1996年 12月 北京师范大学学报(自然科学版) Dec. 1996
第32卷 第4期 Journal of Beijing Normal University (Natural Science) Vol. 32 No.4

一类距离下的最优耦合*

张余辉

(北京师范大学数学系，100875，北京；28岁，男，博士生)

摘要 研究了跳过程在一类距离 ρ 下的最优耦合，证明了在相当弱的条件下，如果存在保序耦合 $\overline{\Omega}$，则 $\overline{\Omega}$ 是 ρ 最优的，并且给出了 $\overline{\Omega}\rho$ 的明确表达式．还讨论了离散时间马氏链在该类距离下的最优耦合，结论与连续时间的情形是平等的．

关键词 保序耦合；最优耦合；边缘条件

分类号 O211.6

1 主要结果

文献[1]首次提出了 ρ 最优耦合的概念，这提供了耦合依距离进行分类的一种有效途径．近年来，随着耦合方法的运用，尤其是在微分流形上耦合方法的使用，使耦合与距离的关系趋于明朗．不同的距离下最优耦合可能完全不同，要使耦合方法发挥最大效益，选取一个恰当的距离尤为重要，这也是一个难点．因此，研究各类距离下的最优耦合是很有必要的．本文只讨论马氏耦合，所涉及过程均指马氏过程．

为方便起见，先介绍一些概念和已知结果，可参看[2]．

定义1 设 $P_k(t,\ x_k,\ \mathrm{d}y_k)$ 是可测空间 $(E_k,\ \varepsilon_k)$ 上的跳过程 $(k=1,\ 2)$，如果 $(E_1\times E_2,\ \varepsilon_1\times\varepsilon_2)$ 上的跳过程 $\tilde{P}(t;\ x_1,\ x_2;\ \mathrm{d}y_1,\ \mathrm{d}y_2)$ 满足

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{P}(t;\ x_1,\ x_2;\ A_1\times E_2)=P_1(t,\ x_1,\ A_1),\\&\tilde{P}(t;\ x_1,\ x_2;\ E_1\times A_2)=P_2(t,\ x_2,\ A_2),\end{aligned}\right.\quad t\geqslant 0,\ x_k\in E_k,\ A_k\in\varepsilon_k,\ k=1,\ 2,\tag{1}$$

则称其为前2个过程的耦合跳过程．当 $E_1=E_2=E$，$\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon$，且在 E 上赋予半序“$\leqslant$”时，如果 $\tilde{P}(t;\ x_1,\ x_2;\ \mathrm{d}y_1,\ \mathrm{d}y_2)$ 还满足

$$\tilde{P}(t;\ x_1,\ x_2;\ F)=1,\quad x_1\leqslant x_2,\ t\geqslant 0,\tag{2}$$

其中 $F=\{(y_1,\ y_2)\in E\times E\colon\ y_1\leqslant y_2\}$，则称其为前2个过程的保序耦合跳过程．

设 $(q(x),\ q(x,\ \mathrm{d}y))$ 是可测空间 $(E,\ \varepsilon)$ 的一个全稳定保守 q 对，记 $_b\varepsilon$ 为 E 上全体有界 ε 可测函数的集合，定义算子

$$\Omega f(x)=\int q(x,\ \mathrm{d}y)(f(y)-f(x)),\quad f\in{}_b\varepsilon.$$

定义2 设 $(q_k(x_k),\ q_k(x_k,\mathrm{d}y_k))$ 是 $(E_k,\ \varepsilon_k)$ 上的 q 对 $(k=1,2)$，其耦合 q 对记为 $(\tilde{q}(x_1,\ x_2),\ \tilde{q}(x_1,\ x_2;\ \mathrm{d}y_1,\ \mathrm{d}y_2))$，满足下式的算子称为耦合算子：

$$\tilde{\Omega}f(x_1,\ x_2)=\Omega_1 f(x_1),\ f\in{}_b\varepsilon_1;\ \tilde{\Omega}f(x_1,\ x_2)=\Omega_2 f(x_2),\ f\in{}_b\varepsilon_2,\ x_k\in E_k,\ k=1,\ 2.\tag{3}$$

* 国家教委博士点基金资助项目
收稿日期：1996-05-13

文献[3]证明了当边缘 q 对均正则时，其耦合 q 对亦正则，(1)与(3)式等价，而且记 F^c 为 F 的余集时，(2)式等价于

$$\tilde{q}(x_1,\ x_2;\ F^c)=0,\ x_1 \leqslant x_2. \tag{4}$$

在跳过程的研究中，保序耦合有许多应用，是有重要作用的一类耦合，我们的研究表明保序耦合还与最优耦合密切相关.

