第43卷第6期　　数 学 学 报　　Vol.43, No.6
2000年11月　　ACTA MATHEMATICA SINICA　　Nov., 2000

文章编号:0583-1431(2000)06-0965-04　　**文献标识码**: A

跳过程随机可比的充要条件

张余辉

(北京师范大学数学系 北京 100875)
(Fax: (010)62208192; E-mail: zhoumk@bnu.edu.cn)

摘　要 本文研究跳过程的随机可比性. 基于文献 [2] 和 [3], 证明两个跳过程随机可比的充要条件是其 q 对可比. 同时, 改进了 [6] 中唯一性问题的结果.

关键词 随机可比; 全稳定; 保守; 唯一性
MR(1991) 主题分类 60J25
中图分类 O211.62

Sufficient and Necessary Conditions for Stochastic Comparability of Jump Processes

ZHANG Yu-hui

(*Department of Mathematics, Beijing Normal University, Beijing* 100875, *P. R. China*)
(*Fax:* (010)62208192; *E-mail: zhoumk@bnu.edu.cn*)

Abstract This note is devoted to study the stochastic comparability of jump processes. Based on [2] and [3], it is proved that two jump processes are stochastically comparable if and only if their q-pairs are comparable. Meanwhile, the result on the uniqueness given in [6] is also improved.

Keywords Stochastically comparable; Totally stable; Conservative; Uniqueness
MR(1991) Subject Classification 60J25
Chinese Library Classification O211.62

在过去的二十多年里，耦合方法发展迅速且应用广泛. 众所周知，在耦合方法的各种应用中，保序耦合常常起着重要作用. 所以，我们自然想知道：边缘过程在什么条件下会存在马氏保序耦合？显然，如果存在保序耦合，则两个边缘过程必是随机可比的. 最近，张绍义 [1] 对跳过程证明了反命题亦成立. 因此，研究跳过程的随机可比性是有意义的，实际上，这方面的研究已有很长历史且有很好的结果 (参看文献 [2–5]).

本文的主要目的是完善 [2] 和 [3] 的工作，证明的主要想法和记号也源自于这两个文献. 然而，为方便起见，此处我们仍回顾一些记号.

* 本文翻译并压缩于本刊英文版 16 卷 1 期 99–102 页
收稿日期: 1998-09-07; 接受日期: 1998-12-30
基金项目: 国家自然科学基金资助项目; 高等学校博士学科点专项科研基金资助项目; 高校数学中心基金资助项目; 霍英东教育基金资助项目; 北京师范大学青年科学基金资助项目
作者简介: 张余辉 (1968–), 男, 江西人, 北京师范大学数学系副教授, 博士, 从事随机过程与粒子系统研究.

假定 $(E,\mathcal{E})$ 是赋予可测半序 $\leq$ 的 Polish 空间，集合 $F=\{(x_1,x_2)\in E\times E: x_1\leq x_2\}$ 是 $E\times E$ 上的可测闭集.

定义 1 可测实函数 f 称为单调的，如果任意 $x\leq y$ 有 $f(x)\leq f(y)$. 记有界单调函数的全体为 $\mathcal{M}$. 可测集 A 称为单调的，如果其示性函数 $I_A\in\mathcal{M}$, 记为 $A\in\mathcal{M}$. 两个概率测度 μ_1 和 μ_2, 我们定义 $\mu_1\leq\mu_2$, 如果任意 $f\in\mathcal{M}$ 有 $\mu_1 f\leq\mu_2 f$, 其中 $\mu_k f=\int f(x)\mu_k(dx)$.

定义 2 两个跳过程 $P_1(t)$ 和 $P_2(t)$ 称为随机可比的，如果

$$P_1(t)f(x_1)\leq P_2(t)f(x_2),\quad f\in\mathcal{M},\quad x_1\leq x_2,\quad t\geq 0,$$

其中 $P_k(t)f(x)=\int P_k(t,x,dy)f(y)$. 简记为 $P_1(t)\leq P_2(t)$.

两个 q 对 $(q_1(x),\, q_1(x,dy))$ 和 $(q_2(x),\, q_2(x,dy))$ 称为可比的，如果任意 $A\in\mathcal{M}$ 和 $x_1\leq x_2$, 当 $x_1,\, x_2\in A$ 或 $x_1,x_2\notin A$ 时，下面的不等式成立

$$\Omega_1 I_A(x_1)\leq\Omega_2 I_A(x_2),\tag{1}$$

其中算子 Ω_k 定义为 $\Omega_k f(x)=\int q_k(x,dy)f(y)-q_k(x)f(x)$, $x\in E$, f 为有界 $\mathcal{E}$ 可测函数.

