生灭过程的变异性*

张余辉
(北京师范大学数学系, 100875, 北京//32 岁, 男, 副教授)

摘要 设$\{X(t): t\geqslant 0\}$是零初值的生灭过程, 生速为 b_i, 死速为 a_i. 证明了若存在非负常数 c 使得b_i-a_i+ci 为i 的增函数且$a_i\geqslant ci(i\geqslant 0)$, 则 $\mathrm{Var}X(t)\geqslant \mathrm{E}X(t)$; 或者 b_i-a_i+ci 为 i 的减函数且$a_i\leqslant ci(i\geqslant 0)$, 则 $\mathrm{Var}X(t)\leqslant \mathrm{E}X(t)$.

关键词 生灭过程; 向前方程; 正相关性
分类号 O 211.62

设$\{X(t): t\geqslant 0\}$是零初值, 生速为 $\lambda_i(i\geqslant 0)$的纯生过程, 即满足下式

$$\lim_{s\downarrow 0}\frac{1}{s}P(X(t+s)=j\mid X(t)=i)=\begin{cases}\lambda_i, & j=i+1;\\ 0, & j\neq i, i+1.\end{cases}\tag{1}$$

假定 $\lambda_i<\infty(i\geqslant 0)$ 且 $\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_i^{-1}=\infty$, 即过程是非爆炸的. 如果 $\lambda_i=\lambda(i\geqslant 0)$, 则$\{X(t)\}$是速率为 λ 的时齐 Poisson 过程. 我们知道, Poisson 过程有 Poisson 分布, 即 $P_{0n}(t)=\mathrm{e}^{-\lambda t}(\lambda t)^n/n!$ $(n\geqslant 0)$, 则 $\mathrm{E}X(t)=\mathrm{Var}X(t)=\lambda t(t\geqslant 0)$, 其中 E, Var 分别表示从 $X(0)=0$ 出发的数学期望和方差. 但在实际中, 分析那些近似服从 Poisson 分布的数据时, 发现经常出现 $\mathrm{Var}X(t)>\mathrm{E}X(t)$的情况. 因此, 文献[1]研究了一个特例: $\lambda_i=\lambda(i\geqslant 1)$, 经过直接计算证明了对所有 $t\geqslant 0$,

$$\mathrm{Var}X(t)\geqslant \mathrm{E}X(t),\quad \lambda_1\geqslant\lambda_0,\tag{2}$$

$$\mathrm{Var}X(t)\leqslant \mathrm{E}X(t),\quad \lambda_1\leqslant\lambda_0.\tag{3}$$

若 $\lambda_1\neq\lambda_0$, 上 2 式中的不等号是严格的, 同时猜测: 速率是增序列($\lambda_0\leqslant\lambda_1\leqslant\dots$)时, 式(2)成立(称为 over-dispersion); 速率是减序列($\lambda_0\geqslant\lambda_1\geqslant\dots$)时, 式(3)成立(称为 under-dispersion).

文献[2]和[3]分别给出上述猜想的证明. 文献[3]构造了一个二维马氏链, 利用随机可比(或单调)和正相关性来证明猜想. 文献[2]是用 Kolmogorov 向前方程和正相关性来证明结论. 下面来看一个例子.

例 1 在式(1)中取 $\lambda_i=b+\lambda i(i\geqslant 0, b>0, \lambda>0)$. 显然, $\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_i^{-1}=\infty$. 经计算得(参看文献[4]) $\mathrm{E}X(t)=\frac{b}{\lambda}(\mathrm{e}^{\lambda t}-1)$, $\mathrm{E}X(t)^2=(\frac{b}{\lambda}(\mathrm{e}^{\lambda t}-1))^2+\frac{b}{\lambda}\mathrm{e}^{\lambda t}(\mathrm{e}^{\lambda t}-1)$, 所以, $\mathrm{Var}X(t)=\frac{b}{\lambda}\mathrm{e}^{\lambda t}(\mathrm{e}^{\lambda t}-1)\geqslant \mathrm{E}X(t)$.

