# 续"一维马氏链保序耦合的构造"*

张余辉

(北京师范大学数学系，100875，北京；29岁，男，讲师)

**关键词** 随机可比；保序耦合；边缘条件

**分类号** O 211.62

给定 $E=\{0, 1, 2, \cdots\}$ 上正则 $Q$ 矩阵 $Q^{(k)}=(q_{ij}^{(k)})$，相应的马氏链为 $P^{(k)}(t)(k=1, 2)$，记 $P^{(1)}(t)$ 和 $P^{(2)}(t)$ 的耦合马氏链为 $\tilde{P}(t)$，其 $Q$ 矩阵为 $\tilde{Q}=(\tilde{q}(i, j; k, l): i, j, k, l\in E)$. 分别从文献[1～3]知道：$\tilde{Q}$ 是全稳定，保守，且正则的．在文献[4]中，假设 $P^{(1)}(t)$ 和 $P^{(2)}(t)$ 随机可比，从其 $Q$ 矩阵形式的等价条件[5]出发，我们构造出正则保序的耦合马氏链 $\tilde{P}(t)$，但这个构造的表述较繁琐，本文先给出了其简洁的表述，而后给出另一更为简单的构造．2个构造均有 $\tilde{q}(i, j; k, l)=0\,(k>l)$，故满足保序性．边缘条件的验证，由于2个构造的证明类似，可参看文献[4]和[6].

第一构造．记 $c^+=c\vee 0\ (c\in\mathbf{R})$. 令

$$\begin{cases}\tilde{q}(i,\ j;\ i,\ k)=(q_{jk}^{(2)}-q_{ik}^{(1)})^+, & \tilde{q}(i,\ j;\ k,\ j)=(q_{ik}^{(1)}-q_{jk}^{(2)})^+,\\ \tilde{q}(i,\ j;\ k,\ k)=q_{ik}^{(1)}\wedge q_{jk}^{(2)}, & i<k<j,\\ \tilde{q}(i,\ j;\ i,\ i)=q_{ji}^{(2)}, & \tilde{q}(i,\ j;\ j,\ j)=q_{ij}^{(1)}.\end{cases}$$

定义 $a_{ll}=q_{il}^{(1)},\ b_{ll}=q_{jl}^{(2)},\ l\notin\{i,\ i+1,\ \cdots,\ j\}$.

下面递推地定义2组数列 $a_{kl},\ b_{kl}(k\leqslant l,\ l\notin\{i,\ i+1,\ \cdots,\ j\}$：

$$\begin{cases}a_{kl}=a_{kl-1}^+-b_{kl-1}^+, \quad b_{kl}=b_{k+1l}^+-a_{k+1l}^+;\\ \text{当 } 0\leqslant l\leqslant i-1,\ k=l-1,\ l-2,\ \cdots,\ 0;\\ \text{当 } l\geqslant j+1,\ k=l-1,\ l-2,\ \cdots,\ j+1.\end{cases}$$

$$a_{ki}=a_{ki-1}^+-b_{ki-1}^+,\ k\leqslant i-1;\quad b_{jl}=b_{j+1l}^+-a_{j+1l}^+,\quad l\geqslant j+1.$$

构造耦合 $\tilde{Q}$ 如下：

$$\begin{cases}\tilde{q}(i,\ j;\ k,\ l)=a_{kl}^+\wedge b_{kl}^+, \quad 0\leqslant k\leqslant l\leqslant i-1 \text{ 或 } j+1\leqslant k\leqslant l;\\ \tilde{q}(i,\ j;\ i,\ l)=b_{jl}^+, \quad l\geqslant j+1;\\ \tilde{q}(i,\ j;\ k,\ j)=a_{ki}^+, \quad 0\leqslant k\leqslant i-1;\\ \text{其余的 } \tilde{q}(i,\ j;\ k,\ l)=0, \quad (k,\ l)\neq(i,\ j).\end{cases}$$

最后，为了保守性，定义 $\tilde{q}(i,\ j;\ i,\ j)=-\sum\limits_{(k,\ l)\neq(i,\ j)}\tilde{q}(i,\ j;\ k,\ l)$.

