单生过程首中时的各阶矩*

张余辉

(北京师范大学数学系,100875,北京//34岁,男,副教授)

摘要 给出了单生过程首中时多项式阶矩和指数阶矩的显式表达,讨论了4个判别准则的概率意义,并得到了单生过程指数遍历的一个显式判别准则.

关键词 指数遍历;单生过程;首中时;矩

分类号 O 211.6

本文只考虑不可约、全稳定且保守的 Q 矩阵,即所有 $i \in \mathbf{Z}_+$ 满足: $q_i = -q_{ii} = \sum_{j \neq i} q_{ij} < \infty$. 单生过程的 Q 矩阵 $Q = (q_{ij}: i, j \in \mathbf{Z}_+)$ 则是所有 $i \in \mathbf{Z}_+$ 和 $j \geq 2$ 有: $q_{i,i+1} > 0$, $q_{i,i+j} = 0$. 对 $0 \leq k < n (k, n \in \mathbf{Z}_+)$, 定义 $q_n^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} q_{nj}$, 再定义

$$m_0 = \frac{1}{q_{01}}, \quad m_n = \frac{1}{q_{n,n+1}}\left(1 + \sum_{k=0}^{n-1} q_n^{(k)} m_k\right), \quad n \geq 1,$$

$$F_n^{(n)} = 1, \quad F_n^{(i)} = \frac{1}{q_{n,n+1}} \sum_{k=i}^{n-1} q_n^{(k)} F_k^{(i)}, \quad 0 \leq i < n,$$

$$d_0 = 0, \quad d_n = \frac{1}{q_{n,n+1}}\left(1 + \sum_{k=0}^{n-1} q_n^{(k)} d_k\right), \quad n \geq 1.$$

此3组记号有如下关系: $m_n = q_{01}^{-1} F_n^{(0)} + d_n (n \in \mathbf{Z}_+)$. 引入这些记号是为了刻画单生过程的惟一性、常返性、遍历性和强遍历性的[1-4]. 首先,过程惟一当且仅当 $R := \sum_{n=0}^{\infty} m_n = \infty$. 其次,假定 Q-矩阵正则且不可约,则过程常返当且仅当 $\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(0)} = \infty$; 过程遍历当且仅当 $d := \sup_{k \in \mathbf{Z}_+} \left(\sum_{n=0}^{k} d_n\right) / \left(\sum_{n=0}^{k} F_n^{(0)}\right) < \infty$; 过程强遍历当且仅当 $\sup_{k \in \mathbf{Z}_+} \sum_{n=0}^{k} (F_n^{(0)} d - d_n) < \infty$. 这4个判别准则都是显式的(即只依赖于 Q 矩阵而没有使用试验函数)和可计算的. 这些优点使得单生过程成为研究较复杂过程的一个有用工具[1,5].

我们自然要关心上述记号和判别准则的概率意义. 为此,需要介绍一些概念.

给定不可约 Q 矩阵 $Q = (q_{ij})$. 令 $(X(t))_{t \geq 0}$ 为定义在概率空间 $(\Omega, \mathbf{F}, P)$ 上相应的马氏链. 其相继的跳时刻定义如下:

$$\eta_0 \equiv 0, \quad \eta_n = \inf\{t: t > \eta_{n-1}, \quad X(t) \neq X(\eta_{n-1})\}, \quad n \geq 1.$$

若 Q 矩阵正则,我们知道飞跃点 $\eta := \lim_{n \to \infty} \eta_n = \infty$. 设 H 为 $\mathbf{Z}_+$ 的一非空有限子集,定义击中

* 国家"九七三"重大基础研究计划基金资助项目;国家自然科学基金资助项目(10121101,10101003);教育部博士点基金资助项目(20010027007)

收稿日期:2002-11-19

时为 $\sigma_H = \inf\{t \geq \eta_1 : X(t) \in H\}$. 简记 $\sigma_{\{i\}}$ 为 σ_i. 定义 i 的首中时为：$\tau_i = \inf\{t > 0 : X(t) = i\}$. 显然，若出发点不是 i，则 $\sigma_i = \tau_i$.