定义 3 设 $(E,\ \rho,\ \varepsilon)$ 是一个距离可测空间，耦合算子 $\bar{\Omega}$ 称为 ρ 最优的，如果

$$\bar{\Omega}\rho(x_1,\ x_2)=\inf_{\tilde{\Omega}}\tilde{\Omega}\rho(x_1,\ x_2),\ x_1,\ x_2\in E,$$

其中 $\tilde{\Omega}$ 取遍所有的耦合算子(在研究随机可比马尔可夫过程的 ρ 最优耦合时，自然地把上述条件“$x_1,\ x_2\in E$”改为“$(x_1,\ x_2)\in F$”).

在 $E=\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}:=\mathbf{Z}_+$ 且赋予通常的序“$\leqslant$”时，假定 g 是 E 上严格增函数，定义距离 $\rho(i,j)=|g(i)-g(j)|,\ i,j\in E$. 对于一般的马氏链，我们得到如下结论:

定理 1 设 $E=\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$ 上正则 Q 距阵 $Q^{(k)}=(q_{ij}^{(k)})(k=1,2)$ 存在常数 C，c 和 E 中某点 i_0 使得

$$\Omega_k\rho(i,\ i_0):=\sum_l q_{il}^{(k)}(\rho(l,\ i_0)-\rho(i,\ i_0))\leqslant C+c\rho(i,\ i_0),\ i\in E, \tag{5}$$

则任意耦合算子 $\tilde{\Omega}$ 有

$$\tilde{\Omega}\rho(i,j)=\Omega_2 g(j)-\Omega_1 g(i)+2\sum_m\sum_{n<m}\tilde{q}(i,j;\ m,n)(g(m)-g(n)),\quad i\leqslant j.$$

定理 1 的(5)式在通常情形下都能满足. 由定理 1 和文献[4]的定理 2.3 直接得到下面的推论.

推论 1 在定理 1 的条件下，若 $Q^{(1)}$ 和 $Q^{(2)}$ 所分别决定的马氏链 $P^{(1)}(t)$ 和 $P^{(2)}(t)$ 还是随机可比的，则(必定存在的)正则保序耦合 $\bar{\Omega}$ 为 ρ 最优耦合(在 F 上)，并且

$$\tilde{\Omega}\rho(i,j)=\Omega_2 g(j)-\Omega_1 g(i),\quad i\leqslant j.$$

特别地，在 Q 矩阵相同即 $P^{(1)}(t)=P^{(2)}(t)=P(t)$ 且 $P(t)$ 单调时，正则保序耦合是 ρ 最优耦合.

自然地，将定理 1 推广至 d 维欧氏空间 $\mathbf{R}^d$ (或 $\mathbf{Z}^d$). 取 $\mathbf{R}^d$ (或 $\mathbf{Z}^d$) 上的自然半序“$\leqslant$”:

$$x\leqslant y \Longrightarrow x_k\leqslant y_k,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ d,$$

其中 $x=(x_1,\ \cdots,\ x_d),\ y=(y_1,\ \cdots,\ y_d)\in\mathbf{R}^d$ 或 $\mathbf{Z}^d$. 假定 $\{g_k\}_{k=1}^d$ 是一组 $\mathbf{R}$ 上的严格增函数，令

$$\rho(x,y)=\sum_{k=1}^d\rho_k(x_k,\ y_k)=\sum_{k=1}^d|g_k(x_k)-g_k(y_k)|,$$

易验证 ρ 是 $\mathbf{R}^d$ (或 $\mathbf{Z}^d$) 上的一个距离. 定义

$$\operatorname{sgn}(\omega)=\begin{cases}1, & \omega>0;\\ -1, & \omega\leqslant 0.\end{cases}\quad \omega\in\mathbf{R}.$$

定理 2 设 $\mathbf{R}^d$ (或 $\mathbf{Z}^d$) 上正则 q 对 $(q^{(k)}(x),\ q^{(k)}(x,\ \mathrm{d}y))(k=1,2)$ 存在常数 C, c 和 $\mathbf{R}^d$ (或 $\mathbf{Z}^d$) 中某点 x^* 使得

$$\Omega_k\rho(x,\ x^*):=\int q^{(k)}(x,\ \mathrm{d}y)(\rho(y,\ x^*)-\rho(x,\ x^*))\leqslant C+c\rho(x,\ x^*),\ k=1,\ 2, \tag{6}$$

