1998年 9月 北京师范大学学报(自然科学版) Sep. 1998
第34卷 第3期 Journal of Beijing Normal University (Natural Science) Vol. 34 No. 3

线性组合 Q 矩阵的正则性*

张余辉

(北京师范大学数学系，100875，北京；29岁，男，讲师)

摘要 研究了由2个正则 Q 矩阵线性组合得到的新 Q 矩阵之正则性，并就一些情形给出了解答.

关键词 正则性；唯一性；单生过程

分类号 O 211.62

1 引言及主要结果

状态空间 $E=\{0, 1, 2, \cdots\}$ 上的跳过程一般称之为 Q 过程，其转移速率矩阵 $Q=(q_{ij})$ 称为 Q 矩阵，通常记 $q_i:=\sum\limits_{j\neq i} q_{ij}$. 若全稳定且保守的 Q 矩阵决定的 Q 过程唯一，则称之为正则 Q 矩阵.

在跳过程的理论研究中，有时需要将2个 Q 矩阵线性组合构造得到一个新 Q 矩阵(我们称之为线性组合 Q 矩阵)，显然，2个正则 Q 矩阵的线性组合还是全稳定、保守的 Q 矩阵，但它决定的 Q 过程是否仍然唯一，什么条件下唯一，这正是本文需要研究的问题. 本文中的 Q 矩阵均假定是全稳定且保守的. 具体记号和一些已知结果参看文献[1].

我们先从几个简单例子来了解这些问题. 纯生 Q 矩阵是: $q_{i,\,i+1}=b_i>0$, $q_{i,\,i}=-b_i$, $q_{ij}=0$, $j\neq i$, $i+1$, $i\geqslant 0$. 简记纯生 Q 矩阵为 (b_i). 熟知，纯生 Q 矩阵是正则的当且仅当 $\sum\limits_{i=0}^{\infty} b_i^{-1}=\infty$.

生灭 Q 矩阵是: $q_{i,\,i-1}=a_i$, $q_{i,\,i+1}=b_i>0$, $q_{i,\,i}=-(a_i+b_i)$, $i\geqslant 0$, 其他 q_{ij} 为0, 其中 $a_0=0$, $a_i>0$, $i\geqslant 1$. 简记生灭 Q 矩阵为 (a_i, b_i). 我们知道生灭 Q 矩阵

$$a_i=(i+1)^2,\ i\geqslant 1;\quad b_i=\beta(i+1)^2,\ i\geqslant 0,\ \beta>0$$

决定的生灭过程唯一当且仅当 $\beta\leqslant 1$.

例1 给定2个纯生 Q 矩阵

$$b_i^{(1)}=\begin{cases} m,\ i=2m-2; \\ m^2,\ i=2m-1, \end{cases}\quad b_i^{(2)}=\begin{cases} m^2,\ i=2m-2; \\ m,\ i=2m-1, \end{cases}\quad m\geqslant 1,$$

则 $\sum\limits_{i=0}^{\infty}(b_i^{(1)})^{-1}=\sum\limits_{i=0}^{\infty}(b_i^{(2)})^{-1}=\infty$, 即 $(b_i^{(1)})$ 和 $(b_i^{(2)})$ 正则，此时其线性组合 $(b_i=b_i^{(1)}+b_i^{(2)})$ 满足 $\sum\limits_{i=0}^{\infty} b_i^{-1}=\sum\limits_{m=1}^{\infty} 2(m+m^2)^{-1}\leqslant 2\sum\limits_{m=1}^{\infty} m^{-2}<\infty$, 因此，$(b_i)$ 是非正则的.

此例说明: 即便2个 Q 矩阵都是正则的，其线性组合 Q 矩阵也未必正则.