本文中加上了死速, 即讨论生灭过程的情形. 实际上, 纯生过程可以视作广义生灭过程中

* 教育部博士点基金资助项目; 国家自然科学基金资助项目(19771008); 高校数学中心及霍英东教育基金资助项目
收稿日期: 2000-06-29

允许零死速的特例, 但生灭过程远比纯生过程复杂, 因为加上死速后, 使得过程的发展行为更不易把握, 所以研究生灭过程的变异性是很有意义的.

设$\{X(t): t\geqslant 0\}$是初始为$X(0)=0$的生灭过程, 其$\boldsymbol{Q}$矩阵为(约定$a_0=0$): $q_{i,i-1}=a_i>0(i\geqslant 1)$, $q_{i,i+1}=b_i>0(i\geqslant 0)$, $q_{i,i}=-(a_i+b_i)=:-q_i(i\geqslant 0)$, 其他的$q_{ij}$为 0. 记生灭过程的转移概率函数矩阵为$(P_{ij}(t))$. 对于正则过程, Kolmogorov 向前方程成立, 即

$$P_{ij}(t)=\delta_{ij}\mathrm{e}^{-q_it}+\sum_{k\neq j}\int_0^t P_{ik}(s)q_{kj}\mathrm{e}^{-q_j(t-s)}\mathrm{d}s\ (t\geqslant 0, i,j\in E).$$

记$P(t)f(i)=\sum_j P_{ij}(t)f_j$, 由单调类定理得

$$P(t)f(i)=f_i\mathrm{e}^{-q_it}+\sum_j\sum_{k\neq j}\int_0^t P_{ik}(s)q_{kj}f_j\mathrm{e}^{-q_j(t-s)}\mathrm{d}s,\quad t\geqslant 0, i\in E, f\in\mathscr{E}_+,$$

其中$\mathscr{E}_+$表示非负可测函数全体. 若上式右端可以逐项求导, 则两边同时求导得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P(t)f(i)=\sum_k P_{ik}(t)[b_k(f_{k+1}-f_k)-a_k(f_k-f_{k-1})].$$

分别取$f_k=k, f_k=k^2$, 初值$i=0$, 立即得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{E}X(t)=\mathrm{E}[b(X(t))-a(X(t))],\tag{4}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{E}X(t)^2=2\mathrm{E}X(t)[b(X(t))-a(X(t))]+\mathrm{E}[b(X(t))+a(X(t))].\tag{5}$$

此处, 我们用$a(i)$和$b(i)$分别表示a_i和b_i. 下面讨论的生灭过程, 总假设(4)和(5)两式成立.

定理 对正则生灭过程$\{X(t): t\geqslant 0\}$, 若存在非负常数c使得(i) b_i-a_i+ci为i的增函数且$a_i\geqslant ci(i\geqslant 0)$, 则$\mathrm{Var}X(t)\geqslant\mathrm{E}X(t)(t\geqslant 0)$; 或者(ii) b_i-a_i+ci为i的减函数且$a_i\leqslant ci(i\geqslant 0)$, 则$\mathrm{Var}X(t)\leqslant\mathrm{E}X(t)(t\geqslant 0)$. 特别地, 当死速是线性的即$a_i=ci(i\geqslant 0)$, 则生速$b_i$是$i$的增函数时, $\mathrm{Var}X(t)\geqslant\mathrm{E}X(t)(t\geqslant 0)$; b_i是i的减函数时, $\mathrm{Var}X(t)\leqslant\mathrm{E}X(t)(t\geqslant 0)$; b_i恒为常数时, $\mathrm{Var}X(t)=\mathrm{E}X(t)(t\geqslant 0)$.

