p,x_0]\vee\lambda_0[x_0,q]+\varepsilon\big)\big(c^2\pi[p,x_0]+\pi[x_0,q]\big),\\ \pi(h^2)&=c^2\pi\big(f^2I_{[p,x_0]}\big)+\pi\big(g^2I_{(x_0,q]}\big)=c^2\pi_1(f^2)\pi[p,x_0]+\pi_2(g^2)\pi[x_0,q]\\&=c^2\pi[p,x_0]+\pi[x_0,q],\end{aligned}$$

因此 $\lambda_0<\lambda_0[p,x_0]\vee\lambda_0[x_0,q]+\varepsilon$, 由 ε 的任意性得 $\lambda_0\leqslant\lambda_0[p,x_0]\vee\lambda_0[x_0,q]$, 再由 x_0 的任意性得证 (1.1) 式的第 2 个不等式. 由文献 [3] 定理 1.1 可得 (1.1) 式的第 1 个不等式.

(iii) 当 a, b 在 $[p,q]$ 上连续时，为证明 (1.1) 式中的等号成立，需要证明下面的命题 1.3, 这是定理 1.1 的主要依据. 注意到文献 [4] 中 (6.1) 式和引理 6.3 依然成立. 为方便，将它们重述为如下的 (1.2) 式和引理 1.1:

$$(f'e^C)'=(af''+bf')e^C/a=(Lf)e^C/a. \tag{1.2}$$

引理 1.1　假定 $\lambda\geqslant 0$, 且 $f\in C^2[p,q]$ 满足方程 $Lf=-\lambda f$. 若存在 $\alpha,\beta: p\leqslant\alpha<\beta\leqslant q$, 使得在 $[\alpha,\beta]$ 上 $f=0$, 则 $f=0$.

命题 1.1　若方程 $Lf=-\lambda_0 f$ 有满足条件 $f\in C^2[p,q]$, $f(p)=f(q)=0$ 的非常数解 $f\geqslant 0$, 则 $\lambda_0>0$ 且 f 只有一个驻点.

证　(i) 先证 $\lambda_0>0$. 谬设 $\lambda_0=0$, 则 $\pi(af'^2)=-\int_p^q fLfd\pi=0$, 因 $a>0$, 故 $f'=0$, 由此及 $f(p)=f(q)=0$ 得 $f=0$, 因此 f 为常数 0 而与假设相悖.

(ii) 显然 f 存在驻点. 往证 f 在 (p,q) 上只有 1 个驻点. 否则，可设 x_1, x_2 为 (p,q) 上两个驻点， $x_1<x_2$, 由此将导出与 λ_0 的最小性矛盾.

(a) 先证此时 f 在 $[p,x_1]$ 上非常数. 否则在 $[p,x_1]$ 上 $f=-\lambda_0^{-1}Lf=0$, 由引理 1.1 推出 $f=0$.

(b) 再证 $f(x_1)\neq 0$. 否则令 $g=fI_{[p,x_1]}+f(x_1)I_{(x_1,q]}$, 结合 $f(x_1)=f'(x_1)=0$ 和 $a>0$, 由 f 是方程的解推出 $f''(x_1)=0$, 进而 $g\in C^2[p,q]$, $Lg=-\lambda_0 g$, 且在 $[x_1,q]$ 上 $g=0$. 由引理 1.1 知 $g=0$; 因此，在 $[p,x_1]$ 上 $f=0$, 再由引理 1.1 也导出 $f=0$.

(c) 类似可证 f 在 $[x_2,q]$ 上非常数且 $f(x_2)\neq 0$. 现在取 $h=cfI_{[p,x_1]}+f(x_2)I_{(x_1,x_2]}+fI_{(x_2,q]}$, 其中常数 $c=f(x_2)/f(x_1)$, 则 h 非常数且 $h\in C^1(p,q)\cap C[p,q]$, $h(p)=h(q)=0$. 由 (1.2) 式, 有

$$\begin{aligned}\pi(ah'^2)&=c^2\int_p^{x_1}af'^2d\pi+\int_{x_2}^q af'^2d\pi=-c^2\int_p^{x_1}fLfd\pi-\int_{x_2}^q fLfd\pi\\&=\lambda_0\Big(c^2\pi\big(f^2I_{[p,x_1]}\big)+\pi\big(f^2I_{(x_2,q]}\big)\Big)\\ \pi(h^2)&=c^2\pi\big(f^2I_{[p,x_1]}\big)+f(x_2)^2\pi[x_1,x_2]+\pi\big(f^2I_{(x_2,q]}\big),\end{aligned}$$

从而

$$\lambda_0\leqslant\frac{\pi(ah'^2)}{\pi(h^2)}=\frac{\lambda_0\Big(c^2\pi\big(f^2I_{[p,x_1]}\big)+\pi\big(f^2I_{(x_2,q]}\big)\Big)}{c^2\pi\big(f^2I_{[p,x_1]}\big)+f(x_2)^2\pi[x_1,x_2]+\pi\big(f^2I_{(x_2,q]}\big)}<\lambda_0,$$

导致矛盾. 证毕.

回到定理的证明. 设 a, b 连续且 $a>0$. 由 Sturm-Liouville 边值问题知, 特征方程 $Lf=-\lambda_0 f\,(f(p)=f(q)=0)$ 有非常数解 f. 由命题 1.1 知, $\lambda_0>0$ 且 f 只有 1 个驻点, 记为 x_0, 则 $f_1=fI_{[p,x_0]}\in\mathcal{F}[p,x_0]$, $f_2=fI_{[x_0,q]}\in\mathcal{F}[x_0,q]$. 由 $f'(x_0)=0$ 和 (1.2) 式得出 $-\int_x^{x_0}\lambda_0 fe^C/a=(f'e^C)|_x^{x_0}=-(f'e^C)(x)$, 于是 $\mathit{\Pi}_1(f_1)(x)=\lambda_0^{-1}\,(x\in(p,x_0))$ 且 $\mathit{\Pi}_2(f_2)(x)=\lambda_0^{-1}\,(x\in(x_0,q))$. 由文献 [3] 定理 1.1 知, $\xi_0'[p,x_0]=\lambda_0[p,x_0]=\xi_0''[p,x_0]$, 同理可得 $\xi_0'[x_0,q]=\lambda_0[x_0,q]=\xi_0''[x_0,q]$. 综合以上事实知, (1.1) 式中的 4 个等式都成立.

(iv) 要证明定理的最后一个结论, 需要以下命题:

命题 1.2 设 a,b 分别为有限区间 $[p,q]$ 上正连续函数和 Lebesgue 可测函数, 记 λ_0 为 a,b 所决定的第一特征值, 则存在连续函数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$, 使得 $a_n\to a$, $b_n\to b$, 而且对应的第一特征值 $\lambda_0^{(n)}\to\lambda_0\,(n\to\infty)$.

证 由条件知存在正常数 δ 和 N, 使得 $\delta\leqslant a\leqslant N$. 作光滑逼近. 为方便, 先将 a 和 C 延拓至全空间 $\mathbb{R}$: $\widetilde{C}(x)=C(x\vee p\wedge q)$, $\tilde{a}(x)=a(x\vee p\wedge q)$. 为简单计, 略去上标 "~". 如常, 使用光滑子

$$\eta(x)=\begin{cases}A\exp\big[-\big((q-p)^2/4-(x-(p+q)/2)^2\big)^{-1}\big], & 若\ |x-(p+q)/2|<1,\\ 0, & 若\ |x-(p+q)/2|\geqslant 1,\end{cases}$$

此处 A 为归一化常数: $\int_{\mathbb{R}}\eta(x)dx=1$. 再命 $\eta_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-1}\eta(x/\varepsilon)$, $C_\varepsilon=C*\eta_\varepsilon$, $a_\varepsilon=a*\eta_\varepsilon$(即 $C_\varepsilon(x)=\int_{\mathbb{R}}C(y)\eta_\varepsilon(x-y)dy$), 则 $C_\varepsilon\in C^\infty(\mathbb{R})$, $a_\varepsilon\in C^\infty(\mathbb{R})$, 而且当 $\varepsilon\downarrow 0$, 在紧集上一致地有

$$C_\varepsilon\to C,\quad a_\varepsilon\to a,\qquad \delta\leqslant a_\varepsilon\leqslant N. \tag{1.3}$$