注意到: 如果2个纯生 Q 矩阵线性组合得到的新纯生 Q 矩阵正则，那么由前面的充要条件知

---

* 北京师范大学青年科学基金资助项目

收稿日期: 1997-10-09

原先的纯生 Q 矩阵亦正则．我们是否可以说，线性组合 Q 矩阵正则时，原先的 Q 矩阵必定正则呢？答案是否定的，例 2 即是一个反例．

例 2　给定 2 个生灭 Q 矩阵

$$a_i^{(1)}=a_i^{(2)}=(i+1)^2,\ i\geqslant 1;\quad b_i^{(1)}=\frac{1}{4}(i+1)^2,\ b_i^{(2)}=\frac{5}{4}(i+1)^2,\ i\geqslant 0.$$

其线性组合 Q 矩阵 $\overline{Q}=Q^{(1)}+Q^{(2)}$ 是正则的，因为 $\frac{1}{2}\overline{Q}=((i+1)^2,\ \frac{3}{4}(i+1)^2)$，显然正则，再由引理 1 即知．此时，$Q^{(1)}$ 正则，而 $Q^{(2)}$ 决定的生灭过程非唯一．

因此，生灭 Q 矩阵与纯生 Q 矩阵的情形是不一样的．再考虑这样的问题：若 $Q^{(1)}$ 和 $Q^{(3)}$ 是正则的，$Q^{(2)}$ 满足 $q_{ij}^{(1)}\leqslant q_{ij}^{(2)}\leqslant q_{ij}^{(3)}$, $j\neq i$，那么 $Q^{(2)}$ 是否正则？答案是未必正则．请看

例 3　给定生灭 Q 矩阵 $Q^{(k)}(k=1,\ 2,\ 3)$ 如下：

$$a_i^{(1)}=(i+1)^2,\ i\geqslant 1;\quad b_i^{(1)}=\beta(i+1)^2,\ i\geqslant 0;$$
$$a_i^{(2)}=(i+1)^2,\ i\geqslant 1;\quad b_i^{(2)}=\alpha\beta(i+1)^2,\ i\geqslant 0;$$
$$a_i^{(3)}=\alpha(i+1)^2,\ i\geqslant 1;\quad b_i^{(3)}=\alpha\beta(i+1)^2,\ i\geqslant 0,$$

其中 $0<\beta<1$, $\alpha>1$ 且 $\alpha\beta>1$．由前面的讨论和引理 1 知 $Q^{(1)}$ 和 $Q^{(3)}$ 正则，但 $Q^{(2)}$ 非正则．

我们的第 1 个结果是关于单生 Q 矩阵：$q_{i,\ i+1}>0$, $q_{ij}=0$, $j>i+1$, $i\geqslant 0$．

定理 1　假定单生 Q 矩阵 $Q^{(k)}(k=1,\ 2)$ 正则且 $\sup\limits_{i\geqslant 0} q_{i,\ i+1}^{(2)}<\infty$，则其线性组合(单生) Q 矩阵 $\tilde{Q}=\alpha Q^{(1)}+\beta Q^{(2)}$ 亦正则，其中常数 $\alpha,\ \beta>0$．

定理 2　假定 $Q^{(1)}$ 和 $Q^{(2)}$ 是正则的，满足下列关系式：

$$\sum_{j\geqslant k} q_{ij}^{(1)}\leqslant\sum_{j\geqslant k} q_{mj}^{(2)},\quad i\leqslant m,\ k\in\{0,\ \cdots,\ i\}\bigcup\{m+1,\ m+2,\ \cdots\},\tag{1}$$

而且 $Q^{(2)}$ 决定的 Q 过程 $P_2(t)$ 是随机单调的，等价的，

$$\sum_{j\geqslant k} q_{ij}^{(2)}\leqslant\sum_{j\geqslant k} q_{mj}^{(2)},\quad i\leqslant m,\ k\in\{0,\ \cdots,\ i\}\bigcup\{m+1,\ m+2,\ \cdots\},\tag{2}$$

