应用概率统计　第十四卷
第一期　1998年2月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol. 14 No. 1 Feb. 1998

跳过程唯一性的一个问题*

张 余 辉
(北京师范大学, 北京, 100875)

摘　要

本文从跳过程随机可比的必要条件出发, 证明某种意义上的控制 q 对的正则性蕴含被控制 q 对决定唯一的跳过程.

关键词: 随机可比, 全稳定, 保守, 唯一性.
学科分类号: 211.62.

§1. 问题的背景和主要结果

先介绍以下基本概念. 假定可测空间 $(\boldsymbol{E},\mathcal{E})$ 上赋予了可测半序 $\leq$.

定义1 $(\boldsymbol{E},\mathcal{E})$ 上的可测函数 f 称为单调的, 如果任意 $x\leq y$, 有 $f(x)\leq f(y)$. 记 $(\boldsymbol{E},\mathcal{E})$ 上的单调函数全体为 $\mathcal{M}$. 如果集合 $A\in\mathcal{E}$ 的示性函数 $I_A\in\mathcal{M}$, 则称 A 是单调集, 记为 $A\in\mathcal{M}$.

记 $\mathcal{P}$ 为 $(\boldsymbol{E},\mathcal{E})$ 上的概率测度全体, $\mathcal{M}_+$ 为 $(\boldsymbol{E},\mathcal{E})$ 上的非负单调函数全体. 设 $\mu_1,\mu_2\in\mathcal{P}$, 如果 $\mu_1(f)\leq\mu_2(f)(f\in\mathcal{M}_+)$, 则称 $\mu_1\leq\mu_2$, 其中 $\mu_k(f)=\int f(z)\mu_k(dz)$.

设 $(\boldsymbol{E},\mathcal{E})$ 上的两个跳过程 $P_i(t,x,dy)(i=1,2)$, 由其导出两个 $b\mathcal{E}$ 上的半群 $P_1(t)$ 和 $P_2(t)$. 称 $P_1(t)$ 和 $P_2(t)$ 为随机可比的, 如果

$$P_1(t)f(x)\leq P_2(t)f(y),\qquad f\in\mathcal{M}_+,\quad x\leq y,\quad t\geq 0,$$

记为 $P_1(t)\leq P_2(t)$; 特别地, 当 $P_1(t)=P_2(t)$ 时, 称之为随机单调的.

通常记 $P^{\min}(t)$ 为 q 对 $(q(x),q(x,dy))$ 决定的最小 q 过程; 当过程唯一时, 略去 min, 简记为 $P(t)$.

关于随机可比和单调性的工作已有很长的一段时间, 并且已有很好的结果, 见[2], [3], [5]. 在文献[1]中汇集了马氏链随机可比性的内容, 但[4]指出: [1]中对Kirstein定理的陈述及证明都有问题, 并作了修正. 我们概述如下.

给定状态空间 $\boldsymbol{E}=\{0,1,\cdots\}\doteq\boldsymbol{Z}_+$ 上的两个全稳定 Q 矩阵 $Q^{(k)}=(q_{ij}^{(k)})$, 记相应的最小 Q 过程为 $P^{\min(k)}(t)=(P_{ij}^{\min(k)}(t))(k=1,2)$, 下面是两个不等式:

$$\sum_{j\geq k}P_{ij}^{\min(1)}(t)\leq\sum_{j\geq k}P_{mj}^{\min(2)}(t),\qquad i\leq m,\quad k\geq 0.\tag{1}$$

$$\sum_{j\geq k}q_{ij}^{(1)}\leq\sum_{j\geq k}q_{mj}^{(2)},\qquad i\leq m,\quad k\in\{0,\cdots,i\}\bigcup\{m+1,m+2,\cdots\}.\tag{2}$$

Kirstein定理是: 如果 Q 矩阵 $Q^{(1)}$ 和 $Q^{(2)}$ 都正则, 那么(1)和(2)等价. [1]想推广这一定理, 证明如

*国家教委博士点基金和北京师范大学青年科研基金资助项目.
本文1996年10月25日收到.