由 (1.3) 式知, 存在序列 $\varepsilon(n)\to 0$, 使得当 $n\to\infty$ 时, 在 $[p,q]$ 上一致地有

$$C_{\varepsilon(n)}\to C,\quad a_{\varepsilon(n)}\to a. \tag{1.4}$$

其次, 命 $b_\varepsilon=a_\varepsilon C_\varepsilon'$, 则 a_ε, $b_\varepsilon\in C^\infty(\mathbb{R})$, $Z_\varepsilon=\int_p^q e^{C_\varepsilon}/a_\varepsilon\leqslant\int_p^q e^{C_\varepsilon}/\delta<\infty$. 由 (1.3) 式得到

$$\int_p^q\frac{f^2e^{C_{\varepsilon(n)}}}{a_{\varepsilon(n)}}\leqslant\frac{N}{\delta}\sup_{p\leqslant x\leqslant q}e^{C_{\varepsilon(n)}(x)-C(x)}\int_p^q\frac{f^2e^C}{a},$$

从而 $L^2(\pi)\subset L^2(\pi_{\varepsilon(n)})$, 同理可证 $L^2(\pi)\supset L^2(\pi_{\varepsilon(n)})$, 故 $L^2(\pi)=L^2(\pi_{\varepsilon(n)})$. 由 (1.3) 和 (1.4) 式及下面两式:

$$\inf_{p\leqslant x\leqslant q}e^{C_{\varepsilon(n)}(x)-C(x)}\frac{a(x)}{a_{\varepsilon(n)}}\leqslant\frac{\int_p^q f^2e^{C_{\varepsilon(n)}}/a_{\varepsilon(n)}}{\int_p^q f^2e^C/a}\leqslant\sup_{p\leqslant x\leqslant q}e^{C_{\varepsilon(n)}(x)-C(x)}\frac{a(x)}{a_{\varepsilon(n)}},$$

$$\inf_{p\leqslant x\leqslant q} e^{C_{\varepsilon(n)}(x)-C(x)} \leqslant \frac{\int_p^q f'^2 e^{C_{\varepsilon(n)}}}{\int_p^q f'^2 e^C} \leqslant \sup_{p\leqslant x\leqslant q} e^{C_{\varepsilon(n)}(x)-C(x)},$$

推出当 $n\to\infty$, 关于 f 一致地有

$$\frac{\int_p^q f^2 e^{C_{\varepsilon(n)}}/a_{\varepsilon(n)}}{\int_p^q f^2 e^C/a} \to 1, \quad \frac{\int_p^q f'^2 e^{C_{\varepsilon(n)}}}{\int_p^q f'^2 e^C} \to 1.$$

故当 $n\to\infty$, 关于 f 一致地有

$$\frac{D_{\varepsilon(n)}(f)}{\pi_{\varepsilon(n)}(f^2)}\Big/\frac{D(f)}{\pi(f^2)} = \frac{Z_{\varepsilon(n)}^{-1}\int_p^q f'^2 e^{C_{\varepsilon(n)}}}{Z_{\varepsilon(n)}^{-1}\int_p^q f^2 e^{C_{\varepsilon(n)}}/a_{\varepsilon(n)}}\Big/\frac{Z^{-1}\int_p^q f'^2 e^C}{Z^{-1}\int_p^q f^2 e^C/a} \to 1.$$

由此和 $\{a_{\varepsilon(n)}\}, \{b_{\varepsilon(n)}\}$ 为连续函数列，不难证明 $\lim_{n\to\infty}\lambda_0^{(n)} = \lambda_0$.

回到定理最后结论的证明. 设 a, b 分别为有限区间 $[p,q]$ 上正连续函数和 Lebesgue 可测函数. 由命题 1.2, 存在连续函数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$, 使得 $a_n\to a$, $b_n\to b$, 而且对应的第一特征值 $\lambda_0^{(n)}\to\lambda_0\,(n\to\infty)$. 定义相应的 $\mathit{\Pi}_i^{(n)}(f)$, $\xi_0'^{(n)}$ 和 $\xi_0''^{(n)}$. 由 a_n 和 b_n 的连续性知，相应的 (1.1) 式中等式均成立，即

$$\inf_{x_0\in(p,q)}\big(\xi_0'^{(n)}[p,x_0]\vee\xi_0'^{(n)}[x_0,q]\big) = \lambda_0^{(n)} = \sup_{x_0\in(p,q)}\big(\xi_0''^{(n)}[p,x_0]\wedge\xi_0''^{(n)}[x_0,q]\big). \tag{1.5}$$

利用 (1.3) 和 (1.4) 式及

$$\begin{aligned}\inf_{x\in(p,q)} e^{C(x)-C_n(x)}\frac{a_n(x)}{a(x)}\inf_{x\in(p,q)} e^{C(x)-C_n(x)} &\leqslant \frac{\mathit{\Pi}_i^{(n)}(f)(x)^{-1}}{\mathit{\Pi}_i(f)(x)^{-1}}\\ &\leqslant \sup_{x\in(p,q)} e^{C(x)-C_n(x)}\frac{a_n(x)}{a(x)}\sup_{x\in(p,q)} e^{C(x)-C_n(x)},\end{aligned}$$

得出当 $n\to\infty$ 时，关于 x, f 和 x_0 一致地有 $\frac{\mathit{\Pi}_i^{(n)}(f)(x)^{-1}}{\mathit{\Pi}_i(f)(x)^{-1}}\to 1(i=1,2)$. 由此及

$$\inf_{f\in\mathscr{F}[p,x_0]}\inf_{x\in(p,x_0)}\frac{\mathit{\Pi}_1^{(n)}(f)(x)^{-1}}{\mathit{\Pi}_1(f)(x)^{-1}} \leqslant \frac{\xi_0'^{(n)}[p,x_0]}{\xi_0'[p,x_0]} \leqslant \sup_{f\in\mathscr{F}[p,x_0]}\sup_{x\in(p,x_0)}\frac{\mathit{\Pi}_1^{(n)}(f)(x)^{-1}}{\mathit{\Pi}_1(f)(x)^{-1}},$$

$$\inf_{f\in\mathscr{F}[x_0,q]}\inf_{x\in(x_0,q)}\frac{\mathit{\Pi}_2^{(n)}(f)(x)^{-1}}{\mathit{\Pi}_2(f)(x)^{-1}} \leqslant \frac{\xi_0'^{(n)}[x_0,q]}{\xi_0'[x_0,q]} \leqslant \sup_{f\in\mathscr{F}[x_0,q]}\sup_{x\in(x_0,q)}\frac{\mathit{\Pi}_2^{(n)}(f)(x)^{-1}}{\mathit{\Pi}_2(f)(x)^{-1}},$$

知当 $n\to\infty$ 时，关于 x_0 一致地有 $\frac{\xi_0'^{(n)}[p,x_0]}{\xi_0'[p,x_0]}\to 1$, $\frac{\xi_0'^{(n)}[x_0,q]}{\xi_0'[x_0,q]}\to 1$. 再注意到

$$\begin{aligned}\inf_{x_0\in(p,q)}\left(\frac{\xi_0'^{(n)}[p,x_0]}{\xi_0'[p,x_0]}\wedge\frac{\xi_0'^{(n)}[x_0,q]}{\xi_0'[x_0,q]}\right) &\leqslant \frac{\inf_{x_0\in(p,q)}\big(\xi_0'^{(n)}[p,x_0]\vee\xi_0'^{(n)}[x_0,q]\big)}{\inf_{x_0\in(p,q)}\big(\xi_0'[p,x_0]\vee\xi_0'[x_0,q]\big)}\\ &\leqslant \sup_{x_0\in(p,q)}\left(\frac{\xi_0'^{(n)}[p,x_0]}{\xi_0'[p,x_0]}\vee\frac{\xi_0'^{(n)}[x_0,q]}{\xi_0'[x_0,q]}\right),\end{aligned}$$

综合以上事实导出当 $n\to\infty$ 时， $\inf_{x_0\in(p,q)}\big(\xi_0'^{(n)}[p,x_0]\vee\xi_0'^{(n)}[x_0,q]\big)\to\inf_{x_0\in(p,q)}\big(\xi_0'[p,x_0]\vee\xi_0'[x_0,q]\big)$. 类似可证 $\sup_{x_0\in(p,q)}\big(\xi_0''^{(n)}[p,x_0]\wedge\xi_0''^{(n)}[x_0,q]\big)\to\sup_{x_0\in(p,q)}\big(\xi_0''[p,x_0]\wedge\xi_0''[x_0,q]\big)$. 再由 (1.5) 式和 $\lambda_0^{(n)}\to\lambda_0$, 知 (1.1) 式中的等式依然成立. 证毕.

