应用概率统计　第十二卷
第四期　1996年11月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol. 12 No. 4 Nov. 1996

一维马氏链保序耦合的构造*

张 余 辉
(北京师范大学, 北京, 100875)

摘　要

本文证明两个随机可比的一维正则马氏链必定存在保序耦合并给出了保序耦合的构造．我们也研究了一类距离下的最优耦合, 证明边缘马氏链随机可比时保序耦合在该距离下最优．

关键词: 随机可比性, 保序耦合, 最优耦合, 正则性, 边缘条件．
学科分类号: 211.62.

§1.　引 言 与 结 果

首先回顾一些定义和已知结果, 详见[3]．

假定$(X_t^k)_{t\ge0}$是可测空间$(E_k,\mathscr{E}_k)$上具有分布P_k的马氏过程$(k=1,2)$, $(X_t)_{t\ge0}$是$(E_1\times E_2,\mathscr{E}_1\times\mathscr{E}_2)$上具有分布$\widetilde{\mathsf{P}}$的过程, 称$(X_t)$为$(X_t^1)$和$(X_t^2)$的耦合, 如果下述边缘条件成立

$$\begin{aligned}&\widetilde{\mathsf{P}}^{(x_1,x_2)}(X_t\in B_1\times E_2)=\mathsf{P}_1^{x_1}(X_t^1\in B_1),\\&\widetilde{\mathsf{P}}^{(x_1,x_2)}(X_t\in E_1\times B_2)=\mathsf{P}_2^{x_2}(X_t^2\in B_2),\quad t\ge0,\ x_k\in E_k,\ B_k\in\mathscr{E}_k,\ k=1,2.\end{aligned}\tag{1.1}$$

当$E_1=E_2=E,\mathscr{E}_1=\mathscr{E}_2=\mathscr{E}$且$E$上赋有半序$\le$时, 如果耦合$(X_t)$满足

$$\widetilde{\mathsf{P}}^{(x_1,x_2)}(X_t^1\le X_t^2)=1,\qquad t\ge0,\ x_1\le x_2,\tag{1.2}$$

称(X_t)是(X_t^1)和(X_t^2)的保序耦合．

耦合方法用途很多, 一典型的用法是以比较的手段将较复杂过程的研究归结为简单过程的研究, 另一典型的用法是比较从不同点出发的同一过程长时间后的发展行为．在这些应用中, 保序性常起着重要作用．耦合过程未必是马氏的, 但马氏耦合使我们能运用马氏过程的理论, 有诸多益处．本文只讨论马氏耦合, 所有过程均指马氏过程．

本文取定$E=\{0,1,2,\cdots\}$. 熟知, 马氏转移函数$P(t)=(P_{ij}(t):i,j\in E)$若满足跳条件(或称连续性条件):

$$\lim_{t\to0}P_{ii}(t)=1,\qquad\qquad i\in E,\tag{1.3}$$

则极限

$$q_i=\lim_{t\to}\frac{1-P_{ii}(t)}{t},\qquad q_{ij}=\lim_{t\to0}\frac{P_{ij}(t)}{t},\qquad j\ne i\in E,$$

*国家教委博士点基金资助项目.
本文1995年6月15日收到.

存在, 且$0 \le \sum_{j\ne i} q_{ij} \le q_i \le \infty, i \in E$. 若$q_i < \infty$, 则称$i$是稳定的; 若$q_i = \sum_{j\ne i} q_{ij}$, 则称$i$是保守的. 记$q_{ii} = -q_i$, 令$Q = (q_{ij} : i, j \in E)$. 若每个$i$都是稳定的, 则称$Q$为全稳定的; 若每个$i \in E$都是保守的, 则称$Q$为保守的. 满足(1.3)的马氏转移函数$P(t)$称为马氏链或$Q$过程. 如果$Q$矩阵全稳定, 保守且决定唯一的$Q$过程, 则称$Q$为正则的.