则线性组合 Q 矩阵 $\overline{Q}=\alpha Q^{(1)}+\beta Q^{(2)}$ 亦正则 $(\alpha,\ \beta>0)$．

定理 3　假定 $Q^{(1)}$ 和 $Q^{(2)}$ 是正则的，且 $q_i^{(2)}=0$, $i>N$，其中 N 是一正整数，则线性组合 Q 矩阵 $\overline{Q}=\alpha Q^{(1)}+\beta Q^{(2)}$ 亦正则 $(\alpha,\ \beta>0)$．

2　主要结果的证明

我们先证明一个重要引理，这个结果对一般状态空间上的 q 对同样成立，参看文献 [2]．

引理 1　设 Q 是正则 Q 矩阵，令 $\overline{Q}$：$\overline{q}_{ij}=\alpha q_{ij}$, $i,\ j\geqslant 0$，其中常数 $\alpha>0$ (有时简记 $\overline{Q}$ 为 αQ)，那么，$\overline{Q}$ 为正则 Q 矩阵．

证　记 Q 决定的唯一 Q 过程的 Laplace 变换为 $P(\lambda)$, $\overline{Q}$ 决定的最小 Q 过程的 Laplace 变换为 $\overline{P}^{\min}(\lambda)$．我们熟知，任意 $\lambda>0$，任意固定 $j\geqslant 0$, $\{P_{ij}(\lambda):\ i\geqslant 0\}$ 是以下方程组的最小非负解：

$$f_i=\sum_{i\neq k=0}^{\infty}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i}f_k+\frac{\delta_{ij}}{\lambda+q_i},\quad i\geqslant 0.$$

将上式右边的分子和分母同时乘以 α，得到

$$f_i=\sum_{i\neq k=0}^{\infty}\frac{\overline{q}_{ik}}{\alpha\lambda+\overline{q}_i}f_k+\frac{\alpha\delta_{ij}}{\alpha\lambda+\overline{q}_i},\quad i\geqslant 0,$$

故$\{P_{ij}(\lambda):\ i\geqslant 0\}$仍是上述方程组的最小非负解．由于$Q$正则，所决定的$Q$过程不中断，即$\sum_{j=0}^{\infty}P_{ij}(\lambda)=\frac{1}{\lambda}$，$i\geqslant 0$．另一方面，由文献[1]的定理2.12，$\{\alpha\overline{P}_{ij}^{\min}(\alpha\lambda):\ i\geqslant 0\}$也是上面方程组的最小非负解，因此，$\overline{P}_{ij}^{\min}(\alpha\lambda)=\frac{1}{\alpha}P_{ij}(\lambda)$，$i\geqslant 0$，再由$j$的任意性得$\sum_{j=0}^{\infty}\overline{P}_{ij}^{\min}(\alpha\lambda)=\frac{1}{\alpha\lambda}$，$i\geqslant 0$．最后，由$\lambda$的任意性得到$\sum_{j=0}^{\infty}\overline{P}_{ij}^{\min}(\lambda)=\frac{1}{\lambda}$，$i\geqslant 0$，$\lambda>0$．由此知道$\overline{Q}$所决定的最小$Q$过程是不中断的，即$\overline{Q}$是正则的．

在证明第2个引理之前，回顾一个已知结论．全稳定且保守的单生Q矩阵决定的单生过程唯一当且仅当$M:=\sum_{k=0}^{\infty}m_k=\infty$，其中

$$\begin{cases} m_k=\sum_{i=0}^{k}\frac{F_k^{(i)}}{q_{i,\,i+1}},\ k\geqslant 0, \\ F_k^{(k)}=1,\ F_k^{(i)}=\sum_{j=i}^{k-1}\frac{q_k^{(j)}F_j^{(i)}}{q_{k,\,k+1}},\ 0\leqslant i<k, \\ q_k^{(i)}=\sum_{j=0}^{i}q_{kj},\ 0\leqslant i<k. \end{cases}$$

生灭Q矩阵是单生Q矩阵的特例，此时，上式变为

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{b_k}+\sum_{i=0}^{k-1}\frac{a_k\cdots a_{i+1}}{b_k\cdots b_i}\right)=\infty. \tag{3}$$