其中 $x\in\mathbf{R}^d$ (或 $x\in\mathbf{Z}^d$). 则任意耦合算子 $\tilde{\Omega}$ 有

$$\tilde{\Omega}\rho(x,y)=\int q^{(1)}(x,\ \mathrm{d}u)\Big(\sum_{k=1}^d(g_k(u_k)-g_k(x_k))\operatorname{sgn}(x_k-y_k)\Big)-\int q^{(2)}(y,\ \mathrm{d}v)\cdot$$

$$\Big(\sum_{k=1}^{d}(g_k(v_k)-g_k(y_k))\operatorname{sgn}(x_k-y_k)\Big)+2\int\tilde{q}(x,\ y;\ \mathrm{d}u,\ \mathrm{d}v)\Big(\sum_{k=1}^{d}\rho_k(u_k,\ v_k)\delta_{\{\operatorname{sgn}(x_k-y_k)\neq\operatorname{sgn}(u_k,\ v_k)\}}\Big),$$

其中 δ 是示性函数．特别地，若 $x\leqslant y$，且令 $G(u)=\sum_{k=1}^{d}g_k(u_k)$，$u\in\mathbf{R}^d$，则

$$\tilde{\Omega}\rho(x,\ y)=\Omega_2G(y)-\Omega_1G(x)+2\int\tilde{q}(x,\ y;\ \mathrm{d}u,\ \mathrm{d}v)\Big(\sum_{k=1}^{d}\rho_k(u_k,\ v_k)\delta_{\{u_k>v_k\}}\Big).\tag{7}$$

进一步，若还存在(正则)保序耦合 $\bar{\Omega}$，则 $\bar{\Omega}$ 是 ρ 最优耦合(在 F 上)且

$$\bar{\Omega}\rho(x,\ y)=\Omega_2G(y)-\Omega_1G(x),\quad x\leqslant y.$$

在 $\mathbf{Z}^d$ 上再定义一个距离，半序同上．假定 g 是 $\mathbf{Z}^d$ 上的可测函数且满足

$$\begin{cases}g(i)\neq g(j), & i\neq j;\\ g(i)<g(j), & i\leqslant j \text{ 且 } i\neq j.\end{cases}$$

令 $\bar{\rho}(i,\ j)=|g(i)-g(j)|$，易验证 $\bar{\rho}$ 是 $\mathbf{Z}^d$ 上的距离．在此距离下，我们得到

定理3 在定理2的条件下，则任意耦合算子 $\tilde{\Omega}$ 有

$$\tilde{\Omega}\bar{\rho}(i,j)=\Omega_2g(j)-\Omega_1g(i)+\sum_{(k,\ l)\in F^c}\tilde{q}(i,j;\ k,l)(g(k)-g(l)+\bar{\rho}(k,\ l)),\quad i\leqslant j.$$

进而，如果存在(正则)保序耦合 $\bar{\Omega}$，则 $\bar{\Omega}$ 是 ρ 最优耦合(在 F 上)且

$$\bar{\Omega}\bar{\rho}(i,j)=\Omega_2g(j)-\Omega_1g(i),\quad i\leqslant j.$$

值得提到的是，张绍义证明了离散空间中任意距离下的最优耦合总是存在的(见[1]的定理2.4)．现在考虑时间离散情形马氏链，此时，关于2个转移概率类似地有耦合、保序耦合和某个距离下最优耦合的概念．最近，张绍义运用可测线性规划的方法证明了马氏链的 ρ 最优可测耦合必定存在．

考虑欧氏空间 $\mathbf{R}^d$ (或 $\mathbf{Z}^d$)，取前面的第1个距离 ρ 并取同样的半序得到：

定理4 设 $\mathbf{R}^d$ (或 $\mathbf{Z}^d$)上的转移概率 $P_k(x,\ \mathrm{d}y)(k=1,\ 2)$ 存在 $\mathbf{R}^d$ (或 $\mathbf{Z}^d$)中某点 z 使得

$$P_k\rho(x,\ z)=\int\rho(y,\ z)P_k(x,\ \mathrm{d}y)<\infty,\ x\in\mathbf{R}^d\ (\text{或 } x\in\mathbf{Z}^d),\ k=1,\ 2,\tag{8}$$

则任意耦合 $\tilde{P}$ 有

$$\tilde{P}\rho(x,y)=\int\Big(\sum_{k=1}^{d}g_k(u_k)\operatorname{sgn}(x_k-y_k)\Big)P_1(x,\mathrm{d}u)-\int\Big(\sum_{k=1}^{d}g_k(v_k)\operatorname{sgn}(x_k-y_k)\Big)P_2(y,\ \mathrm{d}v)+$$
$$2\int\Big(\sum_{k=1}^{d}\rho_k(u_k,\ v_k)\delta_{\{\operatorname{sgn}(x_k-y_k)\neq\operatorname{sgn}(u_k,\ v_k)\}}\Big)\tilde{P}(x,\ y;\ \mathrm{d}u,\ \mathrm{d}v),$$

