大学数学－线性代数习题解答

张余辉

October 16, 2017

1　第一章

1.1　习题1.1

1. 某纺织品公司所属 3 家服装厂为其生产衬衣、长裤和外套. 设一卷布在一厂可生产 20 件衬衣、10 条长裤和 5 件外套, 而二厂与三厂生产量分别为 4, 18, 7 和 2, 5, 16, 试用矩阵来表示该公司生产这三种服装的情况.

解: 用 a_{ij} 表示第 i 种服装在第 j 厂的生产量($i=1,2,3; j=1,2,3$), 则

$$A=\begin{bmatrix} 20 & 4 & 2 \\ 10 & 18 & 5 \\ 5 & 7 & 16 \end{bmatrix}.$$

2. 设甲省两个城市 a_1, a_2 和乙省三个城市 b_1, b_2, b_3 的交通路线如图 1 所示, 而乙省三个城市 b_1, b_2, b_3 与丙省两城市 c_1, c_2 的交通路线如图 2 所示, 其中每条线上的数字表示联结该两城市的不同道路的总数.

试用矩阵表示甲、乙两省及乙、丙两省城市间的通路信息.

解: 用 a_{ij} 表示甲省第 i 个城市与乙省第 j 个城市的通路数($i=1,2; j=1,2,3$), 用 b_{ij} 表示乙省第 i 个城市与丙省第 j 个城市的通路数($i=1,2,3; j=1,2$), 则

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

1.2 习题1.2

习题1.2(A)

1. 计算下列矩阵的乘积

1) $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 7 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; 3) $(a_1, a_2, \cdots, a_n)\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$;

4) $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$; 5) $\begin{bmatrix} a & b \\ ma & mb \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \frac{a}{b} & -\frac{a}{b} \end{bmatrix}$;

6) $(x_1, x_2, x_3)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$; 7) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

解:

1) 原式 $= \begin{bmatrix} 28+6+1 \\ 7-4+3 \\ 35+14+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \\ 6 \\ 49 \end{bmatrix}$.

2) 原式 $= \begin{bmatrix} 2+0+4+0 & 6-1-12+0 & 2+2+4+0 \\ 1+0+3+16 & 3+1-9+0 & 1-2+3+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -7 & 8 \\ 20 & -5 & 10 \end{bmatrix}$.

3) 原式 $= a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$.

4) 原式 $= \begin{bmatrix} b_1a_1 & b_1a_2 & \cdots & b_1a_n \\ b_2a_1 & b_2a_2 & \cdots & b_2a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_na_1 & b_na_2 & \cdots & b_na_n \end{bmatrix}$.

5) 原式 $= \begin{bmatrix} -a+a & a-a \\ -ma+ma & ma-ma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

6)

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\
&= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + a_{13}x_1x_3 + a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^3 \\
&= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3.
\end{aligned}$$

7) 原式 $= \begin{bmatrix} 1+0+0+0 & 0+2+0+0 & 3+4-2+0 & 1-2+3+0 \\ 0+0+0+0 & 0+1+0+0 & 0+2+0+0 & 0-1+0-3 \\ 0+0+0+0 & 0+0+0+0 & 0+0-4+0 & 0+0+6-3 \\ 0+0+0+0 & 0+0+0+0 & 0+0+0+0 & 0+0+0-9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}$.

2. 设矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix},$$

求 $3AB - 2A$ 及 $A^{\mathrm{T}}B$. 解:

$$3AB - 2A = 3\begin{bmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & 6 \\ 2 & 9 & 0 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 13 & 22 \\ -2 & -17 & 20 \\ 4 & 29 & -2 \end{bmatrix}.$$

$$A^{\mathrm{T}}B=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\-1&-2&4\\0&5&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&5&8\\0&-5&6\\2&9&0\end{bmatrix}.$$

3. 已知矩阵 $A=PQ$, 其中

$$P=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\qquad Q=(2,-1,2),$$

求 A 及 A^{100}.

解:

$$A=PQ=\begin{bmatrix}2&-1&2\\4&-2&4\\2&-1&2\end{bmatrix},\qquad QP=2-2+2=2,$$

$$A^{100}=P(QP)^{99}Q=2^{99}PQ=2^{99}\begin{bmatrix}2&-1&2\\4&-2&4\\2&-1&2\end{bmatrix}.$$

4. 已知 $A=P\Lambda Q$, 其中

$$P=\begin{bmatrix}2&3\\1&2\end{bmatrix},\qquad \Lambda=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix},\qquad Q=\begin{bmatrix}2&-3\\-1&2\end{bmatrix},$$

计算 A^8,A^9,A^{2n},A^{2n+1}(n 为正整数).

解: 由于

$$QP=\begin{bmatrix}2&-3\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=E,$$

$$\Lambda^2=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=E,$$

$$PQ=\begin{bmatrix}2&3\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-3\\-1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=E,$$

所以, $A^2=P\Lambda QP\Lambda Q=P\Lambda^2Q=PQ=E$. 进而, $A^8=(A^2)^4=E^4=E$, $A^{2n}=(A^2)^n=E^n=E$,

$$A^9=A^8A=EA=A=\begin{bmatrix}2&3\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-3\\-1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-3\\1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-3\\-1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&-12\\4&-7\end{bmatrix},$$

$A^{2n+1}=A^{2n}A=EA=A$.

习题1.2(B)

1. 设 $A=\begin{bmatrix}1&2\\1&3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&0\\1&2\end{bmatrix}$, 问下列等式是否成立:

1) $AB=BA$; 2) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$; 3) $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$.

解: 注意到

$$AB=\begin{bmatrix}1&2\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&4\\4&6\end{bmatrix},\qquad BA=\begin{bmatrix}1&0\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\3&8\end{bmatrix},$$

所以, $AB\neq BA$. 结合

$$(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2,\qquad (A+B)(A-B)=A^2+BA-AB-B^2$$

的的事实, 所以, $(A+B)^2\neq A^2+2AB+B^2, (A+B)(A-B)\neq A^2-B^2$.

2. 举反例说明下列命题是错误的:

1) 若 $A^2=O$, 则 $A=O$;　2) 若 $A^2=A$, 则 $A=O$ 或 $A=E$;　3) 若 $AX=AY$, 且 $A\neq O$, 则 $X=Y$.

解: 1) 取 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, 则 $A^2=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=O$, 而显然 $A\neq O$.

2) 取 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. 显然 $A\neq O$, 且 $A\neq E$, 但 $A^2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=A$.

3) 取 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $X=A$, $Y=E$. 显然 $X\neq Y$, 但 $AX=A^2=A=AE=AY$.