由以上分析和证明不难看出，文献 [2] 中使用的单重积分的变分公式和显式估计及文献 [3]

中的迭代方法，也都适用于目前的情形. 此处仅讨论 λ_0 的显式估计. 定义

$$Q_1(x)=\int_p^x e^{-C(y)}dy\int_x^c[e^C/a](u)du,\quad \delta_1(c)=\sup_{x\in(p,c)}Q_1(x),\quad \delta_1'(c)=2\sup_{x\in(p,c)}\int_p^x Q_1 d\nu_1^{(x)},$$

$$Q_2(x)=\int_x^q e^{-C(y)}dy\int_c^x[e^C/a](u)du,\quad \delta_2(c)=\sup_{x\in(c,q)}Q_2(x),\quad \delta_2'(c)=2\sup_{x\in(c,q)}\int_x^q Q_2 d\nu_2^{(x)},$$

其中 $\nu_1^{(x)}$ 和 $\nu_2^{(x)}$ 分别是 (p,x) 和 (x,q) 上密度为 $e^{-C(y)}/Z^{(x)}$ 的概率测度 ($Z^{(x)}$ 是归一化常数). 令 $f_1(x)=\sqrt{\int_p^x e^{-C(y)}dy}$, $f_2(x)=\sqrt{\int_x^q e^{-C(y)}dy}$. 将本节定义的 $\Pi_1(f)(x)$ 和 $\Pi_2(f)(x)$ 中的 x_0 以 c 代替. 再定义

$$\delta_1''(c)=\sup_{x\in(p,c)}\Pi_1(f_1)(x),\qquad \delta_2''(c)=\sup_{x\in(c,q)}\Pi_2(f_2)(x).$$

推论 1.1 关于 λ_0 有显式估计

$$\begin{aligned}\Big(\sup_{c\in(p,q)}\delta_1(c)\wedge\delta_2(c)\Big)^{-1}&\geqslant\Big(\sup_{c\in(p,q)}\delta_1'(c)\wedge\delta_2'(c)\Big)^{-1}\geqslant\lambda_0\geqslant\Big(\inf_{c\in(p,q)}\delta_1''(c)\vee\delta_2''(c)\Big)^{-1}\\&\geqslant\Big(4\inf_{c\in(p,q)}\delta_1(c)\vee\delta_2(c)\Big)^{-1},\end{aligned}\tag{1.6}$$

进而

$$\delta_1(c_0)^{-1}\geqslant\lambda_0\geqslant\big(4\delta_1(c_0)\big)^{-1},\tag{1.7}$$

其中 c_0 是方程 $\delta_1(c)=\delta_2(c)(c\in(p,q))$ 的惟一解.

证 由文献 [2] 定理 1.1 和文献 [3] 定理 1.2 得出 $\delta_1'(c)^{-1}\geqslant\lambda_0[p,c]\geqslant\delta_1''(c)^{-1}\geqslant(4\delta_1(c))^{-1}$ 且 $\delta_1(c)\leqslant\delta_1'(c)\leqslant2\delta_1(c)$. 类似可得 $\delta_2'(c)^{-1}\geqslant\lambda_0[c,q]\geqslant\delta_2''(c)^{-1}\geqslant(4\delta_2(c))^{-1}$ 且 $\delta_2(c)\leqslant\delta_2'(c)\leqslant 2\delta_2(c)$. 再由定理 1.1 即得 (1.6) 式.

为证后一断言,注意到 $\delta_1(c)$ 和 $\delta_2(c)$ 关于 c 分别严格上升和严格下降. 显然有 $\lim_{c\to p}\delta_1(c)=0$, $\lim_{c\to q}\delta_2(c)=0$, 而且 $\delta_1(c)>0$, $\delta_2(c)>0$, $c\in(p,q)$. 再则, 当 $c_1<c_2$ 时,

$$0<\int_p^x e^{-C}\int_x^{c_2}e^C/a-\int_p^x e^{-C}\int_x^{c_1}e^C/a\leqslant\int_p^{c_2}e^{-C}\int_{c_1}^{c_2}e^C/a\to0,\quad 当\ c_2-c_1\to0;$$

$$0<\int_x^q e^{-C}\int_{c_1}^x e^C/a-\int_x^q e^{-C}\int_{c_2}^x e^C/a\leqslant\int_{c_1}^q e^{-C}\int_{c_1}^{c_2}e^C/a\to0,\quad 当\ c_2-c_1\to0,$$

于是 $\delta_1(c)$ 和 $\delta_2(c)$ 关于 c 连续，故方程 $\delta_1(c)=\delta_2(c)$ 有惟一解. 由此结合 $\delta_1(c)$ 和 $\delta_2(c)$ 的单调性及 (1.6) 式即得证 (1.7) 式. 证毕.

注 1.1 文献 [5] 第 93 页给出了 P. Gurka 的显式估计

$$2B^{-1}\geqslant\lambda_0\geqslant(4B)^{-1},\tag{1.8}$$

其中

$$B=\sup_{p<c<d<q}\gamma(c,d),\qquad \gamma(c,d)=\left(\int_p^c e^{-C(y)}dy\wedge\int_d^q e^{-C(y)}dy\right)\int_c^d[e^C/a](u)du.\tag{1.9}$$

下面证明推论 1.1 的估计优于 (1.8) 式. 为此，只需证明 $B/2\leqslant\delta_1(c_0)\leqslant B$.

首先，由于 $\delta_1(x)$ 和 $\delta_2(x)$ 关于 x 分别严格上升和严格下降，则当 $c_0\leqslant c<d<q$ 时, $\gamma(c,d)\leqslant\delta_1(d)\wedge\delta_2(c)\leqslant\delta_1(d)\wedge\delta_2(c_0)=\delta_1(c_0)$; 当 $p<c<d\leqslant c_0$ 时, $\gamma(c,d)\leqslant\delta_1(d)\wedge\delta_2(c)\leqslant$

$\delta_1(c_0)\wedge\delta_2(c)=\delta_1(c_0)$; 当 $p<c<c_0<d<q$ 时,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\gamma(c,d)&\leqslant\left(\int_p^c e^{-C}\wedge\int_d^q e^{-C}\right)\left(\int_c^{c_0}e^C/a\vee\int_{c_0}^d e^C/a\right)\\&\leqslant\left(\int_p^c e^{-C}\int_c^{c_0}e^C/a\right)\vee\left(\int_d^q e^{-C}\int_{c_0}^d e^C/a\right)\\&\leqslant\delta_1(c_0)\vee\delta_2(c_0)=\delta_1(c_0),\end{aligned}$$

由以上讨论知 $B/2\leqslant\delta_1(c_0)$.

其次，为证另一半结论，用反证法. 假定 $\delta_1(c_0)>B$. 当 $\int_p^{c_0}e^{-C}\leqslant\int_{c_0}^q e^{-C}$ 时，存在 $x_0\in(p,c_0)$, 使得 $\int_p^{x_0}e^{-C}\int_{x_0}^{c_0}e^C/a>B$, 而 $B\geqslant\gamma(x_0,c_0)\geqslant\int_p^{x_0}e^{-C}\int_{x_0}^{c_0}e^C/a$, 从而导致矛盾；当 $\int_p^{c_0}e^{-C}>\int_{c_0}^q e^{-C}$ 时，由于 $\delta_2(c_0)=\delta_1(c_0)>B$, 所以存在 $x_1\in(c_0,q)$, 使得 $\int_{x_1}^q e^{-C}\int_{c_0}^{x_1}e^C/a>B$, 但是 $B\geqslant\gamma(c_0,x_1)\geqslant\int_{x_1}^q e^{-C}\int_{c_0}^{x_1}e^C/a$, 也导致矛盾，因此得证 $\delta_1(c_0)\leqslant B$.

注 1.2 文献 [5] 对于一般的 $(p,q)\subset\mathbb{R}$ 给出 (1.8) 式，无需本文的条件 (1.0). 从分析的观点看，若 (1.0) 式的第 1 条件满足但第 2 条件不满足，注意 $p>-\infty$, 则

$$B=\sup_{x\in(p,\infty)}\int_p^x e^{-C(y)}dy\int_x^\infty[e^C/a](u)du,$$

即文献 [2] 定理 1.1 中的 δ, 故属于文献 [2] 已处理的情形. 类似地还可处理 $p=-\infty$ 情形：固定 $x_0\in(p,q)$, 改定义 $C(x)=\int_{x_0}^x b/a$ 并记 $M_\pm=\pm\int_{x_0}^{\pm\infty}e^{-C(y)}dy$. 若 M_+ 和 M_- 之一有限，例如 $M_-<\infty$, 则与 $p>-\infty$ 情形类似，可归入文献 [2]; 若两者均为无穷，则由 (1.8) 式导出 $B=\infty$, 这是 $\lambda_0=0$ 的平凡情形.