记${}_b\mathcal{E}$为E上全体有界函数的集合, 定义算子

$$\Omega f(i) = \sum_j q_{ij}(f(j) - f(i)), \qquad f \in_b \mathcal{E}.$$

满足下式的算子称为耦合算子:

$$\begin{aligned} &\widetilde{\Omega} f(i_1, i_2) = \Omega_1 f(i_1), \qquad f \in_b \mathcal{E}_1, \\ &\widetilde{\Omega} f(i_1, i_2) = \Omega_2 f(i_2), \qquad f \in_b \mathcal{E}_2,\ i_k \in E_k,\ k = 1, 2. \end{aligned} \tag{1.4}$$

给定E上正则Q矩阵$Q^{(k)} = (q_{ij}^{(k)})$, 相应的马氏链为 $P^{(k)}(t)(k = 1, 2)$, 记$P^{(1)}(t)$和$P^{(2)}(t)$的耦合马氏链为$\widetilde{\mathsf{P}}(t)$, 其$Q$矩阵为$\widetilde{Q} = (\widetilde{q}(i, j; k, l) : i, j, k, l \in E)$. 此时(1.4)变成

$$\begin{cases} \sum\limits_{l=0}^{\infty} \widetilde{q}(i, j; k, l) = q_{ik}^{(1)}, & k \ne i, \\ \sum\limits_{k=0}^{\infty} \widetilde{q}(i, j; k, l) = q_{jl}^{(2)}, & l \ne j. \end{cases} \tag{1.5}$$

已证$\widetilde{Q}$是全稳定[4], 保守的[7], 且正则[1]. 此外, (1.5)等价于[1]

$$\sum_l \widetilde{\mathsf{P}}(t; i, j; k, l) = P_{ik}^{(1)}(t), \qquad \sum_k \widetilde{\mathsf{P}}(t; i, j; k, l) = P_{jl}^{(2)}(t), \qquad t \ge 0.$$

在E上赋予通常的半序$\le$, 并记$F = \{(k, l) : k \le l\}$.F的余集记为F^c. 那么, $\widetilde{\mathsf{P}}(t)$是保序耦合等价于

$$\widetilde{\mathsf{P}}(t; i, j; F) = 1, \qquad i \le j,\ t \ge 0.$$

也等价于[1]

$$\widetilde{q}(i, j; F^c) = 0, \qquad i \le j. \tag{1.6}$$

称$P^{(1)}(t)$和$P^{(2)}(t)$为随机可比的, 如果

$$\sum_{j \ge k} P_{ij}^{(1)}(t) \le \sum_{j \ge k} P_{mj}^{(2)}(t), \qquad i \le m,\ k \ge 0,\ t \ge 0.$$

特别地, 若$P^{(1)}(t) = P^{(2)}(t) = P(t)$且上式成立, 则称$P(t)$为单调的.

跳过程随机可比性和单调性的研究有很长时间[2,3,6]. 从[2], [5]知道, $P^{(1)}(t)$和$P^{(2)}(t)$随机可比的充要条件是

$$\sum_{l \ge k} q_{il}^{(1)} \le \sum_{l \ge k} q_{jl}^{(2)}, \qquad i \le j, k \in \{0, \cdots, i\} \cup \{j + 1, j + 2, \cdots\},$$

等价地(由保守性), 当$i \le j$时,

$$\begin{cases} \sum\limits_{l \ge k} q_{il}^{(1)} \le \sum\limits_{l \ge k} q_{jl}^{(2)}, & k \ge j + 1; \\ \sum\limits_{l=0}^{k} q_{il}^{(1)} \ge \sum\limits_{l=0}^{k} q_{jl}^{(2)}, & 0 \le k \le i - 1. \end{cases} \tag{1.7}$$

保序耦合有许多重要应用[3]．自然要问: 什么样的马氏链存在保序(马氏)耦合? 容易看出: 若$P^{(1)}(t)$和$P^{(2)}(t)$有保序耦合$\widetilde{\mathrm{P}}(t)$, 则$P^{(1)}(t)$和$P^{(2)}(t)$必是随机可比的, 但反问题却要艰难得多．本文只就一维情形找到解答, 高维情形尚属未知．

定理1.1 若E上正则马氏链$P^{(1)}(t)$和$P^{(2)}(t)$随机可比, 则必定存在正则保序的耦合马氏链$\widetilde{\mathrm{P}}(t)$.

保序耦合的重要性还在于它与最优耦合有关．设ρ是E上的一个距离, 耦合算子$\bar{\Omega}$称为ρ最优的, 如果

$$\bar{\Omega}\rho(i_1,i_2)=\inf_{\widetilde{\Omega}}\widetilde{\Omega}\rho(i_1,i_2),\qquad i_1,i_2\in E.$$

其中$\widetilde{\Omega}$取遍所有的耦合算子．在研究随机可比马氏链的ρ最优耦合时, 自然地把上述条件"$i_1,i_2\in E$"改为"$(i_1,i_2)\in F$". ρ最优耦合的概念是[4]提出的, 这提供了耦合依距离进行分类的一种有效途径．

假定g是E上的严格增函数, 定义距离$\rho(i,j)=|g(i)-g(j)|, i,j\in E$.