3. 设矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

求 A^n(n 为自然数).

解: 注意到

$$A=E+\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=:E+N,\qquad N^2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\qquad N^k=O,\qquad k\geq 3.$$

所以,

$$A^2=(E+N)^2=E+2N+N^2=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\qquad A^3=(E+N)^3=E+3N+3N^2=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

因此, 推测

$$A^n=\begin{bmatrix} 1 & n & \frac{(n-1)n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=E+nN+\frac{(n-1)n}{2}N^2.$$

下面用数学归纳法来证明上述结论. 显然, $n=1$ 时结论成立. 假定直至 $n=k$ 时结论成立, 往证 $n=k+1$ 时结论依然成立. 由于

$$\begin{aligned} A^{k+1}=A^kA&=\Big(E+kN+\frac{(k-1)k}{2}N^2\Big)(E+N)=E+kN+\frac{(k-1)k}{2}N^2+N+kN^2+\frac{(k-1)k}{2}N^3 \\ &=E+(k+1)N+\Big(\frac{(k-1)k}{2}+k\Big)N^2=E+(k+1)N+\frac{k(k+1)}{2}N^2, \end{aligned}$$

所以结论在 $n=k+1$ 时成立. 由数学归纳法得证.

4. 设矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

求 A^n(n 为自然数).

解: 注意到

$$A^2=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}=2^2E,$$

$A^3=A^2A=2^2EA=2^2A$, $A^4=A^3A=2^2A^2=2^22^2E=2^4E$, 因此, 推测

$$A^n=\begin{cases}2^nE, & \text{当 } n \text{ 为偶数;}\\ 2^{n-1}A, & \text{当 } n \text{ 为奇数.}\end{cases}$$

显然 $n=1$ 时结论成立. 假定直至 $n=k$ 时结论成立, 往证 $n=k+1$ 时结论依然成立. 由于

$$A^{k+1}=A^kA=\begin{cases}2^kEA, & \text{当 } k \text{ 为偶数;}\\ 2^{k-1}A^2, & \text{当 } k \text{ 为奇数}\end{cases}=\begin{cases}2^kA, & \text{当 } k \text{ 为偶数;}\\ 2^{k+1}E, & \text{当 } k \text{ 为奇数}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2^{k+1}E, & \text{当 } k+1 \text{ 为偶数;}\\ 2^{k+1-1}A, & \text{当 } k+1 \text{ 为奇数,}\end{cases}$$

所以结论在 $n=k+1$ 时成立. 由数学归纳法得证结论.

1.3 习题1.3

习题1.3(A)

1. 用分块矩阵的乘法计算下列矩阵的乘积:

1) $A=\begin{bmatrix}1&3&0&0&0\\2&8&0&0&0\\0&0&1&0&1\\0&0&2&3&2\\0&0&3&1&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&3&0&0&0\\2&8&0&0&0\\1&0&1&0&1\\0&1&2&3&2\\2&3&3&1&1\end{bmatrix}$;

2) $A=\begin{bmatrix}1&0&1&0&0\\0&2&-1&0&0\\3&1&0&0&0\\0&0&0&-2&0\\0&0&0&0&-2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&0&1&0&0\\0&2&0&0&0\\0&0&3&0&0\\0&0&0&-1&3\\0&0&0&4&2\end{bmatrix}$.

解: 1) 分块为 $A=\begin{bmatrix}A_{11}&O\\O&A_{22}\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}B_{11}&O\\B_{21}&B_{22}\end{bmatrix}$, 则 $AB=\begin{bmatrix}A_{11}B_{11}&O\\A_{22}B_{21}&A_{22}B_{22}\end{bmatrix}$. 经计算

$$A_{11}B_{11}=\begin{bmatrix}1&3\\2&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3\\2&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&27\\18&70\end{bmatrix},$$

$$A_{22}B_{21}=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&3&2\\3&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&3\\6&9\\5&4\end{bmatrix},$$

$$A_{22}B_{22}=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&3&2\\3&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\2&3&2\\3&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&1&2\\14&11&10\\8&4&6\end{bmatrix},$$

所以,

$$AB=\begin{bmatrix}7&27&0&0&0\\18&70&0&0&0\\3&3&4&1&2\\6&9&14&11&10\\5&4&8&4&6\end{bmatrix}.$$

2) 分块为 $A=\begin{bmatrix}A_{11}&O\\O&A_{22}\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}B_{11}&O\\O&B_{22}\end{bmatrix}$, 则 $AB=\begin{bmatrix}A_{11}B_{11}&O\\O&A_{22}B_{22}\end{bmatrix}$. 经计算

$$A_{11}B_{11}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&-1\\3&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&4\\0&4&-3\\3&2&3\end{bmatrix},$$

$$A_{22}B_{22}=\begin{bmatrix}-2&0\\0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&3\\4&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-6\\-8&-4\end{bmatrix},$$

所以,

$$AB=\begin{bmatrix}1&0&4&0&0\\0&4&-3&0&0\\3&2&3&0&0\\0&0&0&2&-6\\0&0&0&-8&-4\end{bmatrix}.$$

2. 设矩阵

$$A=\begin{bmatrix}3&4&0&0\\4&-3&0&0\\0&0&2&0\\0&0&2&2\end{bmatrix},$$

求 A^4.

解: 分块为 $A=\begin{bmatrix}A_{11}&O\\O&A_{22}\end{bmatrix}$, 则 $A^4=\begin{bmatrix}A_{11}^4&O\\O&A_{22}^4\end{bmatrix}$. 经计算

$$A_{11}^2=\begin{bmatrix}3&4\\4&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&4\\4&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5^2&0\\0&5^2\end{bmatrix},\quad A_{11}^4=\begin{bmatrix}5^4&0\\0&5^4\end{bmatrix},$$

$$A_{22}^2=\begin{bmatrix}2&0\\2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\2&2\end{bmatrix}=2^2\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix},\quad A_{22}^4=2^4\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}=2^4\begin{bmatrix}1&0\\2^2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2^4&0\\2^6&2^4\end{bmatrix},$$

所以,

$$AB=\begin{bmatrix}5^4&0&0&0\\0&5^4&0&0\\0&0&2^4&0\\0&0&2^6&2^4\end{bmatrix}.$$

3. 设矩阵

$$A=\begin{bmatrix}6&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&2\\0&0&0&0&2&3\\0&1&0&0&0&0\\0&1&1&0&0&0\\0&1&1&1&0&0\end{bmatrix},$$

求 A^2.