证 记$F(t)=\mathrm{Var}X(t)-\mathrm{E}X(t)$. 一方面, 由(4)和(5)两式得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(t)=&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{E}X(t)^2-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{E}X(t))^2-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{E}X(t)=\\&2\mathrm{E}X(t)[b(X(t))-a(X(t))]-2\mathrm{E}X(t)\cdot\\&\mathrm{E}[b(X(t))-a(X(t))]+2\mathrm{E}a(X(t)),\end{aligned}$$

进而,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^{2ct}F(t))=&2\mathrm{e}^{2ct}(\mathrm{E}X(t)[b(X(t))-a(X(t))+cX(t)]-\\&\mathrm{E}X(t)\cdot\mathrm{E}[b(X(t))-a(X(t))+cX(t)]+\mathrm{E}[a(X(t))-cX(t)]).\end{aligned}\tag{6}$$

另一方面, 在全序状态空间中, 每一概率测度都有正相关性. 现在的状态空间是$E=\{0,1,\cdots\}$, 所以, 生灭过程不仅单调且保持正相关性. 显然, 单点概率测度$\delta(x,\mathrm{d}y)$是正相关的, 因此, 生灭过程$P(t)$满足

$$P(t)fg(x)\geqslant P(t)f(x)\cdot P(t)g(x),\quad t\geqslant 0, f,g\in\mathscr{M}, x\in E,$$

其中$\mathscr{M}$为E上全体单调函数集合. 特别地, 取$x=0$, 则

$$\mathrm{E}f(X(t))g(X(t))\geqslant\mathrm{E}f(X(t))\cdot\mathrm{E}g(X(t)),\quad t\geqslant 0, f,g\in\mathscr{M}\tag{7}$$

当 $b_i - a_i + ci$ 是i 的增函数且$a_i \geqslant ci(i \geqslant 0)$时, 由于$f(i) = i$ 也是i 的增函数, 因此在式(7)中取$f(i) = i$ 和$g(i) = b_i - a_i + ci$, 则

$$\mathrm{E}X(t)[b(X(t)) - a(X(t)) + cX(t)] \geqslant \mathrm{E}X(t) \cdot \mathrm{E}[b(X(t)) - a(X(t)) + cX(t)].$$

再由式(6)和 $F(0) = 0$ 得到 $e^{2ct}F(t) \geqslant 0$, 显然, $e^{2ct} > 0$, 所以 $F(t) \geqslant 0$, 即

$$\mathrm{Var}X(t) \geqslant \mathrm{E}X(t) \quad (t \geqslant 0).$$

当 $b_i - a_i + ci$ 是i 的减函数且$a_i \leqslant ci(i \geqslant 0)$时, 由于$-(b_i - a_i + ci)$是 i 的增函数, 因此在式(7)中取$f(i) = i$ 和$g(i) = -(b_i - a_i + ci)$, 则

$$\mathrm{E}X(t)[b(X(t)) - a(X(t)) + cX(t)] \leqslant \mathrm{E}X(t) \cdot \mathrm{E}[b(X(t)) - a(X(t)) + cX(t)].$$

再结合式(6)和 $F(0) = 0$ 得 $e^{2ct}F(t) \leqslant 0$, 从而 $F(t) \leqslant 0$, 即

$$\mathrm{Var}X(t) \leqslant \mathrm{E}X(t)(t \geqslant 0).$$

定理最后一部分的结论是已证结果的推论.

注　在此定理中特别地取 $a_i = 0(i \geqslant 0)$, 即 $c = 0$, 则为纯生过程的情形, 所以关于纯生过程的结论可看成此定理的一个简单推论.

下面看一些生灭过程的一些例子(可参看文献[4]).

例 2　设 $a_i = ai$, $b_i = c + bi(i \geqslant 0)$, 其中 $a, b, c > 0$ 但 $a \neq b$. 可验证该生灭过程是正则的. 经计算得到当 $b < a$ 时,

$$\mathrm{E}X(t) = \frac{c}{b} \cdot \frac{\gamma - \sigma}{1 - \gamma},$$

$$\mathrm{E}X(t)^2 = \frac{c}{b}\left(\frac{c}{b} + 1\right)\left(\frac{\gamma - \sigma}{1 - \gamma}\right)^2 + \frac{c}{b} \cdot \frac{\gamma - \sigma}{1 - \gamma},$$

其中 $\gamma = \frac{b}{a}$, $\sigma = e^{-(a-b)t}\frac{b}{a}$. 进而,

$$\mathrm{Var}X(t) = \frac{c}{b} \cdot \frac{\gamma - \sigma}{1 - \gamma} \cdot \frac{1 - \sigma}{1 - \gamma},$$

$$\mathrm{Var}X(t) - \mathrm{E}X(t) = \frac{c}{b}\left(\frac{\gamma - \sigma}{1 - \gamma}\right)^2 \geqslant 0.$$