本文的第一个主要结果陈述如下

定理 3 设 $(q_k(x),\, q_k(x,dy))$ $(k=1,2)$ 是全稳定有界 q 对 (未必保守), $P_k(t)$ $(k=1,2)$ 是相应的 q 过程. 则 $P_1(t)\leq P_2(t)$ 当且仅当 $(q_1(x),\, mq_1(x,dy))$ 和 $(q_2(x),\, q_2(x,dy))$ 可比.

为研究 q 对无界的 q 过程，我们需要作一些假设 (参看 [3, 假设 5.30]).

假设 4 存在 G_δ 集列 $\{E_n\}_1^\infty$ 使得 $E_n\uparrow E$ $(n\to\infty)$ 且任意 $n\geq 1$,

(i) $\sup_{x\in E_n} q_k(x)<\infty$, $k=1,2$.

(ii) 集合 $H_n=\{y\in E\setminus E_n:$ 存在 $x\in E_n$ 使得 $x\leq y\}\in\mathcal{M}$. 进一步，如果 $H_n\neq\emptyset$, 则存在点 $b_n\in H_n$ 使得任意 $x\in E_n$ 有 $x\leq b_n$.

当 $E=\mathbf{R}^d$, $\mathbf{Z}^d$, $\mathbf{R}_+^d$ 或 $\mathbf{Z}_+^d$, 赋予通常的半序，且两个 q 对局部有界时，假设 4 是平凡的，参看 [3]. 下面是本文的第二个主要结果.

定理 5 设 $(q_k(x),\, q_k(x,dy))$ $(k=1,2)$ 是正则 q 对， $P_k(t)$ $(k=1,2)$ 为相应的 q 过程. 在假设 4 之下， $P_1(t)\leq P_2(t)$ 当且仅当 $(q_1(x),\, nq_1(x,dy))$ 与 $(q_2(x),\, q_2(x,dy))$ 可比.

此外，我们能够改进 [6] 中给出的跳过程唯一性的结果. 新的结论是

定理 6 令 $(q_1(x),\, q_1(x,dy))$ 为全稳定保守 q 对， $(q_2(x),\, q_2(x,dy))$ 为正则 q 对. 假定假设 4 成立且 $q_k(x,E\setminus E_n)=q_k(x,H_n)$, $x\in E$, $k=1,2$. 如果 $(q_1(x),\, q_1(x,dy))$ 与 $(q_2(x),\, q_2(x,dy))$ 可比，则 $(q_1(x),\, q_1(x,dy))$ 为正则的，进而 $P_1(t)\leq P_2(t)$.

因为定理 6 能够从定理 5 的证明和 [6] 中直接导出，所以在此文中略去其证明. 定理 3 和定理 5 证明的主要思想源自于 [2] 和 [3]. 为证明定理 3, 需要两个引理.

引理 7 设 $P_k(x_k,dy_k)$ $(k=1,2)$ 是 $(E,\mathcal{E})$ 上的转移概率. 如果任意 $x_1\leq x_2$ 有 $P_1(x_1,dy_1)\leq P_2(x_2,dy_2)$, 则任意 $x_1\leq x_2$ 和 $n\geq 1$ 有 $P_1^n(x_1,dy_1)\leq P_2^n(x_2,dy_2)$.

由 [1, 定理 2.3] 和定义 1, 用数学归纳法不难证明此引理.

任意给定一点 $\triangle\notin E$, 令 $E_\triangle=E\cup\{\triangle\}$ 和 $\mathcal{E}_\triangle=\sigma(\mathcal{E}\cup\{\triangle\})$. 设 $(q(x),\, q(x,dy))$ 是 $(E,\mathcal{E})$ 上的 q 对，在 $(E_\triangle,\, \mathcal{E}_\triangle)$ 上定义新的保守 q 对 $(\tilde{q}(x),\, \tilde{q}(x,dy))$:

$$\tilde{q}(x,A)=I_E(x)\big(q(x,A\setminus\{\triangle\})+(q(x)-q(x,E))I_A(\triangle)\big),$$

$$\tilde{q}(x) = I_E(x)q(x), \qquad x \in E_\triangle, \quad A \in \mathcal{E}_\triangle.$$

分别记这两个 q 对决定的最小 q 过程的 Laplace 变换为 $P^{\min}(\lambda)$ 和 $\widetilde{P}^{\min}(\lambda)$. 由 [3, 定理 3.2 的证明 a], 我们得到

引理 8 任意 $A \subset E$ 和 $x \in E$ 有 $P^{\min}(\lambda)I_A(x) = \widetilde{P}^{\min}(\lambda)I_A(x)$.