解: 分块为 $A=\begin{bmatrix}A_{11}&O&O&O\\O&O&O&A_{24}\\O&A_{32}&O&O\\O&A_{42}&A_{43}&O\end{bmatrix}$, 则

$$A^2=\begin{bmatrix}A_{11}^2&O&O&O\\O&A_{24}A_{42}&A_{24}A_{43}&O\\O&O&O&A_{32}A_{24}\\O&A_{43}A_{32}&O&A_{42}A_{24}\end{bmatrix}.$$

经计算

$$A_{11}^2=36,\qquad A_{24}A_{42}=\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&3\\5&5\end{bmatrix},\qquad A_{24}A_{43}=\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix},$$

$$A_{32}A_{24}=(1,0)\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}=(1,2),\qquad A_{43}A_{32}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(1,0)=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},$$

$$A_{42}A_{24}=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&5\\3&5\end{bmatrix},$$

所以,

$$A^2 = \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

习题1.3(B)

1. 设 A 为 n 阶矩阵, $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 为 A 的列子快, 试用 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 表示 $A^{\mathrm{T}}A$.

解:

$$A^{\mathrm{T}}A = \begin{bmatrix} \beta_1^{\mathrm{T}} \\ \beta_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \beta_n^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = \begin{bmatrix} \beta_1^{\mathrm{T}}\beta_1 & \beta_1^{\mathrm{T}}\beta_2 & \cdots & \beta_1^{\mathrm{T}}\beta_n \\ \beta_2^{\mathrm{T}}\beta_1 & \beta_2^{\mathrm{T}}\beta_2 & \cdots & \beta_2^{\mathrm{T}}\beta_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_n^{\mathrm{T}}\beta_1 & \beta_n^{\mathrm{T}}\beta_2 & \cdots & \beta_n^{\mathrm{T}}\beta_n \end{bmatrix}.$$

2. 设 A 为 n 阶矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为 A 的行子快, 试用 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 表示 $AA^{\mathrm{T}} = E$ 成立的条件.

解:

$$AA^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} (\alpha_1^{\mathrm{T}}, \alpha_2^{\mathrm{T}}, \cdots, \alpha_n^{\mathrm{T}}) = \begin{bmatrix} \alpha_1\alpha_1^{\mathrm{T}} & \alpha_1\alpha_2^{\mathrm{T}} & \cdots & \alpha_1\alpha_n^{\mathrm{T}} \\ \alpha_2\alpha_1^{\mathrm{T}} & \alpha_2\alpha_2^{\mathrm{T}} & \cdots & \alpha_2\alpha_n^{\mathrm{T}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n\alpha_1^{\mathrm{T}} & \alpha_n\alpha_2^{\mathrm{T}} & \cdots & \alpha_n\alpha_n^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}.$$

所以, $AA^{\mathrm{T}} = E$ 当且仅当

$$\alpha_i\alpha_j^{\mathrm{T}} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \qquad i, j = 1, 2, \cdots, n.$$

1.4 习题1.4

习题1.4(A)

1. 设 A, B 均为 n 阶上三角形矩阵, 试证 AB 亦为 n 阶上三角形矩阵.

证明: 记 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = AB = (c_{ij})$. 显然, C 为 n 阶矩阵. 由于 A, B 均为 n 阶上三角形矩阵, 即 $a_{ij} = 0, b_{ij} = 0 (i > j)$. 当 $i > j$ 时,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=i}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} 0 \cdot b_{kj} + \sum_{k=i}^{n} a_{ik} \cdot 0 = 0,$$

所以, C 亦为 n 阶上三角形矩阵.

2. 设 A 为任意矩阵, 试证 AA^{T} 与 $A^{\mathrm{T}}A$ 均为 对称矩阵.

证明: 由于 $(AA^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = AA^{\mathrm{T}}$, $(A^{\mathrm{T}}A)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}A$, 所以, AA^{T} 与 $A^{\mathrm{T}}A$ 均为 对称矩阵.

3. 设 A 为反称矩阵, B 为对称矩阵, 试证:

1) A^2 是对称矩阵; 2) $AB - BA$ 是对称矩阵; 3) AB 是反称矩阵的充分必要条件是 $AB = BA$.

证明: 1) $(A^2)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = (-A)(-A) = A^2$, 所以 A^2 为 对称矩阵.

2) $(AB-BA)^{\mathrm{T}} = (AB)^{\mathrm{T}} - (BA)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} - A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} = B(-A) - (-A)B = AB - BA$, 所以, $AB - BA$ 是对称矩阵.

3) 必要性. 设 AB 是反称矩阵, 则 $(AB)^{\mathrm{T}} = -AB$, 因此, $AB = -(AB)^{\mathrm{T}} = -B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = -B(-A) = BA$.

充分性. 设 $AB = BA$, 则 $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = B(-A) = -BA = -AB$, 因此, AB 是反称矩阵.

4. 若 A 为反称矩阵, 则 A^{T} 亦为反称矩阵.

证明: 由于 $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A = -A^{\mathrm{T}}$, 所以, A^{T} 亦为反称矩阵.

习题1.4(B)

1. 设 A, B 为 n 阶对称矩阵, 则 AB 是对称矩阵的充分必要条件是 $AB = BA$.

证明: 必要性. 设 AB 是对称矩阵, 则 $AB = (AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = BA$.

充分性. 设 $AB = BA$, 则 $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = BA = AB$, 因此, AB 是对称矩阵.

2. 设 A, B 为 n 阶反称矩阵, 则 AB 是对称矩阵的充分必要条件是 $AB = BA$.

证明: 必要性. 设 AB 是对称矩阵, 则 $AB = (AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = (-B)(-A) = BA$.

充分性. 设 $AB = BA$, 则 $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = (-B)(-A) = BA = AB$, 因此, AB 是对称矩阵.

3. 设 A, B 为 n 阶反称矩阵, 则 AB 是反称矩阵的充分必要条件是 $AB = -BA$.

证明: 必要性. 设 AB 是反称矩阵, 则 $AB = -(AB)^{\mathrm{T}} = -B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = -(-B)(-A) = -BA$.

充分性. 设 $AB = -BA$, 则 $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = (-B)(-A) = BA = -AB$, 因此, AB 是反称矩阵.

4. 设 A 为 实对称矩阵. 若 $A^2 = O$, 则 $A = O$.

证明: 由于 $A^2 = O$, 则 A^2 其主对角线元素均为零, 即 $0 = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{ki} (i = 1, 2, \cdots, n)$. 注意到 A 为 实对称矩阵, 所以, $0 = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2$, 进而, $a_{ik} = 0 (k = 1, 2, \cdots, n)$. 由 i 的任意性, 有 $a_{ik} = 0 (i, k = 1, 2, \cdots, n)$, 即 $A = O$.