第二构造．此构造的想法与第一构造有相似，也有不同．先尽可能大地分配"负荷"给对角线上的点 $\tilde{q}(i,\ j;\ l,\ l)\ (l\neq j)$，再依次尽可能大地分配"负荷"于 $\tilde{q}(i,\ j;\ l-1,\ l),\ \cdots,\ \tilde{q}(i,\ j;\ 0,\ l)$，但是在 $l=i$ 时，应依次尽可能大地分配"负荷"于 $\tilde{q}(i,\ j;\ i-1,\ l),\ \cdots,\ \tilde{q}(i,\ j;\ 0,\ l)$．在 $i\leqslant l\neq j$ 时，将

* 北京师范大学青年科研基金资助项目
收稿日期：1997－05－13

横向剩余的“负荷”定义成 $\tilde{q}(i, j; i, l)$ 以满足边缘条件．在 $i \neq k \leqslant j$ 时，自然地将纵向剩余“负荷”分配给 $\tilde{q}(i, j; k, j)$．因此，定义

$$a_{ll}=\begin{cases} q_{il}^{(1)}, & l \neq i, \\ 0, & l=i. \end{cases} \qquad b_{ll}=\begin{cases} q_{jl}^{(2)}, & l \neq j, \\ 0, & l=j. \end{cases} \quad l \geqslant 0.$$

以下递推地定义2组数列 $a_{kl}$, $b_{kl}$ $(k \leqslant l,\ l \geqslant 0)$．假设直至 $l-1$ 都已定义，令

$$a_{kl}=a_{kl-1}^{+}-b_{kl-1}^{+}, \quad b_{kl}=b_{k+1l}^{+}-a_{k+1l}^{+}, \quad k=l-1, l-2, \cdots, 0.$$

耦合 $\tilde{Q}$ 定义为:

$$\begin{cases} \tilde{q}(i, j; k, l)=a_{kl}^{+} \wedge b_{kl}^{+}, & k \leqslant l,\ k \neq i,\ l \neq j, \\ \tilde{q}(i, j; i, l)=q_{jl}^{(2)}-\sum\limits_{0 \leqslant k \leqslant l\ (k \neq i)} \tilde{q}(i, j; k, l), & i \leqslant l \neq j, \\ \tilde{q}(i, j; k, j)=q_{ik}^{(1)}-\sum\limits_{l \geqslant k\ (l \neq j)} \tilde{q}(i, j; k, l), & i \neq k \leqslant j, \\ \tilde{q}(i, j; i, j)=-\sum\limits_{(k, l) \neq (i, j)\ (k \leqslant l)} \tilde{q}(i, j; k, l), & \\ \text{其余的 } \tilde{q}(i, j; k, l)=0. & \end{cases}$$

## 参考文献


1 Chen Mufa. Optimal Markovian couplings and applications. Technical Report No 216. Canada, Ottawa: Univ of Ottawa, 1993

2 张余辉．耦合跳过程的保守性．北京师范大学学报(自然科学版)，1994, 30(3): 305

3 Chen Mufa. Coupling for jump processes. Acta Math Sinica (New Series), 1986, 2(2): 123

4 张余辉．一维马氏链保序耦合的构造．应用概率统计，1996, 12(4): 376

5 Chen Mufa. On coupling of jump processes. Chin Ann of Math, 1991, 12B(4): 385

6 张余辉．跳过程的若干课题研究: [学位论文]．北京师范大学数学系，1996


# A SUPPLEMENT TO “CONSTRUCTION OF ORDER-PRESERVING COUPLING FOR ONE-DIMENSIONAL MARKOV CHAINS”


Zhang　Yuhui

(Department of Mathematics, Beijing Normal University, 100875, Beijing, China)



**Abstract**　The order-preserving couplings of marginal Q-matrices being stochastically comparable and regular are constructed in two ways.



**Keywords**　stochastically comparable; order-preserving coupling; marginal conditions