其中 δ 是示性函数．特别地，若 $x\leqslant y$，则

$$\tilde{P}\rho(x,\ y)=P_2G(y)-P_1G(x)+2\int\Big(\sum_{k=1}^{d}\rho_k(u_k,\ v_k)\delta_{\{u_k>v_k\}}\Big)\tilde{P}(x,\ y;\ \mathrm{d}u,\ \mathrm{d}v).\tag{9}$$

进一步，若还存在保序耦合 $\bar{P}$，则 $\bar{P}$ 是 ρ 最优耦合(在 F 上)且 $\bar{P}\rho(x,y)=P_2G(y)-P_1G(x)$，$x\leqslant y$．

在 $\mathbf{Z}^d$ 上取前面的第2个距离 $\bar{\rho}$，得到：

定理5 在定理4的条件下，则任意耦合算子 $\tilde{P}$ 有

$$\tilde{P}\bar{\rho}(i,j)=P_2g(j)-P_1g(i)+\sum_{(k,\ l)\in F^c}(g(k)-g(l)+\bar{\rho}(k,\ l))\tilde{P}(i,j;\ k,l),\quad i\leqslant j.$$

进而，如果存在保序耦合 $\overline{P}$，则 $\overline{P}$ 是 ρ 最优耦合(在 F 上)且 $\bar{P}\bar{\rho}(i,j)=P_2g(j)-P_1g(i)$，$i\leqslant j$.

2 主要定理的证明

因为证明的方法类似，为节省篇幅，此处只证明定理 2 和定理 4.

定理 2 的证明 为简单起见，只就 $x\leqslant y$ 的情形给出证明，其他情形同理可证. 由(6)式得

$$|\tilde{\Omega}|\rho(x,y):=\int\tilde{q}(x,\ y;\ \mathrm{d}u,\ \mathrm{d}v)|\rho(u,v)-\rho(x,y)|\leqslant\int\tilde{q}(x,y;\ \mathrm{d}u,\ \mathrm{d}v)(\rho(u,x)+\rho(v,y))\leqslant$$
$$\int\tilde{q}(x,\ y;\ \mathrm{d}u,\ \mathrm{d}v)(\rho(u,x^*)+\rho(x,x^*)+\rho(v,x^*)+\rho(y,x^*))=$$
$$\Omega_1\rho(x,x^*)+\Omega_2\rho(y,x^*)+2\tilde{q}(x,y)(\rho(x,x^*)+\rho(y,x^*))\leqslant$$
$$2C+(c+2\tilde{q}(x,y))(\rho(x,x^*)+\rho(y,x^*))<\infty.$$

因此，

$$\tilde{\Omega}\rho(x,y)=\int_F\tilde{q}(x,\ y;\ \mathrm{d}u,\ \mathrm{d}v)(\rho(u,v)-\rho(x,y))+\int_{F^c}\tilde{q}(x,y;\ \mathrm{d}u,\ \mathrm{d}v)(\rho(u,v)-\rho(x,y)).\quad(10)$$

由边缘条件和(6)式得

$$\int\tilde{q}(x,\ y;\ \mathrm{d}u,\ \mathrm{d}v)|G(v)-G(y)|\leqslant\int\tilde{q}(x,y;\ \mathrm{d}u,\ \mathrm{d}v)\rho(v,y)\leqslant\Omega_2\rho(y,x^*)+2\tilde{q}(x,y)\rho(y,x^*)\leqslant$$
$$C+(c+2\tilde{q}(x,y))\rho(y,x^*)<\infty.$$

$$\int\tilde{q}(x,\ y;\ \mathrm{d}u,\ \mathrm{d}v)|G(u)-G(x)|\leqslant\int\tilde{q}(x,y;\ \mathrm{d}u,\ \mathrm{d}v)\rho(u,x)\leqslant C+(c+2\tilde{q}(x,y))\rho(x,x^*)<\infty,$$

故可以对(10)式的第 1 项进行拆项(后面要并项)，因此，

$$(10)\text{式的第 1 项}=\int_F\tilde{q}(x,\ y;\ \mathrm{d}u,\ \mathrm{d}v)(G(v)-G(y))-\int_F\tilde{q}(x,y;\ \mathrm{d}u,\ \mathrm{d}v)(G(u)-G(x))=$$
$$\Omega_2G(y)-\Omega_1G(x)+\int_{F^c}\tilde{q}(x,y;\ \mathrm{d}u,\ \mathrm{d}v)(G(u)-G(v)-G(x)+G(y)),$$