引理2 假定单生Q矩阵$Q=(q_{ij})$是正则的，定义单生Q矩阵$\overline{Q}$为

$$\overline{q}_{i,\,i+1}=q_{i,\,i+1}+b,\ \overline{q}_{i,\,i}=q_{i,\,i}-b,\ \overline{q}_{ij}=q_{ij},\ j\leqslant i-1,\ i\geqslant 0,$$

其中常数$b>0$，则$\overline{Q}$是正则的．

证 注意到$\overline{q}_k^{(i)}=q_k^{(i)}=\sum_{j=0}^{i}q_{kj}$，$0\leqslant i<k$，此时，

$$\overline{M}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{k-1}\frac{\overline{F}_k^{(i)}}{\overline{q}_{i,\,i+1}}+\frac{1}{\overline{q}_{k,\,k+1}}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{q_{k,\,k+1}+b}+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{\overline{F}_k^{(i)}}{q_{i,\,i+1}+b}.$$

如果$\sum_{k=0}^{\infty}(q_{k,\,k+1}+b)^{-1}=\infty$，则$\overline{M}=\infty$．否则，当$\sum_{k=0}^{\infty}(q_{k,\,k+1}+b)^{-1}<\infty$时，有$q_{k,\,k+1}\to\infty\ (k\to\infty)$，进而由$\frac{q_{k,\,k+1}}{q_{k,\,k+1}+b}\to 1\ (k\to\infty)$知

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{q_{k,\,k+1}}<\infty, \tag{4}$$

进一步，由级数方面的知识得$D:=\prod_{k=0}^{\infty}\left(1+\frac{b}{q_{k,\,k+1}}\right)<\infty$．另一方面，存在$N$使得当$k\geqslant N$时，$q_{k,\,k+1}>b$且$\frac{1}{q_{k,\,k+1}}<\frac{2}{q_{k,\,k+1}+b}$，同时，存在正常数$C_1$和$C_2$使得

$$\frac{F_k^{(i)}}{q_{i,\,i+1}}\leqslant C_1\frac{\overline{F}_k^{(i)}}{q_{i,\,i+1}+b},\quad 0\leqslant i<k\leqslant N,$$

$$\frac{1}{q_{i,\,i+1}}\leqslant C_2\frac{1}{q_{i,\,i+1}+b},\quad 0\leqslant i\leqslant N-1.$$

我们用归纳法证明任意固定的 i，有下式成立：

$$\prod_{k=m}^{\infty}\Big(1+\frac{b}{q_{k,\,k+1}}\Big)F_j^{(i)}\leqslant D\overline{F}_j^{(i)},\quad i\leqslant j<m. \tag{5}$$

首先，当 $j=i$ 时，(5)式显然成立，当 $j=i+1$ 时，任意 $m>i+1$ 有

$$(5)\text{式左边}\leqslant\prod_{k=i+2}^{\infty}\Big(1+\frac{b}{q_{k,\,k+1}}\Big)\frac{q_{i+1}^{(i)}}{q_{i+1,\,i+2}}=\prod_{k=i+1}^{\infty}\Big(1+\frac{b}{q_{k,\,k+1}}\Big)\frac{q_{i+1}^{(i)}}{q_{i+1,\,i+2}+b}\leqslant$$

$$D\frac{\overline{q}_{i+1}^{(i)}}{q_{i+1,\,i+2}+b}=D\overline{F}_{i+1}^{(i)}=(5)\text{式右边}.$$