当 $a < b$ 时,

$$\mathrm{E}X(t) = \frac{c}{b} \cdot \frac{\gamma - \sigma}{\sigma(1 - \gamma)},$$

$$\mathrm{E}X(t)^2 = \frac{c}{b}\left(\frac{c}{b} + 1\right)\left(\frac{\gamma - \sigma}{\sigma(1 - \gamma)}\right)^2 + \frac{c}{b} \cdot \frac{\gamma - \sigma}{\sigma(1 - \gamma)},$$

其中 $\gamma = \frac{a}{b}$, $\sigma = e^{-(b-a)t}\frac{a}{b}$. 进而,

$$\mathrm{Var}X(t) = \frac{c}{b}\left(\frac{\gamma - \sigma}{\sigma(1 - \gamma)}\right)^2 + \frac{c}{b} \cdot \frac{\gamma - \sigma}{\sigma(1 - \gamma)},$$

$$\mathrm{Var}X(t) - \mathrm{E}X(t) = \frac{c}{b}\left(\frac{\gamma - \sigma}{\sigma(1 - \gamma)}\right)^2 \geqslant 0.$$

例 3　设 $a_i = bi$, $b_i = c + bi(i \geqslant 0)$, 其中 $b, c > 0$. 易验证该生灭过程是正则的. 经计算知

$$\mathrm{E}X(t) = ct, \quad \mathrm{E}X(t)^2 = c^2t^2 + cbt^2 + ct,$$

所以,

$$\mathrm{Var}X(t)=cbt^2+ct,\ \mathrm{Var}X(t)-\mathrm{E}X(t)=cbt^2\geqslant 0.$$

例4 设 $a_i=ai(i\geqslant 0)$, $b_i=b$, 其中 $a, b>0$. 易知该生灭过程亦是正则的. 再由文献[5]得

$$\mathrm{E}X(t)=\frac{b}{a}(1-\mathrm{e}^{-at}),\quad \mathrm{E}X(t)^2=\left(\frac{b}{a}(1-\mathrm{e}^{-at})\right)^2+\frac{b}{a}(1-\mathrm{e}^{-at}),$$

因此,

$$\mathrm{Var}X(t)=\frac{b}{a}(1-\mathrm{e}^{-at})=\mathrm{E}X(t).$$

以上几个例子中死速都是线性增长的, 生速也是线性增的或是常数, 因此都是定理的特例, 由于计算的困难和复杂性, 许多例子目前无法计算.

对陈木法教授的指导和帮助表示衷心的感谢.

参考文献

[1] Faddy M J. On variation in Possion processes[J]. Math Sci, 1994, 19(1): 47

[2] Ball F. A note on variation in birth processes[J]. Math Sci, 1995, 20(1): 50

[3] Xia Aihua. On variability in birth processes[J]. Chinese J Appl Prob Stat, 1996, 12(3): 279

[4] Anderson W J. Continuous-Time Markov Chains[M]. [S.n.]: Springer-Verlag, 1991

[5] 王梓坤. 生灭过程与马尔科夫链[M]. 北京: 科学出版社, 1980

ON VARIATION IN BIRTH-DEATH PROCESSES

Zhang Yuhui

(Department of Mathematics, Beijing Normal University, 100875, Beijing, China)

Abstract Let $\{X(t): t\geqslant 0\}$ with $X(0)=0$ be a birth-death process with birth rate b_i and death rate a_i. It is proved that if there exists such a nonnegative constant that b_i-a_i+ci is an increasing function with respect to i and $a_i\geqslant ci(i\geqslant 0)$, then $\mathrm{Var}X(t)\geqslant \mathrm{E}X(t)$ holds for any $t\geqslant 0$; or b_i-a_i+ci is decreasing and $a_i\leqslant ci(i\geqslant 0)$, then the reverse inequality holds.

Key words birth-death processes; forward equations; positive correlation