文献[6] 证明了 $m_n = E_n\sigma_{n+1} = E_n\tau_{n+1}$, $R = E_0\sigma_\infty$, 其中 $\sigma_\infty := \lim_{n\to\infty}\sigma_n = \lim_{n\to\infty}\tau_n$ (极限以概率 1 存在)，故 σ_∞ 可看作 ∞ 的首达时. 注意几乎处处有 $\sigma_\infty = \eta$. 而且

$$P_0(\sigma_0 < \infty) = 1 - \left(\sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(0)}\right)^{-1}.$$

因此，我们现在能够更好地理解惟一性判别准则和常返性判别准则的概率意义. 那么，遍历和强遍历的判别准则又怎样从概率意义来理解呢？

考虑 0 的首中时的 n 阶矩：$m_i^{(n)} = E_i\tau_0^n \ (i \geq 1)$. 定义

$$d_0^{(n)} = 0, \quad d_i^{(n)} = \frac{1}{q_{i,i+1}}\left(m_i^{(n-1)} + \sum_{k=0}^{i-1} q_i^{(k)} d_k^{(n)}\right), \quad i \geq 1. \tag{1}$$

用归纳法可证

$$F_i^{(j)} = \sum_{k=j+1}^{i} \frac{F_i^{(k)} q_k^{(j)}}{q_{k,k+1}}, \quad i > j \geq 0; \qquad d_i^{(n)} = \sum_{k=1}^{i} \frac{F_i^{(k)} m_k^{(n-1)}}{q_{k,k+1}}, \quad i \geq 1. \tag{2}$$

再令

$$d^{(n)} = \sup_{i\geq 1} \frac{\sum_{j=0}^{i-1} d_j^{(n)}}{\sum_{j=0}^{i-1} F_j^{(0)}} = \sup_{i\geq 0} \frac{\sum_{j=0}^{i} d_j^{(n)}}{\sum_{j=0}^{i} F_j^{(0)}}. \tag{3}$$

注意到 $m_i^{(0)} = 1 \ (i \geq 1)$. 则由式(1)，可得 $d_j^{(1)} = d_j \ (j \geq 0)$. 进而，由式(3)，得到 $d^{(1)} = d$.

下面是关于首中时的多项式阶矩的结果.

定理 1　单生过程首中时的 n 阶矩可由如下表达式给出：

$$E_1\tau_0^n = n d^{(n)} = E_1\sigma_0^n, \quad E_i\tau_0^n = n\sum_{j=0}^{i-1}\left(F_j^{(0)} d^{(n)} - d_j^{(n)}\right) = E_i\sigma_0^n, \quad i \geq 1. \tag{4}$$

$$E_0\sigma_0^n = n!\left(q_{01}^{-n} + \sum_{k=1}^{n} (k!\, q_{01}^{n-k})^{-1} E_1\sigma_0^k\right), \quad n \geq 1. \tag{5}$$

特别地，下面的表达式成立：

$$E_1\sigma_0 = E_1\tau_0 = d, \quad E_i\sigma_0 = E_i\tau_0 = \sum_{j=0}^{i-1}\left(F_j^{(0)} d - d_j\right), \quad i \geq 1. \tag{6}$$

$$E_0\sigma_0 = q_{01}^{-1} + E_1\sigma_0 = q_{01}^{-1} + d. \tag{7}$$

证　由文献[7]归纳得知，$(m_i^{(n)})$ 是下列方程组的最小非负解：

$$x_0^{(n)} = 0, \quad \sum_{k\neq i} q_{ik} x_k^{(n)} \leq q_i x_i^{(n)} - n x_i^{(n-1)}, \quad i \geq 1. \tag{8}$$

而且 $(m_i^{(n)})$ 使上述方程组等号成立，此时，将等式(8)变形为

$$x_0^{(n)} = 0, \quad q_{i,i+1}\left(x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)}\right) = \sum_{k=0}^{i-1} q_{ik}\left(x_i^{(n)} - x_k^{(n)}\right) - n m_i^{(n-1)}, \quad i \geq 1.$$

则

$$x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)} = \frac{1}{q_{i,i+1}}\left(\sum_{j=0}^{i-1} q_i^{(j)}\left(x_{j+1}^{(n)} - x_j^{(n)}\right) - n m_i^{(n-1)}\right). \tag{9}$$