假设至 $j=n-1$ 时结论均成立，当 $j=n$ 时，任意 $m>n$ 有

$$(5)\text{式左边}=\sum_{l=i}^{n-1}\Big\{q_n^{(l)}\prod_{k=m}^{\infty}\Big(1+\frac{b}{q_{k,\,k+1}}\Big)\Big(1+\frac{b}{q_{n,\,n+1}}\Big)\frac{F_l^{(i)}}{q_{n,\,n+1}+b}\Big\}\leqslant$$

$$\sum_{l=i}^{n-1}\Big\{q_n^{(l)}\prod_{k=n}^{\infty}\Big(1+\frac{b}{q_{k,\,k+1}}\Big)F_l^{(i)}\frac{1}{q_{n,\,n+1}+b}\Big\}\leqslant$$

$$\sum_{l=i}^{n-1}\Big(\overline{q}_n^{(l)}D\overline{F}_l^{(i)}\frac{1}{q_{n,\,n+1}+b}\Big)=D\overline{F}_n^{(i)}=(5)\text{式右边}.$$

因此，由归纳法得证(5)式．由(5)立刻得出：$F_j^{(i)}\leqslant D\overline{F}_j^{(i)}$，$i\leqslant j$．综合以上，即有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{F_k^{(i)}}{q_{i,\,i+1}}\leqslant C_1\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{\overline{F}_k^{(i)}}{q_{i,\,i+1}+b}+\sum_{k=N+1}^{\infty}\Big(C_2D\sum_{i=0}^{N-1}\frac{\overline{F}_k^{(i)}}{q_{i,\,i+1}+b}+2D\sum_{i=N}^{k-1}\frac{\overline{F}_k^{(i)}}{q_{i,\,i+1}+b}\Big)\leqslant$$

$$(C_1\vee C_2D\vee 2D)\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{\overline{F}_k^{(i)}}{q_{i,\,i+1}+b}.$$

最后，由 Q 的正则性及(4)知上式左边等于 ∞，推出右边等于 ∞，从而 $\overline{M}=\infty$.

所以，我们总有 $\overline{M}=\infty$，因此，$\overline{Q}$ 是正则的．

定理1的证明 在引理2中取 $Q=\alpha Q^{(1)}$，$b=\beta\sup\limits_{i\geqslant 0}q_{i,\,i+1}^{(2)}$，由引理1知 Q 正则，故由引理2得到的 $\overline{Q}$ 是正则的，即有 $\overline{M}=\infty$．比较 $\tilde{Q}$ 和 $\overline{Q}$，易看出 $\tilde{q}_{i,\,i+1}\leqslant\overline{q}_{i,\,i+1}$，$i\geqslant 0$，且 $\tilde{q}_k^{(i)}\geqslant\overline{q}_k^{(i)}$，$0\leqslant i<k$，所以，$\tilde{F}_k^{(i)}\geqslant\overline{F}_k^{(i)}$，$0\leqslant i\leqslant k$，进而，$\tilde{m}_k\geqslant\overline{m}_k$，$k\geqslant 0$，由此得出 $\tilde{M}\geqslant\overline{M}$，结论由此得证．

命题 假定生灭 Q 矩阵 $Q^{(k)}=(a_i^{(k)},\,b_i^{(k)})\,(k=1,\,2)$ 是正则的，且

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{b_i^{(2)}}{b_i^{(1)}}<\infty,\quad \varliminf_{i\to\infty}b_i^{(2)}>0,$$

则生灭 Q 矩阵 $\tilde{Q}=\alpha Q^{(1)}+\beta Q^{(2)}$ 亦正则 $(\alpha,\,\beta>0)$．

证 因证明方法相同，只对 $\alpha=\beta=1$ 的情形证明．记 $c:=\varliminf\limits_{i\to\infty}b_i^{(2)}$，任意 $c>\varepsilon>0$，存在自然数 N 使得任意 $i\geqslant N$，有 $b_i^{(2)}>c-\varepsilon$，由此及命题条件得 $\sum\limits_{i=0}^{\infty}(b_i^{(1)})^{-1}<\infty$，再由 $Q^{(1)}$ 正则及(3)知

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{a_k^{(1)}\cdots a_{i+1}^{(1)}}{b_k^{(1)}\cdots b_i^{(1)}}=\infty.$$

另一方面，从命题条件直接得 $$D:=\prod_{k=0}^{\infty}\Big(1+\frac{b_k^{(2)}}{b_k^{(1)}}\Big)<\infty.$$