若 (1.0) 式的第 1 条件不满足，仅讨论 $p=-\infty$ 和 $q=+\infty$ 的情形，其他情形可类似处理. 若 M_+ 和 M_- 均为无穷，则由 (1.8) 式知结论平凡；若两者之一有限，则可归入文献 [2,5](例如 $M_-<\infty$, $M_+=\infty$. 使用 (1.8) 式并仿上段讨论，可化为单边界情形. 此时，若 $\int_{x_0}^\infty e^C/a<\infty$, 则上段已讨论过. 否则，由文献 [5] 定理 1.14 知 $\lambda_0=0$); 若两者均有限，则或平凡，或 $B<\infty$, 后者是本文惟一没有处理的情形.

注 1.3 事实上，文献 [5] 定理 8.2 给出了比 (1.8) 式更为精细的估计

$$\sqrt{2}B^{-1}\geqslant\lambda_0\geqslant4\sqrt{2}(\sqrt{5}+1)^{-5/2}B^{-1}(\approx(3.33B)^{-1}),\tag{1.10}$$

此处的 B 如 (1.9) 式. 可惜难于直接比较 (1.10) 和 (1.7) 式，仅以下例为证:

例 1.1 在 $[0,1]$ 上取 $a(x)\equiv1$, $b(x)\equiv0$. 这是最简单的情形. 由 (1.8)、(1.10)、(1.7) 和 (1.6) 式分别得出估计： $2\leqslant\lambda_0\leqslant16$, $2.4023\leqslant\lambda_0\leqslant11.3137$, $4\leqslant\lambda_0\leqslant16$, $16/\sqrt[3]{5}\,(\approx9.3569)\leqslant\lambda_0\leqslant32/3\,(\approx10.6667)$. 固定 $x_0=1/2$. 取试验函数 $f_1(x)=x$ 如 $x\in[0,1/2]$, $f_1(x)=1-x$ 如 $x\in[1/2,1]$, 则由定理 1.1 得到 $8\leqslant\lambda_0\leqslant12$. 然而，若取 $f_n(x)=f_{n-1}(x)\mathit{\Pi}_1(f_{n-1})(x)$ 如 $x\in[0,1/2]$, $f_n(x)=f_{n-1}(x)\mathit{\Pi}_2(f_{n-1})(x)$ 如 $x\in[1/2,1]$, 则当 $n=2,3,4$ 时，分别得到 $9.6\leqslant\lambda_0\leqslant10$, $9.8361\leqslant\lambda_0\leqslant9.9188$ 和 $9.8657\leqslant\lambda_0\leqslant9.8710$. 这里试验函数的取法即是文献 [3] 中所述的迭代方法. 精确值为 $\lambda_0=\pi^2\approx9.8696$, 相应的特征函数为 $f(x)=\sin(\pi x)$.

例 1.2 在 $[0,1]$ 上取 $a(x)=x/2$, $b(x)=-x$. 这是变系数的非平凡情形. 固定 $x_0=1/2$. 取试验函数 $f(x)=x(1-x)(n-1+x)$ 如 $x\in[0,1/2]$, $f(x)=x(1-x)(n-x)$ 如 $x\in[1/2,1]$. 由定理 1.1 得到 $(4n-4)/(2n-4+e)\leqslant\lambda_0\leqslant(6ne-3e)/(3ne-e-3)$. 特别地，当 $n=2,10,50,100$ 时，分别得到 $1.4715\leqslant\lambda_0\leqslant2.3099$, $1.9233\leqslant\lambda_0\leqslant2.0433$, $1.9855\leqslant\lambda_0\leqslant2.0082$ 和 $1.9928\leqslant$

$\lambda_0 \leqslant 2.0041$. 这里试验函数的取法实际上是特征函数的一种近似. 精确值为 $\lambda_0 = 2$, 相应的特征函数是 $f(x) = x - x^2$.

2 离散情形

考虑 $E = \{0, 1, 2, \cdots, N\}$ ($3 \leqslant N \leqslant \infty$) 上的生灭过程 ($N = 2$ 时为平凡情形, 此时 $\lambda_0 = a_1 + b_1$). 设生速为 $b_i > 0 (0 \leqslant i < N)$, 死速为 $a_i > 0 (0 < i \leqslant N)$. 为方便, 置 $a_0 = 0$ 及 $b_N = 0$. 定义 $\mu_0 = 1$, $\mu_i = b_0 \cdots b_{i-1}/a_1 \cdots a_i\,(1 \leqslant i \leqslant N)$, $\mu = \sum_{i=0}^N \mu_i$. 再定义 $\pi_i = \mu_i/\mu$. 约定 $f_\infty = \lim_{n\to+\infty} f_n$ 且假定

$$\mu < \infty, \qquad \sum_{i=0}^N \frac{1}{\mu_i b_i} < \infty. \tag{2.1}$$

算子 Ω 定义为 $\Omega f(i) = b_i(f_{i+1} - f_i) + a_i(f_{i-1} - f_i)$. 相应的 Dirichlet 型为 $D(f) = \sum_{i=0}^{N-1} \pi_i b_i [f_{i+1} - f_i]^2 = -\sum_{i=0}^N \pi_i (f\Omega f)(i)$. 考虑 Ω 的主特征值 $\lambda_0 = \inf\{D(f) : f_0 = f_N = 0, \pi(f^2) = 1\}$, 其中 $\pi(f^2) = \sum_{i=0}^N \pi_i f_i^2$. 由连续情形的启发, 自然希望将 λ_0 的研究归结为子区间上的混合特征值问题, 但在离散情形下, 相应于 λ_0 的特征函数 g 却有不同的形态 (见命题 2.1), 因此得到的变分公式也有所不同. 为陈述结果, 需要一些记号. 首先定义

$$\overline{\Pi}_i^{(1)}(f) = \frac{1}{f_i}\sum_{j=0}^{i-1}\frac{1}{\mu_j b_j}\left(\sum_{s=j+1}^{k-1}\mu_s f_s + \frac{1}{c}\mu_k f_k\right), \quad 0 < i \leqslant k,$$

$$\overline{\Pi}_i^{(2)}(f) = \frac{1}{f_i}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{1}{\mu_j a_j}\left(\sum_{s=k+1}^{j-1}\mu_s f_s + \frac{c-1}{c}\mu_k f_k\right), \quad k \leqslant i < N,$$

其中常数 $c > 1$ 为离散情形所增添的新参数. 再定义

$$\mathscr{F}[0,k] = \{f : 0 = f_0 < f_1 < \cdots < f_k\}, \quad \mathscr{F}[k,N] = \{f : f_k > f_{k+1} > \cdots > f_N = 0\},$$

$$\zeta[0,k] = \inf_{f\in\mathscr{F}[0,k]}\max_{0<i\leqslant k}\overline{\Pi}_i^{(1)}(f)^{-1}, \qquad \eta[0,k] = \sup_{f\in\mathscr{F}[0,k]}\min_{0<i\leqslant k}\overline{\Pi}_i^{(1)}(f)^{-1},$$

$$\zeta[k,N] = \inf_{f\in\mathscr{F}[k,N]}\max_{k\leqslant i<N}\overline{\Pi}_i^{(2)}(f)^{-1}, \qquad \eta[k,N] = \sup_{f\in\mathscr{F}[k,N]}\min_{k\leqslant i<N}\overline{\Pi}_i^{(2)}(f)^{-1}.$$

这里, ζ 和 η 分别用于上、下界估计.

定理 2.1 关于 λ_0 的变分公式如下:

$$\inf_{1\leqslant k<N}\inf_{c>1}\big(\zeta[0,k]\vee\zeta[k,N]\big) = \lambda_0 = \sup_{1\leqslant k<N}\sup_{c>1}\big(\eta[0,k]\wedge\eta[k,N]\big). \tag{2.2}$$

在进入详细证明之前, 先给出两条引理, 然后将就证明的想法作一些说明.

引理 2.1 假定 $\lambda \geqslant 0$ 且 g 满足方程 $\Omega g(i) = -\lambda g_i\,(0 < i < N)$. 若存在 $m, n : 0 \leqslant m < n \leqslant N$, 使得在 $[m, n]$ 上 $g = 0$, 则 $g = 0$.