1.5 习题1.5

习题1.5(A)

1. 把下列矩阵化为行最简形矩阵:

1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & -7 & -1 \end{bmatrix}$;

3) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$; 4) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ -1 & 5 & -7 & -6 & 7 \\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

解: 1)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[]{\substack{-2r_1+r_2 \\ -3r_1+r_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[]{\substack{-2r_2+r_3 \\ 2r_2+r_1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2)

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & -7 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[]{\substack{-r_2+r_3 \\ -r_1+r_2}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[]{\substack{-2r_2+r_1 \\ -2r_2+r_3}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[]{\substack{-r_2+r_1 \\ -2r_2+r_3}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-r_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-3r_1+r_4]{\substack{-r_1+r_2 \\ -2r_1+r_3}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & -5 & 10 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow[-5r_2+r_4]{\substack{3r_2+r_1 \\ -3r_2+r_3}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3 \leftrightarrow r_4]{\substack{r_4+r_2 \\ -\frac{1}{2}r_2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[]{\substack{3r_3+r_1 \\ -r_2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4)

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ -1 & 5 & -7 & -6 & 7 \\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[3r_3+r_4]{\substack{2r_3+r_1 \\ r_3+r_2}} \begin{bmatrix} 0 & 7 & -7 & -8 & 17 \\ 0 & 7 & -7 & -8 & 3 \\ -1 & 5 & -7 & -6 & 7 \\ 0 & 13 & -13 & -15 & 21 \end{bmatrix} \xrightarrow[-2r_1+r_4]{\substack{-r_1+r_2 \\ -r_3}} \begin{bmatrix} 0 & 7 & -7 & -8 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -14 \\ 1 & -5 & 7 & 6 & -7 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -13 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-r_4+r_2]{\substack{r_1 \leftrightarrow r_3 \\ r_2 \leftrightarrow r_4}} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 & 6 & -7 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & -7 & -8 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -14 \end{bmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{14}r_4]{\substack{-5r_2+r_1 \\ 7r_2+r_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -12 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-24r_4+r_3]{\substack{12r_4+r_1 \\ -r_4+r_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[]{\substack{r_3+r_1 \\ r_3+r_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[]{\substack{-r_2 \\ -r_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. 设

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32}+3a_{33} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22}+3a_{23} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12}+3a_{13} & a_{13} \end{bmatrix}, \quad P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

则 $B = (\quad)$.

(A) P_1P_2A; (B) AP_2P_1; (C) P_1AP_2; (D) P_2AP_1.

解: B 是 A 经过这样的变换得到: 将第 1,3 两行对换, 再将第 3 列的 3 倍加到第 2 列, 因此, $B = P_1AP_2$, 正确答案为(C).

3. $$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{10} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{11} = (\quad).$$

(A) $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$; (B) $\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}$; (C) $\begin{bmatrix} a_3 & a_2 & a_1 \\ b_3 & b_2 & b_1 \\ c_3 & c_2 & c_1 \end{bmatrix}$; (D) $\begin{bmatrix} a_3 & a_1 & a_2 \\ b_3 & b_1 & b_2 \\ c_3 & c_1 & c_2 \end{bmatrix}$.

解: 左乘的初等矩阵是将原矩阵第 1,3 行互换, 乘 10 次等价于没换; 右乘的初等矩阵是将原矩阵第 1,3 列互换, 乘 11 次等价于乘 1 次, 因此, 正确答案为(C).

习题1.5(B)

1. 计算

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{11} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{11}.$$

解:

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{10} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{11} = \cdots = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 9 & 9 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{11} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 9 & 18 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{10} = \cdots = \begin{bmatrix} -1 & -12 & -1 \\ 1 & 12 & 1 \\ 9 & 108 & 9 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2 第二章

2.1 习题2.1

习题2.1(A)

1. 利用对角线法则计算下列三阶行列式:

1) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$.

解: 1) 原式 $= -24+0+8-4-(-16) = -4$. 2) 原式 $= acb+bac+cab-c^3-b^3-a^3 = 3abc-a^3-b^3-c^3$.

3)
$$\begin{aligned} \text{原式 } &= bc^2+ca^2+ab^2-a^2b-ac^2-cb^2 = (b-a)c^2+c(a^2-b^2)+ab(b-a) \\ &= (a-b)(c(a+b)-c^2-ab) = (a-b)(b-c)(c-a). \end{aligned}$$

4)
$$\begin{aligned} \text{原式 } &= xy(x+y)+xy(x+y)+xy(x+y)-(x+y)^3-y^3-x^3 \\ &= 3x^2y+3xy^2-(x+y)^3-y^3-x^3 = -2(x^3+y^3). \end{aligned}$$

2. 按自然数从小到大为标准次序, 求下列各排列的逆序数:

1) 1234; 2) 4132; 3) 3421; 4) 2413; 5) $13\cdots(2n-1)24\cdots(2n)$;

6) $13\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots 2$.

解: 1) $\tau(1234) = 0$. 2) $\tau(4132) = 3+1 = 4$. 3) $\tau(3421) = 2+2+1 = 5$. 4) $\tau(2413) = 1+2 = 3$;

5) $\tau(13\cdots(2n-1)24\cdots(2n)) = 0+1+2+\cdots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$.

6) $\tau(13\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots 2) = 0+1+2\cdots+(n-1)+(n-1)+\cdots+1 = n(n-1)$.

3. 求出 i 与 j, 使 $817i25j49$ 成为奇排列.

解: 由于 $\tau(817325649) = 7+0+5+1+0+1+1+0 = 15$, 所以 817325649 是奇排列, 故 $i=3, j=6$.

4. 写出四阶行列式中含有 $a_{11}a_{23}$ 的均布项.

解: 四阶行列式中含有 $a_{11}a_{23}$ 的均布项有 $a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}, a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$.

5. 在五阶行列式中, 下列各项均布项应取什么符号? 1) $a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}a_{55}$; 2) $a_{31}a_{42}a_{13}a_{24}a_{55}$.

解: 1) 行排列是标准排列, 列排列的逆序数 $\tau(34215) = 2+2+1+0 = 5$, 取负号.

2) 列排列是标准排列, 行排列的逆序数 $\tau(34125) = 2+2+0+0 = 4$, 取正号.

习题2.1(B)

1. 设排列 $a_1a_2\cdots a_n$ 的逆序数为 m, 且 $a_2a_3\cdots a_n$中小于 a_1 的有 s 个, 求排列 $a_1a_na_{n-1}\cdots a_2$ 的逆序数.