所以，
$$\tilde{\Omega}\rho(x,y)=\Omega_2G(y)-\Omega_1G(x)+\int_{F^c}\tilde{q}(x,y;\ \mathrm{d}u,\ \mathrm{d}v)(\rho(u,v)+G(u)-G(v)).\quad(11)$$

注意到 F^c 可按每维大小共分成 2^d-1 种情况，例如 $u_1>v_1$，$u_k\leqslant v_k$，$2\leqslant k\leqslant d$；或 $u_k>v_k$，$1\leqslant k\leqslant d$ 等等. 经过仔细计算后知(11)式的第 3 项为

$$2\int\tilde{q}(x,\ y;\ \mathrm{d}u,\ \mathrm{d}v)\Big(\sum_{k=1}^{d}\rho_k(u_k,\ v_k)\delta_{\{u_k>v_k\}}\Big).$$

综合以上得证(7)式. 比较(7)和(11)式可看出，它们的第 3 项是不小于零的且实际上是在 F^c 上的积分. 只要 $\tilde{q}(x,\ y;\ F^c)=0$，$x\leqslant y$，则 $\tilde{\Omega}\rho(x,\ y)$ 达到最小值，所以，由(4)式知保序耦合是 F 上的 ρ 最优耦合.

定理 4 的证明 与定理 2 的证明类似，为简单起见，只就 $x\leqslant y$ 的情形给出证明，其他情形同理可证. 由(8)式可得

$$\tilde{P}\rho(x,y)\leqslant\int(\rho(u,z)+\rho(v,z))\tilde{P}(x,y;\ \mathrm{d}u,\ \mathrm{d}v)=P_1\rho(x,\ z)+P_2\rho(y,\ z)<\infty,$$

$$\int G(u)\tilde{P}(x,y;\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)=\int G(u)P_1(x,\mathrm{d}u)\leqslant P_1\rho(x,z)+G(z)<\infty,$$

$$\int G(v)\tilde{P}(x,y;\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)\leqslant P_2\rho(y,z)+G(z)<\infty.$$

因此，

$$\tilde{P}\rho(x,y)=\int_F\rho(u,v)\tilde{P}(x,y;\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)+\int_{F^c}\rho(u,v)\tilde{P}(x,y;\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)=$$

$$\int_F(G(v)-G(u))\tilde{P}(x,y;\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)+\int_{F^c}\rho(u,v)\tilde{P}(x,y;\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)=$$

$$P_2G(y)-P_1G(x)+\int_{F^c}(G(u)-G(v)+\rho(u,v))\tilde{P}(x,y;\mathrm{d}u,\mathrm{d}v).$$

仔细计算后知上式的第3项为

$$2\int(\sum_{k=1}^{d}\rho_k(u_k,v_k)\delta_{\{u_k>v_k\}})\tilde{P}(x,y;\mathrm{d}u,\mathrm{d}v).$$

综合以上得证(9)式．由上面的证明易看出，(9)式的第3项是不小于零的且是在F^c上的积分．当$\tilde{P}(x,y;F^c)=0$，$x\leqslant y$，则$\tilde{P}\rho(x,y)$必达到最小值，因而，若存在保序耦合，它必是F上的ρ最优耦合．

感谢陈木法教授的指导和帮助．

3 参考文献

1 Chen Mufa. Optimal Markovian couplings and applications. Technical Report No. 216, Carleton Univ, 1993

2 Chen Mufa. From Markov chains to non-equilibrium particle systems. Singapore: World Scientific, 1992

3 Chen Mufa. Coupling for jump processes. Acta Math Sinica New Series, 1986, 2(2): 123

4 张余辉．跳过程的若干课题研究：[学位论文]．北京：北京师范大学数学系，1996

THE OPTIMAL MARKOVIAN COUPLINGS FOR A SPECIFIC TYPE OF DISTANCE

Zhang Yuhui

(Department of Mathematics, Beijing Normal University, 100875, Beijing, PRC)

Abstract The ρ-optimal couplings for a specific type of distance ρ are studied. It is proved that under the mild conditions, if there exists the order-preserving coupling $\overline{\Omega}$, then it is indeed one of the ρ-optimal couplings. The explicit representation of $\overline{\Omega}$ is presented. Meanwhile, the optimal coupling of time-discrete Markov chains under this distance is discussed and the results obtained are parallel to these of time-continuous.

Keywords order-preserving coupling; optimal coupling; marginal conditions