证 仿文献 [6] 定理 3.4 的证明, 有

$$\begin{aligned}
-\lambda\sum_{s=i}^{j}\pi_s g_s = \sum_{s=i}^{j}\pi_s\Omega g(s) &= \sum_{s=i}^{j}[\pi_s a_s(g_{s-1} - g_s) + \pi_s b_s(g_{s+1} - g_s)] \\
&= \sum_{s=i}^{j}[-\pi_s a_s(g_s - g_{s-1}) + \pi_{s+1}a_{s+1}(g_{s+1} - g_s)] \\
&= \pi_{j+1}a_{j+1}(g_{j+1} - g_j) - \pi_i a_i(g_i - g_{i-1}), \qquad 0 < i \leqslant j < N.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

在 (2.3) 式中取 $i=n$, 由 $g_{n-1}=g_n=0$ 及归纳法导出 $g_j=0\,(n<j\leqslant N)$. 类似地，在 (2.3) 式中取 $j=m$, 由 $g_{m+1}=g_m=0$ 及归纳法导出 $g_i=0\,(0\leqslant i<m)$, 故 $g=0$. 证毕.

引理 2.2　若 g 是方程 $\Omega g(i)=-\lambda_0 g_i\,(0<i<N)$ 满足 $g_0=g_N=0$ 的非常数解，则 $\lambda_0>0$, 在 $(0,N)$ 上 g 无零点且同号.

证　(i) 先证 $\lambda_0>0$. 谬设 $\lambda_0=0$, 则 $D(g)=\sum_{i=0}^{N-1}\pi_i b_i[g_{i+1}-g_i]^2=-\sum_{i=0}^{N}\pi_i(g\Omega g)(i)=0$, 因此 $g=0$, 与所设条件相悖.

(ii) 谬设存在 $g_i=0\,(0<i<N)$. 由引理 2.1 知 $g_{i-1}\neq 0$, $g_{i+1}\neq 0$. 若 g_{i-1} 与 g_{i+1} 同号，不妨设 $g_{i-1}\geqslant g_{i+1}>0$, 令 $\overline{g}=gI_{[j\neq i]}+g_{i+1}I_{[j=i]}$; 若 g_{i-1} 与 g_{i+1} 异号，不妨设 $g_{i-1}\geqslant -g_{i+1}>0$, 令 $\overline{g}=gI_{[0,i-1]}+(-g_{i+1})I_{[j=i]}+(-g)I_{[i+1,N]}$, 则总有 $\overline{g}_0=\overline{g}_N=0$, $\pi(\overline{g}^2)>\pi(g^2)$, $D(\overline{g})<D(g)$, 因此 $\lambda_0\leqslant D(\overline{g})/\pi(\overline{g}^2)<D(g)/\pi(g^2)=\lambda_0$ 而导致矛盾.

(iii) 谬设在 $(0,N)$ 上 g 异号. 由引理 2.1 知 $g_1\neq 0$, 不妨设 $g_1>0$, 记 $m=\max\{i: g_i>0\}$. 由 (ii) 知 $g_{m+1}<0$. 令 $\overline{g}=gI_{[0,m]}+(-g)I_{[m+1,N]}$, 则 $\overline{g}_0=\overline{g}_N=0$, $\pi(\overline{g}^2)=\pi(g^2)$, $D(\overline{g})<D(g)$, 同 (ii) 导致矛盾. 证毕.

下述结果刻画了 λ_0 的特征函数 g 的特征：可能存在恰好两个最大值点而与连续情形不同.

命题 2.1　若方程 $\Omega g(i)=-\lambda_0 g_i\,(0<i<N)$ 有满足 $g_0=g_N=0$ 的非常数解 $g\geqslant 0$, 则 g 必为以下两种情形之一：

(1) 存在 $k\in(0,N-1)$, 使得 $0=g_0<g_1<\cdots<g_k=g_{k+1}>\cdots>g_{N-1}>g_N=0$;

(2) 存在 $k\in(0,N)$, 使得 $0=g_0<g_1<\cdots<g_k>\cdots>g_{N-1}>g_N=0$.

证　谬设 $k, n(>k+1)$ 为 $(0,N)$ 上的两个极大点，即 $g_{k-1}<g_k\geqslant g_{k+1}$, $g_{n-1}\leqslant g_n>g_{n+1}$. 由引理 2.2, $g_n>0$. 令 $\overline{g}=gI_{[0,k-1]}+g_kI_{[k,n]}+cgI_{[n+1,N]}$, 其中 $c=g_k/g_n$, 则 $\overline{g}_0=\overline{g}_N=0$, 而且

$$\pi(\overline{g}^2)=\sum_{i=0}^{k-1}\pi_i g_i^2+g_k^2\sum_{i=k}^{n}\pi_i+c^2\sum_{i=n+1}^{N}\pi_i g_i^2,$$

$$-\sum_{i=0}^{N}\pi_i(\overline{g}\Omega\overline{g})(i)=\lambda_0\sum_{i=0}^{k-1}\pi_i g_i^2+\pi_k g_k a_k(g_k-g_{k-1})+c^2\pi_n g_n b_n(g_n-g_{n+1})+\lambda_0 c^2\sum_{i=n+1}^{N}\pi_i g_i^2.$$

注意到 $\lambda_0 g_k=-\Omega g(k)\geqslant a_k(g_k-g_{k-1})$ 和 $\lambda_0 g_n=-\Omega g(n)\geqslant b_n(g_n-g_{n+1})$, 因此有

$$\pi_k g_k a_k(g_k-g_{k-1})+c^2\pi_n g_n b_n(g_n-g_{n+1})\leqslant\lambda_0\pi_k g_k^2+\lambda_0 c^2\pi_n g_n^2<\lambda_0 g_k^2\sum_{i=k}^{n}\pi_i,$$

进而 $\lambda_0\leqslant-\sum_{i=0}^{N}\pi_i(\overline{g}\Omega\overline{g})(i)/\pi(\overline{g}^2)<\lambda_0$, 导致矛盾，因此 $k+1=n$, 即情形 (1), 或者 $k=n$, 即只有 1 个极大 (最大) 值点 k, 也即情形 (2). 证毕.

现在来研究 Ω 的主特征值 λ_0. 若完全仿照连续情形，则也可得到一个类似于 (1.1) 式的结果，但等号只是在特征函数为命题 2.1 的情形 (1) 时成立. 为处理命题 2.1 的情形 (2), 我们的想法是：在 k 后插入一个点，即在扩大后的状态空间 $\overline{E}=\{0,1,\cdots,N,N+1\}$(当 $N=\infty$ 时 $\overline{E}=E$, 没有扩大) 上构造新的生灭链 $(\overline{a}_i,\overline{b}_i)$, 使得其特征函数 $\overline{g}$ 满足 $\overline{g}_i=g_i\,(0\leqslant i\leqslant k)$, $\overline{g}_i=g_{i-1}\,(k+1\leqslant i\leqslant N+1)$, 注意 $\overline{g}_k=\overline{g}_{k+1}$, 且相应的特征值 $\overline{\lambda}_0=\lambda_0$. 即通过扩大状态空间，把命题 2.1 的第 2 种情形归并到第 1 种情形. 此时，由 $-\overline{\Omega}\overline{g}(k)=\overline{\lambda}_0\overline{g}_k=\lambda_0 g_k=-\Omega g(k)$ 不难算出 $\overline{a}_k/a_k=\lambda_0 g_k/\big(a_k(g_k-g_{k-1})\big)>1$, 这乃是常数 c 的出处. 基于以上考虑，构造新的

生灭链如下：任意固定 $k\in[1,N)$, 定义

$$\overline{a}_i=\begin{cases}a_i, & 1\leqslant i\leqslant k-1;\\ ca_k, & i=k;\\ 1, & i=k+1;\\ a_{i-1}, & k+2\leqslant i\leqslant N+1,\end{cases}\qquad \overline{b}_i=\begin{cases}b_i, & 0\leqslant i\leqslant k-1;\\ c-1, & i=k;\\ cb_k/(c-1), & i=k+1;\\ b_{i-1}, & k+2\leqslant i\leqslant N,\end{cases}$$

其中常数 $c>1$. 此时, $\overline{\pi}_i=\pi_i\,(0\leqslant i\leqslant k-1)$, $\overline{\pi}_k=\pi_k/c$, $\overline{\pi}_{k+1}=(c-1)\pi_k/c$ 且 $\overline{\pi}_i=\pi_{i-1}\,(k+2\leqslant i\leqslant N+1)$. 当然, $\overline{\mu}_i$ 和 μ_i 有同样的关系，并由 (2.1) 式知

$$\overline{\mu}=\mu<\infty,\qquad \sum_{i=0}^{N+1}\frac{1}{\overline{\mu}_i\overline{b}_i}=\sum_{i=0}^{N}\frac{1}{\mu_ib_i}+\frac{c}{(c-1)\mu_k}<\infty. \tag{2.4}$$

最终所得到的结果 (定理 2.1), 统一处理了特征函数 g 的两种情形.