解: 直观上, 若 $\tau(b_1b_2\cdots b_n) = k$, 则 $\tau(b_nb_{n-1}\cdots b_1) = (n-1)+(n-2)+\cdots+1-k = \frac{n(n-1)}{2}-k$, 因为有 k 对序顺过来了. 下面我们证明这个结果.

记排列 $b_1b_2\cdots b_n$ 中 b_n 左边比 b_n 大的元素个数为 k_1, b_{n-1} 左边比 b_{n-1} 大的元素个数为 k_2, $\cdots$, b_2 左边比 b_2 大的元素个数为 k_{n-1}. 则 $\tau(b_1b_2\cdots b_n)=k_1+k_2+\cdots+k_{n-1}$.

记排列 $b_nb_{n-1}\cdots b_1$ 中 b_n 右边比 b_n 小的元素个数为 k_1', b_{n-1} 右边比 b_{n-1} 小的元素个数为 k_2', $\cdots$, b_2 右边比 b_2 小的元素个数为 k_{n-1}'. 则 $\tau(b_nb_{n-1}\cdots b_1)=k_1'+k_2'+\cdots+k_{n-1}'$.

注意到 $k_1+k_1'=n-1, k_2+k_2'=n-2,\cdots,k_{n-1}+k_{n-1}'=1$, 所以, $\tau(b_1b_2\cdots b_n)+\tau(b_nb_{n-1}\cdots b_1)=(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\frac{n(n-1)}{2}$. 得证前述结论.

应用该结论. 由于 $a_2a_3\cdots a_n$ 的逆序数为 $m-s$, 所以 $a_na_{n-1}\cdots a_2$ 的逆序数是 $\frac{(n-1)(n-2)}{2}-(m-s)$, 因此, $\tau(a_1a_na_{n-1}\cdots a_2)=s+\frac{(n-1)(n-2)}{2}-(m-s)=\frac{(n-1)(n-2)}{2}-m+2s$.

2. 用行列式的定义证明

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25}\\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0\\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0\\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

证明: 由于当 $i\geq 3, j\geq 3$ 时, $a_{ij}=0$, 而均布项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$ 中 j_3,j_4,j_5 三个数中必有一个大于等于 3(否则, 三个数都小于 3, 矛盾), 因此, 均布项都为零, $D=0$.

3. 计算由行列式定义的多项式

$$f(x)=\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2\\ 1 & x & 1 & 1\\ 3 & 2 & x & 1\\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

中 x^4 与 x^3 的系数, 并求 $f(x)$ 的常数项.

解: 含 x^4 的项只有 $(-1)^{\tau(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=2x^4$, 所以 x^4 的系数为 2.

含 x^3 的项只有 $(-1)^{\tau(2134)}a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}=-x^3$, 所以 x^3 的系数为 -1.

常数项则为

$$(-1)^{\tau(3142)}a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}+(-1)^{\tau(3421)}a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}+(-1)^{\tau(3412)}a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}+(-1)^{\tau(4123)}a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$$
$$+(-1)^{\tau(4321)}a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}+(-1)^{\tau(4312)}a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}=-1-2+3-4+4-6=6.$$

2.2 习题2.2

习题2.2(A)

1. 计算下列各行列式的值:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 5 & 0\\ 0 & 1 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} -ab & ac & ae\\ bd & -cd & de\\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2002 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2003 \end{vmatrix}$.

解: 1)

$$\text{原式} \overset{-r_1+r_2}{\underset{-r_1+r_4}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{-r_2+r_3}{=\!=\!=} 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_3 \leftrightarrow r_4}{=\!=\!=} -3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -21.$$

2)

$$\text{原式} \overset{\substack{-r_1+r_2 \\ -r_1+r_3}}{\underset{-r_1+r_4}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -8.$$

3)

$$\text{原式} = adf \begin{vmatrix} -b & c & e \\ b & -c & e \\ b & c & -e \end{vmatrix} = abcdef \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \overset{r_1+r_2}{\underset{r_1+r_3}{=\!=\!=}} abcdef \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_2 \leftrightarrow r_3}{=\!=\!=} -abcdef \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4abcdef.$$

4)

$$\text{原式} \overset{\substack{r_1 \leftrightarrow r_{2002} \\ r_2 \leftrightarrow r_{2001}}}{\underset{\substack{\cdots \\ r_{1001} \leftrightarrow r_{1002}}}{=\!=\!=}} (-1)^{1001} \begin{vmatrix} 2002 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2001 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2003 \end{vmatrix} = -2003!.$$

2. 证明:

1) $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$; 2) $\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} = (a^3+b^3) \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0.$

证明: 1)

$$\text{左边} \overset{r_1 \leftrightarrow r_3}{=\!=\!=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2a & a+b & 2b \\ a^2 & ab & b^2 \end{vmatrix} \overset{-a^2r_1+r_3}{\underset{-2ar_1+r_2}{=\!=\!=}} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & 2(b-a) \\ 0 & a(b-a) & (b+a)(b-a) \end{vmatrix} = -(b-a)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & a & b+a \end{vmatrix}$$

$$\overset{-ar_2+r_3}{=\!=\!=} -(b-a)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & b-a \end{vmatrix} = -(b-a)^3 = (a-b)^3 = \text{右边}.$$

2)

$$\text{左边}=\begin{vmatrix} ax & ay & az \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} by & bz & bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}$$

$$=a\begin{vmatrix} x & y & z \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}+b\begin{vmatrix} y & z & x \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}:=aI+bII$$

而

$$I=\begin{vmatrix} x & y & z \\ ay & az & ax \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & y & z \\ bz & bx & by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}$$

$$=a\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}+b\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}$$

$$=a\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ az & ax & ay \end{vmatrix}+a\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ bx & by & bz \end{vmatrix}+b\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ az & ax & ay \end{vmatrix}+b\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ bx & by & bz \end{vmatrix}$$

$$=a^2\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}+a\cdot 0+b\cdot 0+b\cdot 0=a^2\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix},$$

$$II=\begin{vmatrix} y & z & x \\ ay & az & ax \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} y & z & x \\ bz & bx & by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}$$

$$=0+b\begin{vmatrix} y & z & x \\ z & x & y \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}=b\begin{vmatrix} y & z & x \\ z & x & y \\ az & ax & ay \end{vmatrix}+b\begin{vmatrix} y & z & x \\ z & x & y \\ bx & by & bz \end{vmatrix}$$

$$=b\cdot 0+b^2\begin{vmatrix} y & z & x \\ z & x & y \\ x & y & z \end{vmatrix}=b^2\begin{vmatrix} y & z & x \\ z & x & y \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

