最小 q 过程的随机可比性*

张余辉
(北京师范大学数学系, 100875, 北京; 31 岁, 男, 副教授)

摘要 在较一般的条件下给出了 2 个最小 q 过程随机可比的充分和必要条件; 同时, 基于随机可比条件, 得到了零流出的 1 个判别法.

关键词 最小 q 过程; 随机可比; 零流出
分类号 O 211.62

文献[1]在较一般的条件下研究了 2 个正则 q 对决定的 q 过程的随机可比性, 文献[2]在离散状态空间上研究 2 个 Q 矩阵决定的最小 Q 过程的同一问题; 本文在文献[1]的基础上给出一般状态空间上 2 个最小 q 过程随机可比的充分和必要条件.

假定 $(E, \mathscr{E})$ 是赋予可测半序 $\leqslant$ 的 Polish 空间, 且集合 $\{(x_1, x_2) \in E \times E: x_1 \leqslant x_2\}$ 是 $E \times E$ 上的可测闭集. 记有界单调可测实函数的全体为 $\mathscr{M}$. 如果可测集 A 的示性函数 $I_A \in \mathscr{M}$, 则记为 $A \in \mathscr{M}$.

定义 1 2 个 q 过程 $P_1(t)$ 和 $P_2(t)$ 称为随机可比的, 如果

$$P_1(t)f(x_1) \leqslant P_2(t)f(x_2), \quad f \in \mathscr{M}, \ x_1 \leqslant x_2, \quad t \geqslant 0,$$

其中 $P_k(t)f(x) = \int P_k(t, x, \mathrm{d}y)f(y)$. 简记为 $P_1(t) \leqslant P_2(t)$.

定义 2 2 个 q 对 $(q_1(x), q_1(x, \mathrm{d}y))$ 和 $(q_2(x), q_2(x, \mathrm{d}y))$ 称为可比的, 如果任意 $A \in \mathscr{M}$ 和 $x_1 \leqslant x_2$, 当 $x_1, x_2 \in A$ 或 $x_1, x_2 \notin A$ 时, 不等式

$$\Omega_1 I_A(x_1) \leqslant \Omega_2 I_A(x_2)$$

成立, 其中算子 Ω_k 定义为 $\Omega_k f(x) = \int q_k(x, \mathrm{d}y)f(y) - q_k(x)f(x)$, $x \in E$, f 为有界 $\mathscr{E}$ 可测函数.

为研究的需要, 我们要作一些假设(参看文献[3]的假设 5.30 和文献[1]的假设 1.4).

假设 1 存在 G_δ 集列 $\{E_n\}_1^\infty$ 使得 $E_n \uparrow E\ (n \to \infty)$ 且任意 $n \geqslant 1$,

(i) $\sup\limits_{x \in E_n} q_k(x) < \infty$, $k = 1, 2$.

(ii) 集合 $H_n = \{y \in E \setminus E_n:$ 存在 $x \in E_n$ 使得 $x \leqslant y\} \in \mathscr{M}$. 进一步, 如果 H_n 非空, 则存在 $b_n \in H_n$, 使得任意 $x \in E_n$ 有 $x \in b_n$.

定理 1 设 $P_1^{\min}(t)$ 为全稳定 q 对 $(q_1(x), q_1(x, \mathrm{d}y))$ 决定的最小 q 过程, $P_2(t)$ 是正则 q 对 $(q_2(x), q_2(x, \mathrm{d}y))$ 唯一决定的 q 过程即最小 q 过程. 在假设 1 之下, $P_1^{\min}(t) \leqslant P_2(t)$, 当且仅当 $(q_1(x), q_1(x, \mathrm{d}y))$ 与 $(q_2(x), q_2(x, \mathrm{d}y))$ 可比.