一方面，由式(1)、(2)和(9)，可得

$$
\begin{aligned}
x_{i+1}^{(n)}-x_i^{(n)} &= \sum_{j=0}^{i-1}\frac{F_i^{(i)}q_i^{(j)}}{q_{i,i+1}}(x_{j+1}^{(n)}-x_j^{(n)})-\frac{nF_i^{(i)}m_i^{(n-1)}}{q_{i,i+1}}=\\
&\sum_{j=0}^{i-2}\frac{F_i^{(i)}q_i^{(j)}}{q_{i,i+1}}(x_{j+1}^{(n)}-x_j^{(n)})+F_i^{(i-1)}(x_i^{(n)}-x_{i-1}^{(n)})-\frac{nF_i^{(i)}m_i^{(n-1)}}{q_{i,i+1}}=\\
&\sum_{j=0}^{i-2}\sum_{k=i-1}^{i}\frac{F_i^{(k)}q_k^{(j)}}{q_{k,k+1}}(x_{j+1}^{(n)}-x_j^{(n)})-n\sum_{k=i-1}^{i}\frac{F_i^{(k)}m_k^{(n-1)}}{q_{k,k+1}}=\cdots=\\
&\sum_{k=1}^{i}\frac{F_i^{(k)}q_k^{(0)}}{q_{k,k+1}}x_1^{(n)}-n\sum_{k=1}^{i}\frac{F_i^{(k)}m_k^{(n-1)}}{q_{k,k+1}}=F_i^{(0)}x_1^{(n)}-nd_i^{(n)},\ i\ge 1. \qquad (10)
\end{aligned}
$$

事实上,对所有的 $i\ge 0$,式(10)皆成立. 因此,

$$x_i^{(n)}=\sum_{j=0}^{i-1}F_j^{(0)}x_1^{(n)}-n\sum_{j=0}^{i-1}d_j^{(n)},\ i\ge 1. \qquad (11)$$

因为$(m_i^{(n)})$是式(8)的非负解,故由式(11)可知 $nd^{(n)}\le m_1^{(n)}$.

另一方面,令 $u_0=0$, $u_1=nd^{(n)}$ 且 $u_i=n\sum_{j=0}^{i-1}(F_j^{(0)}d^{(n)}-d_j^{(n)})\ (i\ge 2)$. 则可验证$(u_i)$是式(8)的一非负解. 由$(m_i^{(n)})$的最小性,推出 $m_1^{(n)}\le nd^{(n)}$.

综合以上,我们得出,$m_1^{(n)}=nd^{(n)}$. 再由式(11)知,前面所构造的解(u_i)正是$(m_i^{(n)})$,换而言之,首中时 n 阶矩的表达式是式(4). 式(5)也很容易验证. 而式(6)和(7)只是 $n=1$ 的特殊情形.

注 2 (i) 由文献[1]的定理 4.44 知,过程遍历当且仅当 $E_0\sigma_0<\infty$,过程强遍历当且仅当$\sup\limits_{i\ge 0}E_i\sigma_0<\infty$. 结合以上及式(6)和(7),立刻得到遍历的判别准则是 $d<\infty$,强遍历的判别准则是 $\sup\limits_{i\ge 1}\sum_{j=0}^{i-1}(F_j^{(0)}d-d_j)<\infty$. 这 2 个准则分别是文献[1]的定理 4.54 和文献[4]的定理 1.1. 在这里我们用这些记号的概率关系再次给出其证明.

(ii) 由和分比性质及式(2)和(3),可得

$$d\le\sup_{i\ge 1}\frac{d_i}{F_i^{(0)}}\le\sup_{k\ge 1}\frac{1}{q_k^{(0)}}=\frac{1}{\inf\limits_{k\ge 1}q_{k0}}.$$

所以,如果$\inf\limits_{k\ge 1}q_{k0}>0$,则 $d<\infty$,即过程遍历. 后面的研究将给出比之更强的结论.