定理 3 的证明 必要性已由 [3, 引理 5.29] 的 (i) 证明. 只需证明充分性. 为此, 扩大状态空间 E 至 $E_\triangle$, 在其上延拓半序 $\le$ 使得任意 $x \in E$ 有 $\triangle \le x$.

如上在 $(E_\triangle, \mathcal{E}_\triangle)$ 上定义两个 q 对 $(\tilde{q}_k(x), \tilde{q}_k(x, dy))$ $(k = 1, 2)$. 显然, 无论原 q 对是否保守, 新 q 对总是有界全稳定保守的. 记 $\mathcal{M}_\triangle$ 为 $(E_\triangle, \mathcal{E}_\triangle)$ 上全体有界单调函数. 令

$$\widetilde{P}_k^{(\lambda)} = I + \frac{1}{\lambda}\widetilde{\Omega}_k \, (k = 1, 2), \quad 其中 \quad \lambda \ge \sup_{x \in E} q_1(x) + \sup_{x \in E} q_2(x).$$

下面我们需要证明

$$\widetilde{P}_1^{(\lambda)} I_A(x_1) \le \widetilde{P}_2^{(\lambda)} I_A(x_2), \quad x_1, x_2 \in E_\triangle, \quad x_1 \le x_2, \quad A \in \mathcal{M}_\triangle. \tag{2}$$

当 $\triangle \notin A$ 时, 若 $x_1 = \triangle$, 则 $\widetilde{P}_1^{(\lambda)} I_A(x_1) = 0 \le \widetilde{P}_2^{(\lambda)} I_A(x_2)$; 若 $x_1 \ne \triangle$, 则 x_1, $x_2 \in E$, 而由 $\triangle \notin A$ 知 $A \in \mathcal{M}$, 对这些 x_1 和 x_2, 无论 x_1, $x_2 \in A$, 还是 x_1, $x_2 \notin A$, 由 (1) 总能得到

$$\widetilde{P}_1^{(\lambda)} I_A(x_1) = I_A(x_1) + \frac{1}{\lambda}\Omega_1 I_A(x_1) \le I_A(x_2) + \frac{1}{\lambda}\Omega_2 I_A(x_2) = \widetilde{P}_2^{(\lambda)} I_A(x_2).$$

而若 $x_1 \notin A$ 且 $x_2 \in A$, 由于 λ 的取法, 我们有

$$\widetilde{P}_1^{(\lambda)} I_A(x_1) = \frac{1}{\lambda} q_1(x_1, A) \le 1 + \frac{1}{\lambda}(q_2(x_2, A) - q_2(x_2)) = \widetilde{P}_2^{(\lambda)} I_A(x_2).$$

当 $\triangle \in A$ 时, 此时 $A = E_\triangle$, 故 $\widetilde{P}_1^{(\lambda)} I_A(x_1) = 1 = \widetilde{P}_2^{(\lambda)} I_A(x_2)$. 因此 (2) 式总成立. 注意到 $\widetilde{P}_k^{(\lambda)}$ $(k = 1, 2)$ 是 Polish 空间 $(E_\triangle, \mathcal{E}_\triangle)$ 上的转移概率. 由引理 7 和 [3, 引理 5.28] 得出

$$(\widetilde{P}_1^{(\lambda)})^m I_A(x_1) \le (\widetilde{P}_2^{(\lambda)})^m I_A(x_2), \qquad m \ge 1.$$

进一步, 因 $(\tilde{q}_k(x), \tilde{q}_k(x, dy))$ $(k = 1, 2)$ 是有界 q 对, 我们知道

$$\widetilde{P}_k(t) = \exp(t\widetilde{\Omega}_k) = \mathrm{e}^{-\lambda t} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^m}{m!} (\widetilde{P}_k^{(\lambda)})^m.$$

因此, 任意 x_1, $x_2 \in E_\triangle$, $x_1 \le x_2$ 和 $A \in \mathcal{M}_\triangle$ 有 $\widetilde{P}_1(t) I_A(x_1) \le \widetilde{P}_2(t) I_A(x_2)$. 由引理 8 得到

$$P_1(t) I_A(x_1) = \widetilde{P}_1(t) I_A(x_1) \le \widetilde{P}_2(t) I_A(x_2) = P_2(t) I_A(x_2), \quad x_1, x_2 \in E, \quad x_1 \le x_2, \quad A \in \mathcal{M}.$$

最后由 [3, 引理 5.28] 和定义 2 得证 $P_1(t) \le P_2(t)$.