证 只需将文献[1]中的式(2.3)改成下列 2 式:

* 国家自然科学基金资助项目(19771008); 教育部博士点基金资助项目; 高校数学中心及霍英东教育基金资助项目
收稿日期: 1999-11-08

$$\lim_{n\to\infty} P_1^{(n)}(t, x, A \cap (E_n \cup \{b_n\})) \geqslant P_1^{\min}(t, x, A), \quad x \in E, A \in \mathscr{E}, t \geqslant 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} P_2^{(n)}(t, x, A \cap (E_n \cup \{b_n\})) \geqslant P_2(t, x, A), \quad x \in E, A \in \mathscr{E}, t \geqslant 0,$$

即可由文献[1]定理 1.5 的证明直接得证此定理.

定理 2　设$(q_k(x), q_k(x, \mathrm{d}y))$是全稳定 q 对, $P_k^{\min}(t)$为相应的最小 q 过程$(k = 1, 2)$.

1) 如果 $P_1^{\min}(t) \leqslant P_2^{\min}(t)$, 则$(q_1(x), q_1(x, \mathrm{d}y))$与$(q_2(x), q_2(x, \mathrm{d}y))$可比.

2) 在假设 1 之下, 如果$(q_1(x), q_1(x, \mathrm{d}y))$与$(q_2(x), q_2(x, \mathrm{d}y))$可比且$(q_2(x), q_2(x, \mathrm{d}y))$为零流出的, 则 $P_1^{\min}(t) \leqslant P_2^{\min}(t)$; 进一步, 若存在 $a \in E$ 使得任意 $x \in E$ 有 $a \leqslant x$, 则反命题成立.

3) 假定假设 1 成立且 $q_k(x, E \setminus E_n) = q_k(x, H_n)$, $x \in E$, $k = 1, 2$, 如果$(q_1(x), q_1(x, \mathrm{d}y))$与$(q_2(x), q_2(x, \mathrm{d}y))$可比且$(q_2(x), q_2(x, \mathrm{d}y))$为零流出的, 则$(q_1(x), q_1(x, \mathrm{d}y))$亦零流出.

证　首先, 可以简单地从 Kolmogorov 向后方程得到第 1 个结论, 参看文献[4]. 其次, 给定点 $\Delta \notin E$, 令 $E_\Delta = E \cup \{\Delta\}$和 $\mathscr{E}_\Delta = \sigma(\mathscr{E} \cup \{\Delta\})$. 在 E_Δ 上延拓半序$\leqslant$使得任意 $x \in E$ 有$\Delta \leqslant x$. 注意到给定的全稳定 q 对$(q_k(x), q_k(x, \mathrm{d}y))(k = 1, 2)$自然地在$(E_\Delta, \mathscr{E}_\Delta)$上导出全稳定保守 q 对$(\tilde{q}_k(x), \tilde{q}_k(x, \mathrm{d}y))(k = 1, 2)$:

$$\tilde{q}_k(x, A) = I_E(x)(q_k(x, A \setminus \{\Delta\}) + I_A(\Delta)(q_k(x) - q_k(x, E))),$$

$$\tilde{q}_k(x) = I_E(x) q_k(x), \quad x \in E_\Delta, \quad A \in \mathscr{E}_\Delta,$$

其决定的最小 q 过程记为$\tilde{P}_k^{\min}(t)(k = 1, 2)$. 因$(\tilde{q}_k(x), \tilde{q}_k(x, \mathrm{d}y))(k = 1, 2)$是全稳定保守的, 由文献[3]定理 2.47 和定理 3.2 的证明 b), 我们得到

$$\begin{aligned}&(\tilde{q}_k(x), \tilde{q}_k(x, \mathrm{d}y))\ \text{正则} \Leftrightarrow (\tilde{q}_k(x), \tilde{q}_k(x, \mathrm{d}y))\ \text{零流出} \Leftrightarrow \\ &(q_k(x), q_k(x, \mathrm{d}y))\ \text{零流出}, \quad k = 1, 2.\end{aligned} \tag{1}$$