果Q矩阵 $Q^{(1)}$和$Q^{(2)}$都保守, 则(2)蕴含(1), 无需使用Q过程唯一性的假设. 不幸的是, 这一推广和证明都是错误的. Kirstein定理的正确推广是:

定理2[4] 假定$Q^{(1)}$和$Q^{(2)}$全稳定且保守, 则(1)蕴含(2). 反之, 如果$Q^{(1)}$和$Q^{(2)}$都有界(从而是正则的), 或者, $Q^{(2)}$是正则的, 那么(2)蕴含(1).

文献[4]还举了一个反例:

例3 (见[4]) 保守的生灭Q矩阵

$$q_{i,i-1}^{(1)} = q_{i,i+1}^{(1)} = q_{i,i-1}^{(2)} = (i+1)^2, \qquad q_{i,i+1}^{(2)} = \alpha(i+1)^2, \qquad i \geq 0, \quad \alpha > 1.$$

易证$Q^{(1)}$过程唯一, $Q^{(2)}$过程不唯一, 故(1)不能成立.

从此例可以看出在$Q^{(1)}$正则, 而$Q^{(2)}$非正则的情况下, (2)可以成立. 我们自然想知道: 如果(2)成立, $Q^{(2)}$是正则的, 是否$Q^{(1)}$决定唯一的Q过程? 答案是肯定的, 此结论已为 [4]所引用, 本文的目的是将这一结果推广至一般情形. 先介绍一般状态空间下定理2的推广(参看[2], [3]).

在赋予可测半序$\leq$的可测空间$(\boldsymbol{E}, \mathcal{E})$上, 给定两个$q$对 $(q_k(x), q_k(x, dy))(k=1,2)$.

假设4 存在集合$E_n \uparrow \boldsymbol{E}(n \to \infty)$使得

(i) $\sup_{x \in E_n} q_k(x) < \infty, \qquad n \geq 1, \quad k = 1, 2;$

(ii) 集合$H_n \hat{=} \{y \in E_n^c$: 存在$x \in E_n$使得$x \leq y\}$是单调集, 而且若$H_n$非空, 则必存在$b_n \in H_n$使得任意$x \in E_n, x \leq b_n$(其中$E_n^c$为$E_n$的余集).

状态空间$(E_n \bigcup \{b_n\}, (E_n \bigcup \{b_n\}) \bigcap \mathcal{E})$上单调函数和非负单调函数全体分别记为$\mathcal{M}_n$和$\mathcal{M}_n^+$. 定理2推广为:

定理5 设$(q_k(x), q_k(x, dy))$是全稳定q对(未必保守), $P_k^{\min}(t)$为相应的最小q过程($k=1,2$), 如果$P_1^{\min}(t)$和$P_2^{\min}(t)$随机可比, 则任意$A \in \mathcal{M}$和$x_1 \leq x_2$, 当 $x_1, x_2 \in A$或$x_1, x_2 \notin A$时,

$$\Omega_1 I_A(x_1) \leq \Omega_2 I_A(x_2), \tag{3}$$

其中算子$\Omega_k(x, dy) = q_k(x, dy) - q_k(x)\delta(x, dy), \quad k = 1, 2.$

如果假设4成立, 在两个q对相同且正则的情形时, $P_1(t) \leq P_2(t)$(即$P_1(t) = P_2(t)$是单调的)当且仅当(3)成立; 在$(q_1(x), q_1(x, dy))$全稳定(未必保守), $(q_2(x), q_2(x, dy))$正则的情形时, 有以下两个结论:

(i) 若存在正常数λ, 使得任意$A \in \mathcal{M}$存在$g = g_A \in \mathcal{M}_+$满足

$$P_1^{(\lambda)} I_A(x) \leq g(x) \leq P_2^{(\lambda)} I_A(x), \qquad x \in \boldsymbol{E}, \tag{4}$$

其中$P_k^{(\lambda)} = I + (1/\lambda)\Omega_k, \quad k = 1, 2,$, 则$P_1^{\min}(t) \leq P_2(t)$.