命题1.2 给定正则Q矩阵$Q^{(k)}=(q_{ij}^{(k)})(k=1,2)$, 若存在常数$C,c$和$E$中某点$m_0$使得

$$\Omega_k\rho(i,m_0)\le C+c\rho(i,m_0),\qquad i\in E,\ k=1,2,\tag{1.8}$$

则对任意耦合算子$\widetilde{\Omega}$, 有

$$\widetilde{\Omega}\rho(i,j)=\Omega_2g(i)-\Omega_1g(i)+2\sum_m\sum_{n<m}\widetilde{q}(i,j;m,n)(g(m)-g(n)),\qquad i\le j.$$

由定理1.1和命题1.2直接得到

推论1.3 在命题1.2的条件下, 若$Q^{(1)}$和$Q^{(2)}$所决定的马氏链$P^{(1)}(t)$和$P^{(2)}(t)$是随机可比的, 则保序耦合$\widetilde{\Omega}$为ρ最优耦合(在F上)．此外,

$$\widetilde{\Omega}\rho(i,j)=\Omega_2g(i)-\Omega_1g(i),\qquad i\le j.$$

特别地, 若Q矩阵相同(即$P^{(1)}(t)=P^{(2)}(t)=P(t)$)且$P(t)$单调, 保序耦合就是$\rho$最优耦合的．

应当指出, 条件(1.8)是很弱的, 已知的例子均满足．另外, 张绍义已对离散状态空间证明ρ最优耦合总存在, 参看[4; 定理2.4]．

§2. 结果的证明

定理1.1的证明. 由§1易看出, 只需构造$E\times E$上的一个满足(1.5), (1.6)的$\widetilde{Q}$矩阵即可．因保序耦合只涉及$i\le j$的情形, 下面只构造此情形下的耦合, $i>j$时简单地定义成基本耦合或齐步走耦合[1,3,4], 但在$Q^{(1)}=Q^{(2)}$时需对称地给出构造．记$a^+=a\vee 0, a\in \boldsymbol{R}$.

(1) 当$i<k<j$时, 令

$$\widetilde{q}(i,j;i,k)=(q_{jk}^{(2)}-q_{ik}^{(1)})^+,\qquad \widetilde{q}(i,j;k,j)=(q_{ik}^{(1)}-q_{jk}^{(2)})^+,$$
$$\widetilde{q}(i,j;k,k)=q_{ik}^{(1)}\wedge q_{jk}^{(2)},\qquad \widetilde{q}(i,j;i,i)=q_{ji}^{(2)},\qquad \widetilde{q}(i,j;j,j)=q_{ij}^{(1)}.$$

(2) 我们的想法是先尽可能大地定义$\widetilde{q}(i,j;l,l)(l \geq j+1)$, 再递推地定义$\widetilde{q}(i,j;l-1,l), \cdots, \widetilde{q}(i,j;j+1,l)$, 剩余的"负荷"定义成$\widetilde{q}(i,j;i,l)$以满足边缘条件. 令

$$I(l,l;\cdot)=q_{i\cdot}^{(1)}, \quad II(l,l;\cdot)=q_{j\cdot}^{(2)}, \qquad l \geq j+1.$$

$$I(l-1,l;\cdot)=I(l,l;\cdot)-II(l,l;\cdot), \quad II(l-1,l;\cdot)=II(l,l;\cdot+1)-I(l,l;\cdot+1).$$

$$\begin{cases} I(l-2,l;\cdot)=I(l-1,l;\cdot)^+-II(l-1,l;\cdot)^+, \\ II(l-2,l;\cdot)=II(l-1,l;\cdot+1)^+-I(l-1,l;\cdot+1)^+. \end{cases}$$

由此递推地定义一列$E \to \boldsymbol{R}$的映射:

$$\begin{cases} I(k,l;\cdot)=I(k+1,l;\cdot)^+-II(k+1,l;\cdot)^*, \\ II(k,l;\cdot)=II(k+1,l;\cdot+1)^+-I(k+1,l;\cdot+1)^+, \quad j \leq k < l. \end{cases} \tag{2.1}$$