定理 2.1 的证 (i) 任意固定 $k\in[1,N)$ 和 $c>1$. 给定正数列 $\{l_i\}_{i=0}^{k-1}$ 和 $\{r_i\}_{i=k+1}^{N}$. 对于每个 $h:h_0=h_N=0,\pi(h^2)=1$, 在 $\overline{E}$ 上定义 $\overline{h}_i=h_i\,(0\leqslant i\leqslant k)$ 和 $\overline{h}_i=h_{i-1}\,(k+1\leqslant i\leqslant N+1)$, 则 $\overline{\pi}(\overline{h}^2)=1$ 且 $\overline{D}(\overline{h})=D(h)$. 由 Cauchy-Schwarz 不等式可得

$$\begin{aligned}1&=\sum_{i=0}^{N+1}\overline{\pi}_i\overline{h}_i^2=\sum_{i=1}^{k}\overline{\pi}_i\big(\overline{h}_i-\overline{h}_0\big)^2+\sum_{i=k+1}^{N}\overline{\pi}_i\big(\overline{h}_{N+1}-\overline{h}_i\big)^2\\
&=\sum_{i=1}^{k}\overline{\pi}_i\bigg(\sum_{j=0}^{i-1}\big(\overline{h}_{j+1}-\overline{h}_j\big)\bigg)^2+\sum_{i=k+1}^{N}\overline{\pi}_i\bigg(\sum_{j=i}^{N}\big(\overline{h}_{j+1}-\overline{h}_j\big)\bigg)^2\\
&\leqslant\sum_{i=1}^{k}\overline{\pi}_i\sum_{j=0}^{i-1}\frac{\big(\overline{h}_{j+1}-\overline{h}_j\big)^2\overline{\pi}_j\overline{b}_j}{l_j}\sum_{s=0}^{i-1}\frac{l_s}{\overline{\pi}_s\overline{b}_s}+\sum_{i=k+1}^{N}\overline{\pi}_i\sum_{j=i}^{N}\frac{\big(\overline{h}_{j+1}-\overline{h}_j\big)^2\overline{\pi}_j\overline{b}_j}{r_j}\sum_{s=i}^{N}\frac{r_s}{\overline{\pi}_s\overline{b}_s}\\
&=\sum_{j=0}^{k-1}\overline{\pi}_j\overline{b}_j\big(\overline{h}_{j+1}-\overline{h}_j\big)^2\frac{1}{l_j}\sum_{i=j+1}^{k}\overline{\pi}_i\sum_{s=0}^{i-1}\frac{l_s}{\overline{\pi}_s\overline{b}_s}+\sum_{j=k+1}^{N}\overline{\pi}_j\overline{b}_j\big(\overline{h}_{j+1}-\overline{h}_j\big)^2\frac{1}{r_j}\sum_{i=k+1}^{j}\overline{\pi}_i\sum_{s=i}^{N}\frac{r_s}{\overline{\pi}_s\overline{b}_s}\\
&\leqslant\overline{D}(\overline{h})\bigg[\max_{0\leqslant j\leqslant k-1}\bigg(\frac{1}{l_j}\sum_{i=j+1}^{k}\overline{\pi}_i\sum_{s=0}^{i-1}\frac{l_s}{\overline{\pi}_s\overline{b}_s}\bigg)\vee\sup_{k+1\leqslant j\leqslant N}\bigg(\frac{1}{r_j}\sum_{i=k+1}^{j}\overline{\pi}_i\sum_{s=i+1}^{N+1}\frac{r_{s-1}}{\overline{\pi}_s\overline{a}_s}\bigg)\bigg]\\
&=:D(h)\Big[\max_{0\leqslant j\leqslant k-1}\overline{L}_j\vee\sup_{k+1\leqslant j\leqslant N}\overline{R}_j\Big].\end{aligned}$$

今设 $f\in\mathcal{F}[0,k]$ 和 $g\in\mathcal{F}[k,N]$. 取 $l_j=\sum_{i=j+1}^{k}\overline{\mu}_if_i$, $r_j=\sum_{i=k+1}^{j}\overline{\mu}_ig_{i-1}$, 代替中值定理，使用合分比性质得

$$\max_{0\leqslant j\leqslant k-1}\overline{L}_j\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant k}\frac{1}{f_i}\sum_{s=0}^{i}\frac{l_s}{\overline{\mu}_s\overline{b}_s}=\max_{0<i\leqslant k}\overline{\mathit{\Pi}}_i^{(1)}(f),$$

$$\sup_{k+1\leqslant j\leqslant N}\overline{R}_j\leqslant\sup_{k+1\leqslant i\leqslant N}\frac{1}{g_{i-1}}\sum_{s=i+1}^{N+1}\frac{r_{s-1}}{\overline{\mu}_s\overline{a}_s}=\sup_{k\leqslant i<N}\overline{\mathit{\Pi}}_i^{(2)}(g).$$

由 h 的任意性和以上事实得 $\lambda_0\geqslant\eta[0,k]\wedge\eta[k,N]$. 再由 c 和 k 的任意性得证

$$\lambda_0\geqslant\sup_{1\leqslant k<N}\sup_{c>1}\big(\eta[0,k]\wedge\eta[k,N]\big). \tag{2.5}$$

(ii) 任意固定 $k\in[1,N)$ 和 $c>1$. 任取 $f\in\mathcal{F}[0,k]$, $g\in\mathcal{F}[k,N]$. 令 $\alpha=f_k\overline{\mathit{\Pi}}_k^{(1)}(f)\big/\big(g_k\overline{\mathit{\Pi}}_k^{(2)}(g)\big)$.

取 $h_0=h_N=0$, $h_i=f_i\overline{\Pi}_i^{(1)}(f)\,(1\leqslant i\leqslant k)$ 和 $h_i=\alpha g_i\overline{\Pi}_i^{(2)}(g)\,(k\leqslant i\leqslant N-1)$, 则

$$\begin{aligned}
D(h)&=\sum_{i=0}^{k-1}\pi_i b_i(h_{i+1}-h_i)^2+\sum_{i=k+1}^{N}\pi_i a_i(h_{i-1}-h_i)^2\\
&=\sum_{i=0}^{k-1}(h_{i+1}-h_i)\bigg(\sum_{s=i+1}^{k-1}\pi_s f_s+\frac{1}{c}\pi_k f_k\bigg)+\alpha\sum_{i=k+1}^{N}(h_{i-1}-h_i)\bigg(\sum_{s=k+1}^{i-1}\pi_s g_s+\frac{c-1}{c}\pi_k g_k\bigg)\\
&=\sum_{s=1}^{k-1}\pi_s f_s\sum_{i=0}^{s-1}(h_{i+1}-h_i)+\frac{1}{c}\pi_k f_k h_k+\alpha\sum_{s=k+1}^{N-1}\pi_s g_s\sum_{i=s+1}^{N}(h_{i-1}-h_i)+\frac{c-1}{c}\alpha\pi_k g_k h_k\\
&=\sum_{s=1}^{k-1}\pi_s f_s h_s+\frac{1}{c}\pi_k f_k h_k+\alpha\sum_{s=k+1}^{N-1}\pi_s g_s h_s+\frac{c-1}{c}\alpha\pi_k g_k h_k\\
&\leqslant\bigg(\sum_{s=1}^{k-1}\pi_s h_s^2+\frac{\pi_k h_k^2}{c}\bigg)\max_{1\leqslant i\leqslant k}\overline{\Pi}_i^{(1)}(f)^{-1}+\bigg(\sum_{s=k+1}^{N-1}\pi_s h_s^2+\frac{c-1}{c}\pi_k h_k^2\bigg)\sup_{k\leqslant i<N}\overline{\Pi}_i^{(2)}(g)^{-1}\\
&\leqslant\pi(h^2)\Big(\max_{1\leqslant i\leqslant k}\overline{\Pi}_i^{(1)}(f)^{-1}\vee\sup_{k\leqslant i<N}\overline{\Pi}_i^{(2)}(g)^{-1}\Big),
\end{aligned}$$

因此由 f 和 g 的任意性知 $\lambda_0\leqslant\zeta[0,k]\vee\zeta[k,N]$. 再由 c 和 k 的任意性得证

$$\lambda_0\leqslant\inf_{1\leqslant k<N}\inf_{c>1}\big(\zeta[0,k]\vee\zeta[k,N]\big).\tag{2.6}$$

(iii) 不论特征函数 g 属于命题 2.1 的情形 (1) 还是 (2), 总令 $f_1=gI_{[0,k]}\in\mathcal{F}[0,k]$ 和 $f_2=gI_{[k,N]}\in\mathcal{F}[k,N]$. 由 (2.3) 式得 $\lambda_0\sum_{s=j+1}^{k-1}\mu_s g_s=\mu_j b_j(g_{j+1}-g_j)-\mu_k a_k(g_k-g_{k-1})\,(0\leqslant j\leqslant i-1)$ 和 $\lambda_0\sum_{s=k+1}^{j-1}\mu_s g_s=\mu_j a_j(g_{j-1}-g_j)-\mu_k b_k(g_{k+1}-g_k)\,(i+1\leqslant j\leqslant N)$.