现在考虑首中时的指数阶矩:$E_i\mathrm{e}^{\lambda\tau_0}$,其中 λ 是一正常数. 对所有 $0\le j<i$,定义 $q_i^{(j)}(\lambda):=q_i^{(j)}-\lambda$,

$$F_n^{(n)}(\lambda)=1,\quad F_n^{(i)}(\lambda)=\frac{1}{q_{n,n+1}}\sum_{k=i}^{n-1}q_n^{(k)}(\lambda)F_k^{(i)}(\lambda),\ 0\le i<n,$$

$$d_0(\lambda)=0,\quad d_n(\lambda)=\frac{1}{q_{n,n+1}}\Big(1+\sum_{k=0}^{n-1}q_n^{(k)}(\lambda)d_k(\lambda)\Big),\ n\ge 1.$$

令

$$d(\lambda)=\sup_{i\ge 1}\frac{\sum_{j=0}^{i-1}d_j(\lambda)}{\sum_{j=0}^{i-1}F_j^{(0)}(\lambda)}=\sup_{i\ge 1}\frac{\sum_{j=0}^{i}d_j(\lambda)}{\sum_{j=0}^{i}F_j^{(0)}(\lambda)}. \qquad (12)$$

类似于式(2),可归纳验证下式总成立:

$$F_i^{(j)}(\lambda) = \sum_{k=j+1}^{i} \frac{F_i^{(k)}(\lambda)\, q_k^{(j)}(\lambda)}{q_{k,k+1}},\ i > j \geq 0;\quad d_i(\lambda) = \sum_{k=1}^{i} \frac{F_i^{(k)}(\lambda)}{q_{k,k+1}},\ i \geq 1. \tag{13}$$

定理 3　假定存在充分小的 $\lambda > 0$ 使得 $\sum_{j=0}^{i-1} F_j^{(0)}(\lambda) > 0$ 对一切 $i \geq 1$ 成立. 则下列关于 $E_i e^{\lambda\tau_0}$ 的表达式成立:

$$E_1 e^{\lambda\tau_0} = 1 + \lambda d(\lambda),\ E_i e^{\lambda\tau_0} = 1 + \lambda \sum_{j=0}^{i-1} \left(F_j^{(0)}(\lambda)\, d(\lambda) - d_j(\lambda) \right),\ i \geq 1. \tag{14}$$

$$E_0 e^{\lambda\sigma_0} = \frac{q_{01}}{q_{01} - \lambda} E_1 e^{\lambda\sigma_0} = \frac{q_{01}}{q_{01} - \lambda} E_1 e^{\lambda\tau_0} = \frac{q_{01}}{q_{01} - \lambda} (1 + \lambda d(\lambda)). \tag{15}$$

证　将 $E_i e^{\lambda\tau_0}$ 记为 v_i. 则 (v_i) 是下列方程的不小于 1 的最小解:

$$x_0 = 1,\quad \sum_{k \neq i} q_{ik} (x_k - x_i) \leq - \lambda x_i,\ i \geq 1. \tag{16}$$

事实上, (v_i) 满足等式 (16), 变形之, 得到

$$x_0 = 1,\quad q_{i,i+1}(x_{i+1} - x_i) = \sum_{k=0}^{i-1} q_{ik}(x_i - x_k) - \lambda x_i,\ i \geq 1.$$

进而,

$$x_{i+1} - x_i = \frac{1}{q_{i,i+1}} \left(\sum_{j=0}^{i-1} q_i^{(j)} (x_{j+1} - x_j) - \lambda x_i \right) =$$

$$\frac{1}{q_{i,i+1}} \left(\sum_{j=0}^{i-1} (q_i^{(j)} - \lambda)(x_{j+1} - x_j) - \lambda \right) = \frac{1}{q_{i,i+1}} \left(\sum_{j=0}^{i-1} q_i^{(j)}(\lambda)(x_{j+1} - x_j) - \lambda \right). \tag{17}$$

一方面, 由式 (13) 和 (17), 可证

$$x_{i+1} - x_i = \sum_{k=1}^{i} \frac{F_i^{(k)}(\lambda)\, q_k^{(0)}(\lambda)}{q_{k,k+1}} (x_1 - x_0) - \lambda \sum_{k=1}^{i} \frac{F_i^{(k)}(\lambda)}{q_{k,k+1}} =$$

$$F_i^{(0)}(\lambda)(x_1 - 1) - \lambda d_i(\lambda),\ i \geq 1. \tag{18}$$

注意到式 (18) 对所有 $i \geq 0$ 都成立. 因此,

$$x_i - 1 = \sum_{j=0}^{i-1} F_j^{(0)}(\lambda)(x_1 - 1) - \lambda \sum_{j=0}^{i-1} d_j(\lambda),\ i \geq 1. \tag{19}$$

因为 (v_i) 是方程 (16) 的解, 则由定理的假设和式 (19) 知 $1 + \lambda d(\lambda) \leq v_1$.