定义

$$\begin{aligned} &\widetilde{q}(i,j;k,l)=I(k,l;k)^+ \wedge II(k,l;k)^+, \qquad j+1 \leq k \leq l, \\ &\widetilde{q}(i,j;i,l)=II(j,l;j)^+, \qquad\qquad j+1 \leq l. \end{aligned} \tag{2.2}$$

(3) 对称地定义$\widetilde{q}(i,j;k,l),(k \leq l \leq i-1)$和$\widetilde{q}(i,j;k,j),(k \leq i-1)$, 其余的都定义为零. 当然, 为了保守性, 要定义

$$\widetilde{q}(i,j;i,j)=-\sum_{(k,l)\neq(i,j)} \widetilde{q}(i,j;k,l).$$

显然, 以上构造有$\widetilde{q}(i,j;k,l)=0, k>l$, 因而满足(1.6). 现在只需验证边缘条件(1.5). 情形(1)是平凡的, (3)与(2)具对称性, 因此, 只需证明情形(2)满足(1.5). 以下是证明中用到的简单关系式, 略去证明.

$$\begin{cases} a \wedge b+(a-b)^+=a, \quad b+(a-b)^+=a \vee b, \qquad a,b \in \boldsymbol{R}; \\ b^+ + (a-(-b)^+)^+ = (a+b)^+, \qquad a,b \in \boldsymbol{R},\ a \geq 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

$$\begin{cases} I(k,l;\cdot)=I(k+1,l+1;\cdot), \\ II(k,l;\cdot)=II(k+1,l+1;\cdot), \qquad j \leq k < l,\ j+1 \leq k=l. \end{cases} \tag{2.4}$$

$$I(k,l;\cdot+1)=-II(k,l;\cdot), \qquad j \leq k < l. \tag{2.5}$$

首先, 任意$s \geq 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{m \geq 0} \widetilde{q}(i,j;m,j+s) &= \widetilde{q}(i,j;i,j+s)+\sum_{k=1}^{s} \widetilde{q}(i,j;j+k,j+s) \\ &= II(j,j+s;j)^+ + \sum_{k=1}^{s} \widetilde{q}(i,j;j+k,j+s) \\ &= II(j+1,j+s;j+1)^+ + \sum_{k=2}^{s} \widetilde{q}(i,j;j+k,j+s) \qquad (\text{由 } (2.1)\text{-}(2.3)) \\ &= \cdots = II(j+s,j+s;j+s)^+ = q_{jj+s}^{(2)}. \end{aligned}$$

其次, 任意$m \geq j+1$,

$$\sum_{n \geq 0} \widetilde{q}(i,j;m,n) = \sum_{n=m}^{\infty} \widetilde{q}(i,j;m,n) = \sum_{n=m}^{\infty} I(m,n;m)^+ \wedge II(m,n;m)^+.$$

(i)若存在$n \geq m$使得$I(m,n;m)^+ < II(m,n;m)^+$, 不妨设n是其中最小的. 那么, 由(2.1)和(2.4),

$$I(m,n+1;m)^+ = (I(m,n;m)^+ - II(m,n;m)^+)^+ = 0,$$
$$I(m,k+1;m)^+ = (I(m,k;m)^+ - II(m,k;m)^+)^+ \leq I(m,k;m)^+, \qquad k \geq n+1,$$

即有$I(m,k;m)^+ = 0, k \geq n+1$, 由此得

$$\widetilde{q}(i,j;m,k) = 0, \quad k \geq n+1; \qquad \widetilde{q}(i,j;m,n) = I(m,n;m)^+;$$
$$\widetilde{q}(i,j;m,k) = II(m,k;m)^+, \qquad m \leq k < n.$$

所以,

$$\begin{aligned}
\sum_{k \geq 0} \widetilde{q}(i,j;m,k) &= \sum_{k=m}^{n-1} II(m,k;m)^+ + I(m,n;m)^+ \\
&= \sum_{k=m}^{n-2} II(m,k;m)^+ + II(m+1,n;m)^+ + I(m,n;m)^+ \qquad (\text{由 } (2.4)) \\
&= \sum_{k=m}^{n-2} II(m,k;m)^+ + I(m+1,n;m)^+ \vee II(m+1,n;m)^+ \qquad (\text{由 } (2.1) \text{和} (2.3)) \\
&= \sum_{k=m}^{n-2} II(m,k;m)^+ + I(m,n-1;m)^+ \vee II(m,n-1;m)^+ \qquad (\text{由 } (2.4)) \\
&= \sum_{k=m}^{n-2} II(m,k;m)^+ + I(m,n-1;m)^+ \qquad (\text{由 } n \text{的取法}) \\
&= \cdots = I(m,m;m)^+ = q_{im}^{(1)}, \qquad m \geq j+1.
\end{aligned}$$