当 g 属于命题 2.1 的情形 (2) 时, 取 $c=\lambda_0 g_k/(a_k(g_k-g_{k-1}))$, 则 $\overline{\Pi}_i^{(1)}(f_1)=\lambda_0^{-1}\,(0<i\leqslant k)$, $\overline{\Pi}_i^{(2)}(f_2)=\lambda_0^{-1}\,(k\leqslant i<N)$, 因此 (2.5) 和 (2.6) 式中的等号成立.

当 g 属于命题 2.1 的情形 (1) 时, 有

$$\overline{\Pi}_i^{(1)}(f_1)=\frac{1}{\lambda_0}-\Big(1-\frac{1}{c}\Big)\mu_k g_k\frac{1}{g_i}\sum_{j=0}^{i-1}\frac{1}{\mu_j b_j},\qquad 0<i\leqslant k,$$

$$\overline{\Pi}_i^{(2)}(f_2)=\frac{1}{\lambda_0}+\Big(1-\frac{1}{c}\Big)\mu_k g_k\frac{1}{g_i}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{1}{\mu_j a_j},\qquad k\leqslant i<N.$$

由此容易得到

$$\inf_{c>1}\Big(\max_{0<i\leqslant k}\overline{\Pi}_i^{(1)}(f_1)^{-1}\vee\sup_{k\leqslant i<N}\overline{\Pi}_i^{(2)}(f_2)^{-1}\Big)=\lambda_0,$$

$$\sup_{c>1}\Big(\min_{0<i\leqslant k}\overline{\Pi}_i^{(1)}(f_1)^{-1}\wedge\inf_{k\leqslant i<N}\overline{\Pi}_i^{(2)}(f_2)^{-1}\Big)=\lambda_0.$$

所以, (2.5) 式的右边不小于 λ_0 且 (2.6) 式的右边不大于 λ_0, 因此 (2.2) 式成立.

综合以上事实导出所需结论.

下面研究 λ_0 的显式估计. 定理 2.1 的证明中构造了 $\overline{E}$ 上新的生灭链 $(\overline{a}_i,\overline{b}_i)$, 其在 $[0,k]$ 和 $[k+1,N+1]$ 上的混合特征值分别记为 $\lambda_0^{(c)}[0,k]$ 和 $\lambda_0^{(c)}[k+1,N+1]$. 容易看出

$$\overline{\Pi}_i^{(1)}(f)=\frac{1}{f_i}\sum_{j=0}^{i-1}\frac{1}{\overline{\mu}_j\overline{b}_j}\sum_{s=j+1}^{k}\overline{\mu}_s f_s,\qquad 0<i\leqslant k.$$

令 $\overline{f}_i = f_{i-1}\,(k+1 \leqslant i \leqslant N+1)$, 则易知

$$\overline{II}_i^{(2)}(f) = \frac{1}{\overline{f}_{i+1}} \sum_{j=i+2}^{N+1} \frac{1}{\overline{\mu}_j \overline{a}_j} \sum_{s=k+1}^{j-1} \overline{\mu}_s \overline{f}_s, \qquad k \leqslant i < N,$$

因此由文献 [3] 定理 2.1 可证 $\zeta[0,k] = \lambda_0^{(c)}[0,k] = \eta[0,k]$, $\zeta[k,N] = \lambda_0^{(c)}[k+1,N+1] = \eta[k,N]$. 所以 (2.2) 式可改写为

$$\inf_{1\leqslant k<N} \inf_{c>1} \left(\lambda_0^{(c)}[0,k] \vee \lambda_0^{(c)}[k+1,N+1]\right) = \lambda_0 = \sup_{1\leqslant k<N} \sup_{c>1} \left(\lambda_0^{(c)}[0,k] \wedge \lambda_0^{(c)}[k+1,N+1]\right). \quad (2.7)$$

再令

$$\delta'(k,c) = \max_{1\leqslant i\leqslant k} \sum_{j=0}^{i-1} \frac{1}{\mu_j b_j}\left(\sum_{j=i}^{k-1} \mu_j + \frac{1}{c}\mu_k\right) \left(= \max_{1\leqslant i\leqslant k} \sum_{j=0}^{i-1} \frac{1}{\overline{\mu}_j \overline{b}_j} \sum_{j=i}^{k} \overline{\mu}_j\right),$$

$$\delta''(k,c) = \sup_{k+1\leqslant i\leqslant N} \sum_{j=i}^{N} \frac{1}{\mu_j a_j}\left(\sum_{j=k+1}^{i-1} \mu_j + \frac{c-1}{c}\mu_k\right) \left(= \sup_{k+1\leqslant i\leqslant N} \sum_{j=i+1}^{N+1} \frac{1}{\overline{\mu}_j \overline{a}_j} \sum_{j=k+1}^{i} \overline{\mu}_j\right),$$

则由文献 [4] 定理 3.4 得 $\delta'(k,c)^{-1} \geqslant \lambda_0^{(c)}[0,k] \geqslant \left(4\delta'(k,c)\right)^{-1}$ 和 $\delta''(k,c)^{-1} \geqslant \lambda_0^{(c)}[k+1,N+1] \geqslant \left(4\delta''(k,c)\right)^{-1}$. 再由 (2.7) 式即得以下

推论 2.1 $\inf_{1\leqslant k<N} \inf_{c>1} \left(\delta'(k,c) \wedge \delta''(k,c)\right)^{-1} \geqslant \lambda_0 \geqslant \sup_{1\leqslant k<N} \sup_{c>1} \left(4(\delta'(k,c) \vee \delta''(k,c))\right)^{-1}$.

下面给出 3 个例子:

例 2.1 设 $N=3$ 且 $a_i = 1\,(i=1,2,3)$ 和 $b_i = 1\,(i=0,1,2)$, 则 $\mu_i = 1(i=0,1,2,3)$. 固定 $k=1$, 此时 $\overline{II}_1^{(1)}(f) = 1/c$, $\overline{II}_1^{(2)}(f) = 2 - 2/c + f_2/f_1$ 和 $\overline{II}_2^{(2)}(f) = 1 + (1-1/c)f_1/f_2$. 取 $f_1 = f_2$, 则 $\overline{II}_1^{(2)}(f) = 3 - 2/c$, $\overline{II}_2^{(2)}(f) = 2 - 1/c$. 由 (2.2) 式经计算得到精确估计 $\lambda_0 = 1$. 实际上, 此例的特征函数 g 处于 $g_1 = g_2$ 的情形. 由推论 2.1 计算得到 $1 \geqslant \lambda_0 \geqslant 1/4$.

例 2.2 设 $N=3$ 且 $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 3$, $b_i = i+1\,(i=0,1,2)$, 则 $\mu_0 = \mu_1 = 1$, $\mu_2 = \mu_3 = 2$. 固定 $k=1$, 此时 $\overline{II}_1^{(1)}(f) = 1/c$, $\overline{II}_1^{(2)}(f) = 2(1-1/c)/3 + f_2/(3f_1)$ 和 $\overline{II}_2^{(2)}(f) = 1/3 + (1-1/c)f_1/(6f_2)$. 取 $f_1 = 2f_2$, 则 $\overline{II}_1^{(2)}(f) = 5/6 - 2/(3c)$, $\overline{II}_2^{(2)}(f) = 2/3 - 1/(3c)$. 再取 $c=2$, 由 (2.2) 式得到精确估计 $\lambda_0 = 2$. 此例的特征函数 g 处于 $g_1 = 2g_2$, 从而为 $g_1 \neq g_2$ 的情形. 由推论 2.1 计算得 $7/3 \geqslant \lambda_0 \geqslant 7/12$.