另一方面, 令 $u_0 = 1$, $u_1 = 1 + \lambda d(\lambda)$ 且 $u_i = 1 + \lambda \sum_{j=0}^{i-1} \left(F_j^{(0)}(\lambda)\, d(\lambda) - d_j(\lambda) \right)$ $(i \geq 2)$. 则可验证 (u_i) 是方程 (16) 的不小于 1 的解. 由 (v_i) 的最小性, 推出 $v_1 \leq 1 + \lambda d(\lambda)$.

综合以上, 得出 $v_1 = 1 + \lambda d(\lambda)$. 进而, 所构造的解 (u_i) 正是 (v_i), 即 $E_i e^{\lambda\tau_0}$ 的表达式是 (14). 式 (15) 是很容易验证的.

推论 4　在定理 3 的假定之下, 则单生过程指数遍历当且仅当 $d(\lambda) < \infty$.

证　由文献[1]的定理 4.44 知, 过程指数遍历当且仅当 $E_0 e^{\lambda\sigma_0} < \infty$. 结合式 (15) 结论立刻得证.

现继续考虑注 2 的 (ii). 如果 $c := \inf_{k \geq 1} q_{k0} > 0$, 取 $\lambda \in (0, c)$, 则对一切 $0 \leq j < i$ 有 $q_i^{(j)}(\lambda) > 0$; 继而, 对所有 $i \geq 0$ 有 $F_i^{(0)}(\lambda) > 0$. 因此, 定理 3 的假定成立. 由和分比性质及式 (12) 和 (13), 得到

$$d(\lambda) \le \sup_{k\ge1} \frac{d_i(\lambda)}{F_i^{(0)}(\lambda)} \le \sup_{k\ge1} \frac{1}{q_k^{(0)}(\lambda)} = \frac{1}{c-\lambda} < \infty.$$

由推论 4 知,此单生过程是指数遍历的. 事实上,我们有下面更强的结论.

命题 5 给定正则不可约的 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$. 如果存在 $k\ge0$ 满足 $c:=\inf_{i\ne k} q_{ik}>0$,则相应的 Q 过程是强遍历的,而且 $E_i\tau_k\le1/c\ (i\ne k)$, $E_k\sigma_k\le1/q_k+1/c$.

证 令 $y_k=0$ 和 $y_i=1/c\ (i\ne k)$. 可验证(y_i)是下列方程的一个非负有界解:

$$\sum_j q_{ij}y_j \le -1, \quad i\ne k.$$

因此,由文献[1]的定理 4.45 知,该过程是强遍历的. 由$(E_i\tau_k)$是以上方程的最小非负解,知第 2 个结论成立. 再由此,不难得到最后一个结论.

感谢在本文的完成过程中与陈木法和王凤雨教授及毛永华副教授进行的有益讨论.

参考文献

[1] Chen Mufa. From Markov Chains to Non-Equilibrium Particle Systems[M]. Singapore: World Scientific, 1992

[2] Chen Mufa. Single birth processes[J]. Chinese Ann Math. 1999, 20B:77

[3] Chen Mufa. Explicit criteria for several types of ergodicity[J]. Chinese J Appl Stat, 2001, 17:113

[4] Zhang Yuhui. Strong ergodicity for single-birth processes[J]. J Appl Prob, 2001, 38:270

[5] Yan Shijian, Chen Mufa. Multidimensional Q-processes[J]. Chinese Ann Math, 1986, 7B:90

[6] Zhang Jiankang. On the generalized birth and death processes (Ⅰ)[J]. Acta Math Sci, 1984, 4:241

[7] Mao Yonghua. Ergodic degrees for continuous-time Markov chains[J]. Preprint, 2002

MOMENTS OF THE HITTING TIME FOR SINGLE BIRTH PROCESSES

Zhang Yuhui

(Department of Mathematics, Beijing Normal University, 100875, Beijing, China)

Abstract The explicit expressions are presented respectively on the polynomial moments and exponential moments of the first hitting time for single birth processes. The probabilistic meanings of the four criteria are all explained and an explicit criterion for the exponential ergodicity of single birth processes is obtained.

Key words exponentially ergodic; single birth process; first hitting time; moment