因此,

$$\text{左边}=a^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}+b^3\begin{vmatrix} y & z & x \\ z & x & y \\ x & y & z \end{vmatrix}=a^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}+b^3(-1)^2\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}=\text{右边}.$$

3)

$$\text{左边}\xlongequal[-c_1+c_2]{\substack{-c_3+c_4\\-c_2+c_3}}\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2a+3 & 2a+5 \\ b^2 & 2b+1 & 2b+3 & 2b+5 \\ c^2 & 2c+1 & 2c+3 & 2c+5 \\ d^2 & 2d+1 & 2d+3 & 2d+5 \end{vmatrix}\xlongequal[-c_2+c_3]{-c_3+c_4}\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 2 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 2 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 2 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=0=\text{右边}.$$

3. 设 n 阶方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, 把 A 上下翻转, 或逆时针旋转 $90°$, 或依次对角线翻转, 依次得

$$A_1=\begin{bmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix},\quad A_2=\begin{bmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{n1} \end{bmatrix},\quad A_3=\begin{bmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{11} \end{bmatrix},$$

试证: 1) $|A_1|=|A_2|=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}|A|$; 2) $|A_3|=|A|$.

证明: 1)

$$|A_1| \xlongequal{r_1\leftrightarrow r_n} (-1)\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{r_2\leftrightarrow r_{n-1}} (-1)^2\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = \begin{cases} (-1)^k|A|, & 当\ n = 2k; \\ (-1)^{k-1}|A|, & 当\ n = 2k-1. \end{cases}$$

而当 $n = 2k$ 时, $(-1)^k = ((-1)^k)^{2k-1} = (-1)^{k(2k-1)} = (-1)^{\frac{2k(2k-1)}{2}} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$; 当 $n = 2k-1$ 时, $(-1)^{k-1} = ((-1)^{k-1})^{2k-1} = (-1)^{(k-1)(2k-1)} = (-1)^{\frac{(2k-1)(2k-2)}{2}} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$. 所以, $|A_1| = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}|A|$.

由前面的证明知,

$$|A_2| = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}|A|.$$

2) 由1)中关于上下翻转证结论的证明, 类似可以得到关于左右翻转的结论, 因此,

$$|A_3| = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}|A_2| = (-1)^{n(n-1)}|A| = |A|.$$

习题2.2(B)

1. 计算下列各方阵的行列式:

1) $\begin{bmatrix} 1 & \frac12 & \frac12 & \frac12 \\ \frac12 & 1 & \frac12 & \frac12 \\ \frac12 & \frac12 & 1 & \frac12 \\ \frac12 & \frac12 & \frac12 & 1 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 1 \\ 201 & 202 & 99 & 98 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$;

3) $A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{bmatrix}$ (提示: 考虑 $|AA^{\mathrm{T}}|$).

解: 1)

$$原式 = \frac{1}{16}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4+r_1]{\substack{r_2+r_1 \\ r_3+r_1}} \frac{1}{16}\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{5}{16}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[-r_1+r_4]{\substack{-r_1+r_2 \\ -r_1+r_3}} \frac{5}{16}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{5}{16}.$$

2)

$$\text{原式} \xlongequal{-r_4+r_3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 1 \\ 200 & 200 & 100 & 100 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 100 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} \xlongequal[-r_1+r_4]{\substack{-r_3+r_2 \\ -r_4+r_3}} 100 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+r_3} 100 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_3} 100(-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal{-r_1+r_3} 100 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{-r_2+r_3} 100 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal{-r_4+r_3} 100 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal{-2r_3+r_4} 100 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 1400.$$

3) 注意到

$$AA^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix} = (a^2+b^2+c^2+d^2)E.$$

因此, $|A|^2 = |A||A^{\mathrm{T}}| = |AA^{\mathrm{T}}| = |(a^2+b^2+c^2+d^2)E| = (a^2+b^2+c^2+d^2)^4$, 则 $|A| = \pm(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$. 这时 a, b, c, d 是任意的, 为判定正负号, 特别地取 $b = c = d = 0$, 则 $A = aE$, $|A| = a^4 \geq 0$, 所以, 应该取正号, 即 $|A| = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$.

2. 计算下列各 n 阶方阵的行列式:

1) $\begin{bmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{bmatrix}$.

解: 1)

$$\text{原式} \xlongequal[r_n+r_1]{\substack{r_2+r_1 \\ r_3+r_1 \\ \cdots}} \begin{vmatrix} x+(n-1)a & x+(n-1)a & \cdots & x+(n-1)a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & a \end{vmatrix} = (x+(n-1)a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[-ar_1+r_n]{\substack{-ar_1+r_2 \\ -ar_1+r_3 \\ \cdots}} (x+(n-1)a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix} = (x+(n-1)a)(x-a)^{n-1}.$$

2) 当 $n=1$ 时, 原式 $= a_1+b_1$. 当 $n=2$ 时,

$$\text{原式} = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix} \xlongequal{-r_2+r_1} \begin{vmatrix} a_1-a_2 & a_1-a_2 \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = (a_1-a_2) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix}$$

$$= (a_1-a_2)(b_2-b_1).$$

当 $n \geq 3$ 时,

$$\text{原式} \xlongequal[-r_3+r_2]{-r_2+r_1} \begin{vmatrix} a_1-a_2 & a_1-a_2 & \cdots & a_1-a_2 \\ a_2-a_3 & a_2-a_3 & \cdots & a_2-a_3 \\ a_3+b_1 & a_3+b_2 & \cdots & a_3+b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix} = (a_1-a_2)(a_2-a_3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_3+b_1 & a_3+b_2 & \cdots & a_3+b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

$$= 0.$$

3. 试证: 奇数阶反称矩阵的行列式的值必为零.

证明: 设 A 为 $2n-1$ 阶反称矩阵, 则 $A^{\mathrm{T}}=-A$, 进而, $|A|=|A^{\mathrm{T}}|=|-A|=(-1)^{2n-1}|A|=-|A|$, 所以, $|A|=0$.

4. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, 且 $|A|=2$, 求当 $b\neq 0$ 时, 方阵 $A_1=(a_{ij}b^{i-j})_{n\times n}$ 的行列式的值.