(ii)否则, 任意$n \geq m, I(m,n;m)^+ \geq II(m,n;m)^+$, 故

$$\sum_{n \geq 0} \widetilde{q}(i,j;m,n) = \sum_{n=m}^{\infty} II(m,n;m)^+, \qquad m \geq j+1. \tag{2.6}$$

记$C(k) = \sum_{n=m}^{k} II(m,n;m)^+, k \geq m$. 如果能证明

$$\sum_{l=m}^{k} q_{jl}^{(2)} - \sum_{l=m+1}^{k} q_{il}^{(1)} \leq C(k) \leq q_{im}^{(1)}, \qquad k \geq m, \tag{2.7}$$

由$P^{(1)}(t)$和$P^{(2)}(t)$随机可比知(1.7)成立, 故令$k \to \infty$得

$$q_{im}^{(1)} \leq \sum_{l=m}^{\infty} q_{jl}^{(2)} - \sum_{l=m+1}^{\infty} q_{il}^{(1)} \leq \lim_{k \to \infty} C(k) = \sum_{n=m}^{\infty} II(m,n;m)^+ \leq q_{im}^{(1)},$$

再由(2.6)得

$$\sum_{n \geq 0} \widetilde{q}(i,j;m,n) = q_{im}^{(1)}, \qquad m \geq j+1,$$

从而证明了边缘条件(1.5). 下面用归纳法补证(2.7). 注意到

$$C(m) = II(m,m;m)^+ = q_{jm}^{(2)} \le I(m,m;m)^+ = q_{im}^{(1)},$$

$$\begin{aligned} C(m+1) &= II(m,m;m)^+ + II(m,m+1;m)^+ = q_{jm}^{(2)} + (q_{jm+1}^{(2)} - q_{im+1}^{(1)})^+ \\ &\ge q_{jm}^{(2)} + q_{jm+1}^{(2)} - q_{im+1}^{(1)} = \sum_{l=m}^{m+1} q_{jl}^{(2)} - \sum_{l=m+1}^{m+1} q_{il}^{(1)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(m+1) &\le II(m,m;m)^+ + I(m,m+1;m)^+ \\ &= II(m,m;m)^+ + I(m,m;m)^+ - II(m,m;m)^+ \quad \text{(由 (2.1), (2.4)和假设)} \\ &= I(m,m;m)^+ = q_{im}^{(1)}, \end{aligned}$$

假设直至$k-1$时, (2.7)均成立, 那么,

$$\begin{aligned} C(k) &= \sum_{n=m}^{k-1} II(m,n;m)^+ + (II(m+1,k;m+1)^+ - I(m,k-1;m+1)^+)^+ \quad \text{(由 (2.1), (2.4))} \\ &= \sum_{n=m}^{k-2} II(m,n;m)^+ + II(m,k-1;m)^+ \\ &\quad + (II(m+1,k;m+1)^+ - (-II(m,k-1;m))^+)^+ \quad \text{(由 (2.5))} \\ &= \sum_{n=m}^{k-2} II(m,n;m)^+ + (II(m+1,k;m+1)^+ + II(m,k-1;m)^+)^+ \quad \text{(由 (2.3))} \\ &= \sum_{n=m}^{k-2} II(m,n;m)^+ + (II(m+1,k;m+1)^+ \\ &\quad + II(m+1,k-1;m+1)^+ - I(m+1,k-1;m+1)^+)^+ \\ &= \cdots = II(m,m;m)^+ + (\sum_{n=m+1}^{k} II(m+1,n;m+1)^+ - I(m+1,m+1;m+1)^+)^+ \\ &\ge \sum_{n=m+1}^{k} II(m+1,n;m+1)^+ - q_{im+1}^{(1)} + q_{jm}^{(2)}, \end{aligned}$$

由此递推得

$$C(k) \ge II(k,k;k)^+ - \sum_{l=m+1}^{k} q_{il}^{(1)} + \sum_{l=m}^{k-1} q_{jl}^{(2)} = \sum_{l=m}^{k} q_{jl}^{(2)} - \sum_{l=m+1}^{k} q_{il}^{(1)}.$$