(ii) 若$P_1^{\min}(t)$和$P_2(t)$之一是单调的, 则(3)蕴含$P_1^{\min}(t) \leq P_2(t)$.

注6 定理5是[2]和[3]相应结果经修改后得到的, 主要是对(4)作了改正(可参看作者的博士学位论文"跳过程的若干课题研究"(北京师范大学, 1996)).

基于上述定理, 我们的研究表明$(q_2(x), q_2(x, dy))$在某种意义上是 $(q_1(x), q_1(x, dy))$的控制q对, 因为前者的正则性蕴含后者的正则性. 我们的主要结果为:

定理 设$(q_1(x), q_1(x, dy))$全稳定保守, $(q_2(x), q_2(x, dy))$正则. 如果假设4成立且$q_k(x, E_n^c) = q_k(x, H_n), \quad x \in \boldsymbol{E}, \ k = 1, 2$, 若还有以下条件之一成立, 则$(q_1(x), q_1(x, dy))$是正则$q$对(且$P_1(t) \leq P_2(t)$):

(i) 满足定理5的(4).

(ii) $P_1^{\min}(t)$和$P_2(t)$之一是单调的, 且(3)成立.

§2. 主要结果的证明

首先, 定义$(q_k(x), q_k(x,dy))$的一个q对逼近序列$(k=1,2)$:

$$q_k^{(n)}(x,B)=q_k(x,B),\qquad q_k^{(n)}(x,\{b_n\})=q_k(x,H_n),\qquad x\in E_n,\quad B\in E_n\bigcap\mathcal{E},$$
$$q_k^{(n)}(x)=I_{E_n}(x)q_k(x),\qquad n\ge 1,\quad k=1,2.$$

由假设4得到

$$\sup_{x\in E} q_k^{(n)}(x)=\sup_{x\in E_n} q_k(x)<\infty,\qquad n\ge 1,\quad k=1,2,$$
$$q_k^{(n)}(x)\to q_k(x),\quad q_k^{(n)}(x,A)\to q_k(x,A),\qquad n\to\infty,\quad x\in E,\quad A\in\mathcal{E},\quad k=1,2.$$

而定理的条件保证上述q对序列都是有界保守的, 因此, 由[3]的推论2.24和定理2.47知, 其决定的q过程唯一且不中断, 即为最小q过程$P_k^{(n)}(t)$, 满足

$$P_k^{(n)}(t)I_E(x)=1,\qquad x\in E,\quad n\ge 1,\quad k=1,2. \tag{5}$$

由[2]和[3]对定理5的证明知道, 分别在定理的条件(i)和(ii)之下, 任意$x_1,x_2\in E_n\bigcup\{b_n\}$, $x_1\le x_2$和$B\in\mathcal{M}_n$满足$P_1^{(n)}(t)I_B(x_1)\le P_2^{(n)}(t)I_B(x_2)$, 特别地取$x_1=x_2=x\in E_n$, $B=\{b_n\}$, 则

$$P_1^{(n)}(t)I_{\{b_n\}}(x)\le P_2^{(n)}(t)I_{\{b_n\}}(x),\qquad x\in E_n,\quad t\ge 0,\quad n\ge 1.$$

另一方面, 由定理的条件有$q_k^{(n)}(x,\{b_n\})=q_k^{(n)}(x,E_n^c)$, 进而, 由$(q_k^{(n)}(x),\ q_k^{(n)}(x,dy))$是有界$q$对, 容易证明

$$P_k^n(t)I_{E_n^c}(x)=P_k^n(t)I_{\{b_n\}}(x),\qquad x\in E_n,\quad t\ge 0,\quad n\ge 1,\quad k=1,2,$$