例 2.3 设 $N=3$ 且 $a_1 = (2-\varepsilon^2)/(1+\varepsilon)$, $a_2 = a_3 = 1$, $b_0 = b_1 = 1$, $b_2 = 2$, 其中 $\varepsilon \in [0,\sqrt{2})$, 则 $\mu_0 = 1$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3/2 = (1+\varepsilon)/(2-\varepsilon^2)$. 此时特征函数 g 满足 $g_1 = (1+\varepsilon)g_2$ 而 $\lambda_0 = 2-\varepsilon$. 固定 $k=1$, 对于任意的 f, 有 $\overline{II}_1^{(1)}(f) = (1+\varepsilon)/(c(2-\varepsilon^2))$, $\overline{II}_1^{(2)}(f) = 3(1-1/c)/2 + f_2/(2f_1)$ 和 $\overline{II}_2^{(2)}(f) = 1/2 + (1-1/c)f_1/(2f_2)$. 特别地, 取 $f_1 = (1+\varepsilon)f_2$, 则 $\overline{II}_1^{(2)}(f) = 3(1-1/c)/2 + 1/(2(1+\varepsilon))$, $\overline{II}_2^{(2)}(f) = 1/2 + (1-1/c)(1+\varepsilon)/2$. 当 $\varepsilon = 0$ 时, 由 (2.2) 式经计算得到 $\sup_{c>1}(2/(4-3/c)) \leqslant \lambda_0 \leqslant \inf_{c>1}(2c)$, 即得出精确估计 $\lambda_0 = 2$(相当于取 $c=1$); 而由推论 2.1 得 $2 \geqslant \lambda_0 \geqslant 1/2$. 当 $\varepsilon > 0$ 时, 取 $c = (2-\varepsilon)(1+\varepsilon)/(2-\varepsilon^2)$, 由 (2.2) 式经计算同样得到精确估计 $\lambda_0 = 2-\varepsilon$. 而当 $\varepsilon = 1$ 时, 由推论 2.1 计算得到 $7/6 \geqslant \lambda_0 \geqslant 7/24$.

3 连续情形的高阶特征值

考虑有限区间 (p,q) 上微分算子 L 的高阶 Dirichlet 特征值 $\lambda_n = \inf\{D(f) : f \in C^1(p,q) \cap C[p,q], f(p) = f(q) = 0, \pi(f^2) = 1, \pi(fg_i) = 0, i = 0,1\cdots,n-1\}$, 其中 g_i 为 (p,q) 上相应于 λ_i

的特征函数, 即 $Lg_i = -\lambda_i g_i$. 我们的想法是: 因为相应于 λ_n 的特征函数 g_n 在 (p,q) 上有 n 个零点 (见文献 [1] 第 5 章定理 19), 可依照 g_n 的零点将区间 (p,q) 分为 $n+1$ 个子区间, 从而把 λ_n 的研究归结为子区间上的第一 Dirichlet 特征值问题. 具体地, 在 (p,q) 上任意固定 n 个点 $x_1 < \cdots < x_n$, 记 $x_0 = p$, $x_{n+1} = q$, 考虑 (x_i, x_{i+1}) 上的微分算子 L, 在边界上施加 Dirichlet 条件. 将 (x_i, x_{i+1}) 上的 Dirichlet 主特征值记为 $\lambda_0(x_i, x_{i+1})$.

定理 3.1　设 a, b 在有限区间 $[p,q]$ 上连续, $a > 0$, 则

$$\inf_{p<x_1<\cdots<x_n<q}\max_{0\leqslant i\leqslant n}\lambda_0(x_i,x_{i+1}) = \lambda_n = \sup_{p<x_1<\cdots<x_n<q}\min_{0\leqslant i\leqslant n}\lambda_0(x_i,x_{i+1}),$$

证　将文献 [1] 第 5 章定理 19 应用于 $p(x) = e^{C(x)}$, $q(x) \equiv 0$ 和 $\rho(x) = p(x)/a(x)$ 知, 对应于 λ_n 的特征函数 g_n 在 (p,q) 上恰有 n 个零点, 依次记为 $x_1', \cdots, x_n'$, 再记 $x_0' = p$, $x_{n+1}' = q$, 则必存在 i 和 j 分别满足 $x_i \leqslant x_i' < x_{i+1}' \leqslant x_{i+1}$ 和 $x_j' \leqslant x_j < x_{j+1} \leqslant x_{j+1}'$, 即 $(x_i', x_{i+1}') \subseteq (x_i, x_{i+1})$ 和 $(x_j, x_{j+1}) \subseteq (x_j', x_{j+1}')$. 一方面, 由第一 Dirichlet 特征值关于区间的单调性知, $\lambda_0(x_i', x_{i+1}') \geqslant \lambda_0(x_i, x_{i+1})$ 和 $\lambda_0(x_j, x_{j+1}) \geqslant \lambda_0(x_j', x_{j+1}')$. 另一方面, 注意到在区间 $(x_k', x_{k+1}')\,(k = 0, \cdots, n)$ 上仍有 $Lg_n = -\lambda_n g_n$, 而 g_n 在此区间上并无零点, 所以 g_n 是对应于该区间上第一 Dirichlet 特征值的特征函数, 且 $\lambda_n = \lambda_0(x_k', x_{k+1}')$, 因此 $\lambda_0(x_j, x_{j+1}) \geqslant \lambda_n \geqslant \lambda_0(x_i, x_{i+1})$, 进而再由取点的任意性得

$$\inf_{p<x_1<\cdots<x_n<q}\max_{0\leqslant i\leqslant n}\lambda_0(x_i,x_{i+1}) \geqslant \lambda_n \geqslant \sup_{p<x_1<\cdots<x_n<q}\min_{0\leqslant i\leqslant n}\lambda_0(x_i,x_{i+1}).$$

特别地, 当 $x_i = x_i'\,(i = 1, 2, \cdots, n)$ 时, 推出上式是等式即定理结论成立.

由定理 3.1 和推论 1.1 立刻可得 λ_n 的显式估计.

推论 3.1　令

$$\delta_i'(c) = \sup_{x\in(x_i,c)}\int_{x_i}^{x} e^{-C(y)}dy\int_x^c \frac{e^{C(u)}}{a(u)}du, \qquad \delta_i''(c) = \sup_{x\in(c,x_{i+1})}\int_x^{x_{i+1}} e^{-C(y)}dy\int_c^x \frac{e^{C(u)}}{a(u)}du,$$

则在定理 3.1 的假定之下, 有

$$\inf_{p<x_1<\cdots<x_n<q}\max_{0\leqslant i\leqslant n}\delta_i'(c_i)^{-1} \geqslant \lambda_n \geqslant \sup_{p<x_1<\cdots<x_n<q}\min_{0\leqslant i\leqslant n}\left(4\delta_i'(c_i)\right)^{-1},$$

其中 c_i 是方程 $\delta_i'(c) = \delta_i''(c)$, $c \in (x_i, x_{i+1})$ 的惟一解 $(i = 0, 1, \cdots, n)$.

例 3.1　设 $a(x) \equiv 1$, $b(x) \equiv 0$. 取 $x_i = i/(n+1)\,(i = 1, 2, \cdots, n)$, 则 $c_i = (x_i + x_{i+1})/2 = (2i+1)/(2(n+1))$ 且 $\delta_i'(c_i) = 1/(16(n+1)^2)(i = 0, 1, \cdots, n)$. 故由推论 3.1 得 $4(n+1)^2 \leqslant \lambda_n \leqslant 16(n+1)^2$. 精确值是 $\lambda_n = (n+1)^2\pi^2 \approx 9.8696(n+1)^2$, 相应的特征函数是 $f(x) = \sin\left((n+1)\pi x\right)$.

致谢　感谢审稿人的宝贵意见和建议.

参　考　文　献

1 Egorov Y, Kondratiev V. On Spectral Theory of Elliptic Operators. Berlin: Birkhäuser Verlag, 1996

2 陈木法. 第一特征值的显式估计. 中国科学, A 辑, 2000, 30(9): 769~776

3 陈木法. 一维情形第一特征值的变分公式及逼近定理. 中国科学, A 辑, 2001, 31(1): 28~36

4 Chen M F, Wang F Y. Estimation of spectral gap for elliptic operators. Trans Amer Math Soc, 1997, 349(3): 1239~1267

5 Opic B, Kufner A. Hardy-type Inequalities. New York: Longman, 1990

6 陈木法. 第一特征值对偶变分公式的分析证明 (一维情形). 中国科学, A 辑, 1999, 29(4): 327~336