一方面, 由条件和上式知$(\tilde{q}_2(x), \tilde{q}_2(x, \mathrm{d}y))$为正则 q 对, 它唯一决定 q 过程 $\tilde{P}_2(t) = \tilde{P}_2^{\min}(t)$. 同时, 我们不难证明

$$\begin{aligned}&(q_1(x), q_1(x, \mathrm{d}y))\ \text{与}\ (q_2(x), q_2(x, \mathrm{d}y))\ \text{可比} \Leftrightarrow \\ &(\tilde{q}_1(x), \tilde{q}_1(x, \mathrm{d}y))\ \text{与}\ (\tilde{q}_2(x), \tilde{q}_2(x, \mathrm{d}y))\ \text{可比}.\end{aligned} \tag{2}$$

因此, 从定理 1 得出 $\tilde{P}_1^{\min}(t) \leqslant \tilde{P}_2(t)$. 另一方面, 由文献[3]定理 3.2 的证明 a) 可以得到

$$P_k^{\min}(t) I_A(x) = \tilde{P}_k^{\min}(t) I_A(x), \quad A \subset E, \ x \in E, \ k = 1, 2.$$

由以上容易证明 $P_1^{\min}(t) \leqslant P_2^{\min}(t)$.

进一步, 如果 $P_1^{\min}(t) \leqslant P_2^{\min}(t)$, 由于任意 $x \in E$ 有 $a \leqslant x$, 我们知道 $0 < P_1^{\min}(t) 1(a) \leqslant P_2^{\min}(t) 1(x)$, 进而 $\inf_{x \in E} P_2^{\min}(t) 1(x) > 0$, 从而, 由文献[3] 引理 3.22 知$(q_2(x), q_2(x, \mathrm{d}y))$为零流出的. 再结合第 1 个结论得证反命题. 因此我们证明了第 2 个结论.

现在来证明第 3 个结论. 由于$(\tilde{q}_1(x), \tilde{q}_1(x, \mathrm{d}y))$为全稳定保守 q 对, $(\tilde{q}_2(x), \tilde{q}_2(x, \mathrm{d}y))$为正则 q 对, 由式(2)和文献[1]定理 1.6 导出$(\tilde{q}_1(x), \tilde{q}_1(x, \mathrm{d}y))$正则, 再由式(1)知$(q_1(x), q_1(x, \mathrm{d}y))$为零流出的. 至此定理得证.

由定理 1 可以立刻得到关于最小 Q 过程随机可比性的如下推论:

推论 1　设 Q_k 是全稳定 Q 矩阵, $P_1^{\min}(t)$为相应的最小 Q 过程$(k = 1, 2)$, 则 $P_1^{\min}(t) \leqslant$

$P_2^{\min}(t)$当且仅当 Q_1 与 Q_2 可比且 Q_2 为零流出的. 此外, 这时 Q_1 必为零流出的.

注 此推论的前一部分即是文献[2]定理3.1.

参考文献

1 Zhang Yuhui. Sufficient and necessary conditions for stochastic comparability of jump processes. Acta Math Sin Eng Ser, 2000, 16(1): 99

2 Zhang Hanjun, Chen Anyue. Stochastic comparability and dual Q-functions. J Math Anal Appl, 1999, 234(2): 482

3 Chen Mufa. From Markov chains to non-equilibrium particle systems. Singapore: World Scientific, 1992

4 Chen Mufa. A comment on the book "Continuous-Time Markov Chains" by W J Anderson. Chinese J Appl Prob Stat, 1996, 12(1): 55

STOCHASTIC COMPARABILITY OF THE MINIMAL *q*-PROCESSES

Zhang Yuhui

(Department of Mathematics, Beijing Normal University, 100875, Beijing, China)

Abstract Under some mild hypotheses, the sufficient and necessary conditions for the stochastic comparability of two minimal *q*-processes are presented. Meanwhile, a criterion for zero-exit of some minimal *q*-process is given under the stochostic comparability.

Key words the minimal *q*-process; stochastically comparable; zero-exit