定理 5 的证明 必要性可以简单地从 Kolmogorov 向后方程得到, 参看 [4]. 为证明充分性, 定义 (参看 [3], 定理 5.31)

$$q_k^{(n)}(x, B) = q_k(x, B), \quad q_k^{(n)}(x, \{b_n\}) = q_k(x, H_n), \quad x \in E_n, \quad B \in E_n \cap \mathcal{E},$$

$$q_k^{(n)}(x) = I_{E_n}(x) q_k(x), \quad n \ge 1, \quad k = 1, 2.$$

立刻知道

$$\sup_{x\in E} q_k^{(n)}(x) = \sup_{x\in E_n} q_k(x) < \infty, \quad k=1,2, \quad n\ge 1,$$
$$q_k^{(n)}(x) \to q_k(x), \quad q_k^{(n)}(x,A) \to q_k(x,A), \quad n\to\infty, \quad x\in E, \quad A\in\mathcal{E}, \quad k=1,2.$$

因此，$(q_k^{(n)}(x), q_k^{(n)}(x,dy))$ 分别决定唯一 q 过程，记为 $P_k^{(n)}(t)$ $(k=1,2)$.

注意到 E 上的半序导出 $(E_n\cup\{b_n\})$ 上的半序. 以 $\mathcal{M}_n$ 记 $(E_n\cup\{b_n\},(E_n\cup\{b_n\})\cap\mathcal{E})$ 上的全体有界单调函数. 显然，如果 $B\in\mathcal{M}_n$, 则 $b_n\in B$ 且 $B\cup H_n\in\mathcal{M}$. 不难证明

$$\Omega_k^{(n)} I_B(x) = \Omega_k I_{B\cup H_n}(x), \quad x\in E_n, \quad k=1,2. \tag{3}$$

任意 $x_1,x_2\in E_n\cup\{b_n\}$, $x_1\le x_2$ 和 $B\in\mathcal{M}_n$, 若 $x_2\ne b_n$, 则 $x_1,x_2\in E_n$. 由 (1) 和 (3) 知，当 $x_1,x_2\in B$ 或 $x_1,x_2\notin B$(即 $x_1,x_2\in E_n\setminus B$) 时，$\Omega_1^{(n)}I_B(x_1)\le\Omega_2^{(n)}I_B(x_2)$. 若 $x_2=b_n$, 则 $x_2\in B$, 因此，任意 $x_1\in B$ 有 $\Omega_1^{(n)}I_B(x_1)\le 0=\Omega_2^{(n)}I_B(x_2)$. 所以，我们证明了 $(q_1^{(n)}(x), q_1^{(n)}(x,dy))$ 和 $(q_2^{(n)}(x), q_2^{(n)}(x,dy))$ 在 $(E_n\cup\{b_n\},(E_n\cup\{b_n\})\cap\mathcal{E})$ 上是可比的. 另外，它们是有界全稳定 q 对，可能非保守. 由 [7, 命题 8.1.4], E_n 是 Polish 的，因此 $E_n\cup\{b_n\}$ 是 Polish 的. 故由定理 3 有 $P_1^{(n)}(t)\le P_2^{(n)}(t)$. 此外，由 [3, 引理 5.14] 知道

$$\lim_{n\to\infty} P_k^{(n)}(t,x,A\cap(E_n\cup\{b_n\})) = P_k(t,x,A), \quad x\in E, \quad A\in\mathcal{E}, \quad t\ge 0, \quad k=1,2. \tag{4}$$

显然，如果 $A\in\mathcal{M}$, 则 $A\cap(E_n\cup\{b_n\})\in\mathcal{M}_n$, 故结论由 (4) 和 $P_1^{(n)}(t)\le P_2^{(n)}(t)$ 得到.

致谢 感谢陈木法教授，Pirogov S. 教授和张绍义副教授的有益建议.

参 考 文 献

[1] Zhang S Y. Existence and Application of Optimal Markovian Coupling with Respect to Non-Negative Lower Semi-Continuous Functions [J]. Acta Math Sinica, 2000, 16(2): 261–270

[2] Chen M F. On Coupling of Jump Processes [J]. Chin Ann of Math, 1991, 12B(4): 385–399

[3] Chen M F. From Markov Chains to Non-Equilibrium Particle Systems [M]. Singapore: World Scientific, 1992

[4] Chen M F. A Comment on the Book “Continuous-Time Markov Chains” by Anderson W J [J]. Chinese J Appl Prob Stat, 1996, 12(1): 55–59

[5] Kirstein B M. Monotonicity and Comparability of Time-Homogeneous Markov Processes with Discrete State Space [J]. Math Operationsforsch Statist, 1976, 7: 151–168

[6] Zhang Y H. A Problem on the Uniqueness of Jump Processes [J]. Chinese J Appl Prob Stat, 1998, 14(1): 45–48 (in Chinese)

[7] Cohn D L. Measure Theory [M]. Boston: Birkhäuser, 1980