综合以上，得出

$$D\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(a_k^{(1)}+a_k^{(2)})\cdots(a_{i+1}^{(1)}+a_{i+1}^{(2)})}{(b_k^{(1)}+b_k^{(2)})\cdots(b_i^{(1)}+b_i^{(2)})}\geqslant\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(a_k^{(1)}+a_k^{(2)})\cdots(a_{i+1}^{(1)}+a_{i+1}^{(2)})}{b_k^{(1)}\cdots b_i^{(1)}}=\infty.$$

再由(3)知 $\tilde{Q}=Q^{(1)}+Q^{(2)}$ 为正则 Q 矩阵.

定理2的证明 令 $\tilde{Q}:=(\alpha+\beta)Q^{(2)}$，由引理1知 $\tilde{Q}$ 正则. 由(1)、(2)两式立刻得出 $\overline{Q}$ 与 $\tilde{Q}$ 满足

$$\sum_{j\geqslant k}\overline{q}_{ij}\leqslant\sum_{j\geqslant k}\tilde{q}_{mj},\quad i\leqslant m,\ k\in\{0,\ \cdots,\ i\}\bigcup\{m+1,\ m+2,\ \cdots\}.$$

再由文献[2]的推论2.2.3或文献[3]的命题可直接证明结论.

引理3 假定正则 Q 矩阵 Q^* 满足: $q_i^*=0,\ i>N$，其中 N 为一正整数，则任意 Q 矩阵 Q 正则当且仅当 $\overline{Q}:=Q+Q^*$ 正则.

证 我们采用一概率方法来证明(参看文献[4]). 定义 $\tilde{Q}$: $\tilde{q}_i=0,\ 0\leqslant i\leqslant N,\ \tilde{q}_{ij}=q_{ij},\ i>N,\ j\geqslant0$. 将 Q, $\overline{Q}$ 和 $\tilde{Q}$ 决定的最小 Q 过程分别记为 (X_t)，$(\overline{X}_t)$ 和 $(\tilde{X}_t)$. 显然，(X_t) 与 $(\overline{X}_t)$ 均比 $(\tilde{X}_t)$ 跳的次数多. 注意到在每一 $0\leqslant i\leqslant N$ 处，(X_t) 与 $(\overline{X}_t)$ 分别以参数为 q_i 和 $\overline{q}_i$ 的指数律停留，然后跳到其他状态，这是它们比 $(\tilde{X}_t)$ 跳得多的唯一途径. 而由 Borel-Cantelli 引理易证: 在有限时间区间内，至多有有限次这样的跳发生. 因此，在任意有限时间区间内 (X_t) 至多有限次跳，当且仅当 $(\overline{X}_t)$ 亦如此，由此得证引理.

定理3的证明 由引理1知 $\alpha Q^{(1)}$ 和 $\beta Q^{(2)}$ 正则，再由引理3直接得证.

此研究课题是由陈木法教授提出的，作者衷心感谢他多年来的指导和帮助.

3 参考文献

1 Chen Mufa. From Markov chains to non-equilibrium particle systems. Singapore: World Scientific, 1992

2 张余辉. 跳过程的若干课题研究: [学位论文]. 北京: 北京师范大学数学系, 1996

3 Chen Mufa. A comment on the book "Cotinuous-Time Markov Chains" by W J Anderson. Chinese J Appl Probab Stat, 1996, 12(1): 55

4 Chen Mufa. Uniqueness criteria for single birth processes. preprint, 1997

REGULARITY OF Q-MATRICES BEING LINEAR COMBINATIONS OF TWO REGULAR Q-MATRICES

Zhang Yuhui

(Department of Mathematics, Beijing Normal University, 100875, Beijing, China)

Abstract The regularity of Q-matrices that are linear combinations of two regular Q-matrices is studied. The answers to some cases are given.

Keywords regularity; uniqueness; single birth processes