另一方面,

$$\begin{aligned} C(k) &\le \sum_{n=m}^{k-1} II(m,n;m)^+ + I(m,k;m)^+ \\ &= \sum_{n=m}^{k-2} II(m,n;m)^+ + II(m,k-1;m)^+ \\ &\quad + (I(m,k-1;m)^+ - II(m,k-1;m)^+)^+ \quad \text{(由 (2.1)和(2.4))} \\ &= \sum_{n=m}^{k-2} II(m,n;m)^+ + I(m,k-1;m)^+ \vee II(m,k-1;m)^+ \quad \text{(由 (2.3))} \\ &= \sum_{n=m}^{k-2} II(m,n;m)^+ + I(m,k-1;m)^+ \quad \text{(由假设)} \\ &= \cdots = I(m,m;m)^+ = q_{im}^{(1)}. \end{aligned}$$

因此, 由归纳法得证(2.7)对任意$k \ge m$均成立. 至此完成了定理的证明.

命题1.2的证明. 条件(1.8)保证以下推导中的拆项, 合并项以及应用Fubini定理成立. 假定 $i \le j$,

$$\begin{aligned}\widetilde{\Omega}\rho(i,j) &= \sum_{m,n}\widetilde{q}(i,j;m,n)(\rho(m,n)-\rho(i,j))\\ &= \sum_m\sum_{n\ge m}\widetilde{q}(i,j;m,n)(\rho(m,n)-\rho(i,j)) + \sum_m\sum_{n<m}\widetilde{q}(i,j;m,n)(\rho(m,n)-\rho(i,j))\\ &\hat{=} I + II,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I &= \sum_m\sum_{n\ge m}\widetilde{q}(i,j;m,n)(g(n)-g(m)-g(j)+g(i))\\ &= \sum_n\sum_{m\le n}\widetilde{q}(i,j;m,n)(g(n)-g(j)) - \sum_m\sum_{n\ge m}\widetilde{q}(i,j;m,n)(g(m)-g(i))\\ &= \sum_n(q^{(2)}_{jn} - \sum_{m>n}\widetilde{q}(i,j;m,n))(g(n)-g(j)) - \sum_m(q^{(1)}_{im} - \sum_{n<m}\widetilde{q}(i,j;m,n))(g(m)-g(i))\\ &= \Omega_2 g(j) - \Omega_1 g(i) + \sum_m\sum_{n<m}\widetilde{q}(i,j;m,n)(g(m)-g(n)-g(i)+g(j)),\end{aligned}$$

所以,

$$\widetilde{\Omega}\rho(i,j) = \Omega_2 g(j) - \Omega_1 g(i) + 2\sum_m\sum_{n<m}\widetilde{q}(i,j;m,n)(g(m)-g(n)).$$

致谢: 作者衷心感谢陈木法教授的精心指导, 特别感谢他对本文提出了许多有益意见和建议.

参 考 文 献

[1] Chen, M.F., Coupling for jump processes, Acta. Math. Sinica, New series, **2:2**(1986), 123–136.
[2] Chen, M.F., On coupling of jump processes, Chin. Ann. of Math., **12B:4**(1991), 385–399.
[3] Chen, M.F., *From Markov Chains To Non-Equilibrium Particle Systems*, World Scientific, 1992.
[4] Chen, M.F., Optimal Markovian couplings and applications, Technical Report Series of the Laboratory for Research in Statistics and Probability, No.216, Carleton Univ., Univ. of Ottawa, 1993.
[5] Chen, M.F., A comment on the book "Continuous-Time Markov Chains" by W.J. Anderson, Chinese J. Appl. Prob. Stat. **12**(1996), 55–59.
[6] Kirstein, B.M., Monotonicity and comparability of time-homogeneous Markov processes with discrete state space, Math. Operationsforsch Statist, **7**(1976), 151–168.
[7] 张余辉, 耦合跳过程的保守性, 北京师范大学学报, **30:3**(1994), 305–307.

Construction of Order-Preserving Coupling for One-Dimensional Markov Chains

ZHANG YUHUI

(*Beijing Mormal University, Beijing*)

This paper is devoted to construct an order-preserving coupling for two regular stochastically comparable Markov chains with state space $E = \{0, 1, \cdots\}$ endowed with the ordinary order. Meanwhile, for a specific type of distance ρ, the ρ-optimal Markovian couplings are studied. It is proved that the order-preserving coupling constructed in the paper is indeed ρ-optimal for two stochastically comparable marginal Markov chains.