解: 方法一. 先每行取公因子, 再每列取公因子, 得到

$$|A_1|=b^1b^2\cdots b^nb^{-1}b^{-2}\cdots b^{-n}|A|=|A|=2.$$

方法二. 记 $B=\mathrm{diag}(b,b^2,\cdots,b^n), C=\mathrm{diag}(b^{-1},b^{-2},\cdots,b^{-n})$, 即 B 的 (i,j) 元为 $b_{ij}=b^i\delta_{ij}$, C 的 (i,j) 元为 $c_{ij}=b^{-j}\delta_{ij}$. 令 $H=BAC$. 则 H 的 (i,j) 元为

$$h_{ij}=\sum_{k=1}^n\sum_{\ell=1}^n b_{ik}a_{k\ell}c_{\ell j}=\sum_{k=1}^n b_{ik}\sum_{\ell=1}^n a_{k\ell}b^{-j}\delta_{\ell j}=\sum_{k=1}^n b_{ik}a_{kj}b^{-j}=\sum_{k=1}^n b^i\delta_{ik}a_{kj}b^{-j}=b^ia_{ij}b^{-j}=a_{ij}b^{i-j},$$

所以, $H=A_1$. 因此, $|A_1|=|H|=|B||A||C|=b^1b^2\cdots b^n|A|b^{-1}b^{-2}\cdots b^{-n}=|A|=2$.

5. 设 $abcd=1$, 计算

$$D=\begin{vmatrix} a^2+\frac{1}{a^2} & a & \frac{1}{a} & 1\\ b^2+\frac{1}{b^2} & b & \frac{1}{b} & 1\\ c^2+\frac{1}{c^2} & c & \frac{1}{c} & 1\\ d^2+\frac{1}{d^2} & d & \frac{1}{d} & 1\end{vmatrix}.$$

解:

$$\begin{aligned} D&=\frac{1}{a^2b^2c^2d^2}\begin{vmatrix} a^4+1 & a^3 & a & a^2\\ b^4+1 & b^3 & b & b^2\\ c^4+1 & c^3 & c & c^2\\ d^4+1 & d^3 & d & d^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a^4 & a^3 & a & a^2\\ b^4 & b^3 & b & b^2\\ c^4 & c^3 & c & c^2\\ d^4 & d^3 & d & d^2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & a^3 & a & a^2\\ 1 & b^3 & b & b^2\\ 1 & c^3 & c & c^2\\ 1 & d^3 & d & d^2\end{vmatrix}\\ &=abcd\begin{vmatrix} a^3 & a^2 & 1 & a\\ b^3 & b^2 & 1 & b\\ c^3 & c^2 & 1 & c\\ d^3 & d^2 & 1 & d\end{vmatrix}+(-1)^3\begin{vmatrix} a^3 & a & a^2 & 1\\ b^3 & b & b^2 & 1\\ c^3 & c & c^2 & 1\\ d^3 & d & d^2 & 1\end{vmatrix}\\ &=-\begin{vmatrix} a^3 & a^2 & a & 1\\ b^3 & b^2 & b & 1\\ c^3 & c^2 & c & 1\\ d^3 & d^2 & d & 1\end{vmatrix}+(-1)^4\begin{vmatrix} a^3 & a^2 & a & 1\\ b^3 & b^2 & b & 1\\ c^3 & c^2 & c & 1\\ d^3 & d^2 & d & 1\end{vmatrix}=0.\end{aligned}$$

2.3 习题2.3

习题2.3(A)

1. 计算下面 4 阶方阵的行列式的值:

1) $\begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0\\ -1 & b & 1 & 0\\ 0 & -1 & c & 1\\ 0 & 0 & -1 & d\end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ a & b & c & d\\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2\\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4\end{bmatrix}$.

解: 1)

$$\text{原式} \xlongequal{ar_2+r_1} \begin{vmatrix} 0 & 1+ab & a & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1+ab & a & 0 \\ -1 & c & 1 \\ 0 & -1 & d \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{dc_2+c_3} \begin{vmatrix} 1+ab & a & ad \\ -1 & c & 1+cd \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1+ab & ad \\ -1 & 1+cd \end{vmatrix}$$

$$= (1+ab)(1+cd) - (-ad) = abcd + ab + cd + ad + 1.$$

2) 方法一. 由 Vandermonde 行列式得出

$$\text{原式} = a^4(-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix} + b^4(-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & c & d \\ a^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix} + c^4(-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & d \\ a^2 & b^2 & d^2 \end{vmatrix}$$

$$+ d^4(-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= -a^4(c-b)(d-b)(d-c) + b^4(c-a)(d-a)(d-c)$$

$$- c^4(b-a)(d-a)(d-b) + d^4(b-a)(c-a)(c-b),$$

进而,

$$\text{原式} = (b^4-a^4)(c-b)(d-b)(d-c) + b^4(c-a)(d-a)(d-c) - b^4(c-b)(d-b)(d-c)$$

$$+ (d^4-c^4)(b-a)(d-a)(d-b) + d^4(b-a)(c-a)(c-b) - d^4(b-a)(d-a)(d-b)$$

$$= (b-a)(d-c)(d-b)[(b^2+a^2)(b+a)(c-b) + (d^2+c^2)(d+c)(d-a)]$$

$$+ b^4(d-c)[(c-a)(d-a) - (c-b)(d-b)] + d^4(b-a)[(c-a)(c-b) - (d-a)(d-b)]$$

$$= (b-a)(d-c)(d-b)[(b^2+a^2)(b+a)(c-b) + (d^2+c^2)(d+c)(d-a)]$$

$$+ b^4(d-c)(b-a)(c+d-a-b) + d^4(b-a)(d-c)(a+b-c-d)$$

$$= (b-a)(d-c)(d-b)[(b^2+a^2)(b+a)(c-b) + (d^2+c^2)(d+c)(d-a)$$

$$+ (d^2+b^2)(d+b)(a+b-c-d)]$$

$$= (b-a)(d-c)(d-b)\{(c-b)[(b^2+a^2)(b+a) - (d^2+b^2)(d+b)]$$

$$+ (d-a)[(d^2+c^2)(d+c) - (d^2+b^2)(d+b)]\}$$

$$= (b-a)(d-c)(d-b)[(c-b)(a-d)(a^2+ad+d^2+b^2+ba+bd)$$

$$+ (d-a)(c-b)(d^2+dc+db+c^2+cb+b^2)]$$

$$= (b-a)(d-c)(d-b)(c-b)(d-a)[c(b+c+d) - a(a+b+d)]$$

$$= (b-a)(d-c)(d-b)(c-b)(d-a)(c-a)(a+b+c+d)$$

$$= (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d).$$

方法二.