所以, 由上面两式得

$$P_1^{(n)}(t)I_{E_n^c}(x)\le P_2^{(n)}(t)I_{E_n^c}(x),\qquad x\in E_n,\quad t\ge 0,\quad n\ge 1. \tag{6}$$

其次, 再构造一个$(q_k(x), q_k(x,dy))$的q对逼近序列$(\overline{q}_k^{(n)}(x),\overline{q}_k^{(n)}(x,dy))(k=1,2)$:

$$\overline{q}_k^{(n)}(x,dy)=I_{E_n}(x)q_k(x,dy),\qquad \overline{q}_k^{(n)}(x)=I_{E_n}(x)q_k(x),\qquad n\ge 1,\quad k=1,2.$$

显然, $(\overline{q}_k^{(n)}(x),\overline{q}_k^{(n)}(x,dy))$是有界保守的, 所以, 其决定的$q$过程唯一且不中断, 即

$$\overline{P}_k^n(t)I_E(x)=1,\qquad x\in E,\quad n\ge 1,\quad k=1,2. \tag{7}$$

最后, 从最小q过程是Kolmogorov向后方程的最小解出发, 由[3]的定理2.13(局部化定理)和定理2.6(比较定理)可以得到

$$P_k^{(n)}(t)I_A(x)=\overline{P}_k^{(n)}(t)I_A(x),\qquad x\in E,\quad A\subset E_n,\quad n\ge 1,\quad k=1,2.$$

特别地取$A=E_n$, 则

$$P_k^{(n)}(t)I_{E_n}(x)=\overline{P}_k^{(n)}(t)I_{E_n}(x),\qquad x\in E,\quad n\ge 1,\quad k=1,2. \tag{8}$$

由(5)—(8)立刻有

$$\overline{P}_1^{(n)}(t)I_{E_n^c}(x) \le \overline{P}_2^{(n)}(t)I_{E_n^c}(x), \qquad x\in \boldsymbol{E}, \quad t\ge 0, \quad n\ge 1.$$

注意到$(q_2(x), q_2(x,dy))$是正则的，因而由[3]的引理5.15得

$$0\le \lim_{n\to\infty} \overline{P}_1^{(n)}(t)I_{E_n^c}(x) \le \lim_{n\to\infty} \overline{P}_2^{(n)}(t)I_{E_n^c}(x)=0, \qquad x\in \boldsymbol{E}, \quad t\ge 0,$$

即

$$\lim_{n\to\infty} \overline{P}_1^{(n)}(t)I_{E_n^c}(x)=0, \qquad x\in \boldsymbol{E}, \quad t\ge 0,$$

再一次用[3]的引理5.15得证$(q_1(x), q_1(x,dy))$是正则的.

致谢 作者感谢陈木法教授多年来的指导和帮助.

参 考 文 献

[1] Anderson, W. J., *Continuous-Time Markov Chains*, Springer-Verlag, New York, 1991.
[2] Chen, M. F., On coupling of jump processes, Chin. Ann. of Math., **12B**(1991), 385-399.
[3] Chen, M. F., *From Markov Chains To Non-Equilibrium Particle Systems*, World Scientific, Singapore, 1992.
[4] Chen, M. F., A comment on the book "Continuous-Time Markov Chains" by W. J. Anderson, Chinese J. Appl. Prob. Stat., **12**(1996), 55-59.
[5] Kirstein, B. M., Monotonicity and comparability of time-homogeneous Markov processes with discrete state space, Math. Operationsforsch Statist., **7**(1976), 151-168.

A Problem on the Uniqueness of Jump Processes

Zhang Yuhui
(*Beijing Normal University, Beijing*)

In this paper, starting from the necessary conditions of two jump processes being stochastically comparable, it is proved that the regularity of certain general controlling q-pair implies the uniqueness of the jump processes determined by the controlled q-pair.