$$
\text{原式} \xlongequal[-ar_1+r_2]{\substack{-a^2r_3+r_4\\ -ar_2+r_3}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b(b-a) & c(c-a) & d(d-a) \\ 0 & b^2(b^2-a^2) & c^2(c^2-a^2) & d^2(d^2-a^2) \end{vmatrix}
$$

$$
= 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} b-a & c-a & d-a \\ b(b-a) & c(c-a) & d(d-a) \\ b^2(b^2-a^2) & c^2(c^2-a^2) & d^2(d^2-a^2) \end{vmatrix}
$$

$$
= (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2(b+a) & c^2(c+a) & d^2(d+a) \end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal[-c_1+c_3]{-c_1+c_2} (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & c-b & d-b \\ b^2(b+a) & c^3-b^3+c^2a-b^2a & d^3-b^3+d^2a-b^2a \end{vmatrix}
$$

$$
= (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} c-b & d-b \\ (c-b)(c^2+cb+b^2+ca+ba) & (d-b)(d^2+db+b^2+ad+ab) \end{vmatrix}
$$

$$
= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c^2+cb+b^2+ca+ba & d^2+db+b^2+ad+ab \end{vmatrix}
$$

$$
= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d^2+db+b^2+ad+ab-c^2-cb-b^2-ca-ba)
$$

$$
= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d^2-c^2+db-cb+ad-ca)
$$

$$
= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)(d+c+b+a)
$$

$$
= (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d).
$$

2. 计算下列行列式:

1) $D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} \ (n\geq 2)$;

2) $D_{n+1} = \begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$;

3) $D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$,其中 $a_1a_2\cdots a_n \neq 0$.

解: 1)

$$D_n = x\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} + a_n(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}$$

$$= xD_{n-1} + a_n(-1)^{n+1}(-1)^{n-1} = D_{n-1}x + a_n = (D_{n-2}x + a_{n-1})x + a_n = D_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$$

$$= \cdots = D_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = (x^2 + a_1x + a_2)x^{n-2} + a_3x^{n-3} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

$$= x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n.$$

2) 方法一. 将 D_{n+1} 记为 $D_{n+1}(a)$. 则

$$D_{n+1} \overset{\substack{-ar_2+r_1 \\ -ar_3+r_2 \\ \cdots \\ -ar_{n+1}+r_n}}{=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} 0 & -(a-1)^{n-1} & \cdots & -n(a-n)^{n-1} \\ 0 & -(a-1)^{n-2} & \cdots & -n(a-n)^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & -1 & \cdots & -n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1\cdot(-1)^{n+1+1}\begin{vmatrix} (-1)(a-1)^{n-1} & (-2)(a-2)^{n-1} & \cdots & (-n)(a-n)^{n-1} \\ (-1)(a-1)^{n-2} & (-2)(a-2)^{n-2} & \cdots & (-n)(a-n)^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (-1)(a-1) & (-2)(a-2) & \cdots & (-n)(a-n) \\ -1 & -2 & \cdots & -n \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n(-1)(-2)\cdots(-n)\begin{vmatrix} (a-1)^{n-1} & (a-2)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ (a-1)^{n-2} & (a-2)^{n-2} & \cdots & (a-n)^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a-1 & a-2 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1\cdot 2\cdots n)D_n(a-1),$$

因此,

$$D_{n+1} = (1\cdot 2\cdots n)D_n(a-1) = (1\cdot 2\cdots n)(1\cdot 2\cdots(n-1))D_{n-1}(a-2)$$

$$= \cdots = (1\cdot 2\cdots n)(1\cdot 2\cdots(n-1))\cdots(1\cdot 2)D_2(a-n+1)$$

$$= (1\cdot 2\cdots n)(1\cdot 2\cdots(n-1))\cdots(1\cdot 2)\cdot 1$$

$$= (n+1-n)(n+1-(n-1))\cdots(n+1-1)(n-(n-1))\cdots(n-1)\cdots(3-2)(3-1)(2-1)$$

$$= \prod_{1\le j<i\le n+1}(i-j).$$

方法二. 上下翻转后用 Vandermonde 行列式.

$$
\begin{aligned}
D_{n+1} &= (-1)^{\frac{(n+1)n}{2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{\frac{(n+1)n}{2}} \prod_{1\le j<i\le n+1} ((a-i+1)-(a-j+1)) \\
&= (-1)^{\frac{(n+1)n}{2}} \prod_{1\le j<i\le n+1} (j-i) = (-1)^{\frac{(n+1)n}{2}} (-1)^{\frac{(n+1)n}{2}} \prod_{1\le j<i\le n+1} (i-j) \\
&= (-1)^{(n+1)n} \prod_{1\le j<i\le n+1} (i-j) = \prod_{1\le j<i\le n+1} (i-j).
\end{aligned}
$$

3) 用加边法.

$$
\begin{aligned}
D_n &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} \xlongequal[-r_1+r_{n+1}]{\substack{-r_1+r_2 \\ -r_1+r_3 \\ \cdots}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \\
&\xlongequal[\frac{1}{a_n}c_{n+1}+c_1]{\substack{\frac{1}{a_1}c_2+c_1 \\ \frac{1}{a_2}c_3+c_1 \\ \cdots}} \begin{vmatrix} 1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \\
&= a_1a_2\cdots a_n\Big(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\Big).
\end{aligned}
$$

3. 设 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$, 其中 $a_{ij}=|i-j|$, 求 $|A|$.

解:

$$
\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[-c_1+c_2]{\substack{-c_{n-1}+c_n \\ -c_{n-2}+c_{n-1} \\ \cdots}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & -1 & -1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-2 & -1 & -1 & \cdots & 1 \\ n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \end{vmatrix} \\
&\xlongequal[-r_1+r_2]{\substack{-r_{n-1}+r_n \\ -r_{n-2}+r_{n-1} \\ \cdots}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -2 \end{vmatrix} \xlongequal[\frac{1}{2}c_n+c_1]{\substack{\frac{1}{2}c_2+c_1 \\ \frac{1}{2}c_3+c_1 \\ \cdots}} \begin{vmatrix} \frac{n-1}{2} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 \end{vmatrix} \\
&= \frac{n-1}{2}(-2)^{n-1} = (-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}.
\end{aligned}
$$

4. 用 Laplace 定理计算下列行列式:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$; 3) $D_{2n} = \begin{vmatrix} a_n & & & & & b_n \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_n & & & & & d_n \end{vmatrix}$.

解: 1) 注意到在第 2 行和第 4 行中只有一个 2 阶子式不为零, 所以,

$$原式 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} (-1)^{2+4+2+4} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-3)(-3) = 9.$$

2) 注意到在第 1 行和第 6 行中只有一个 2 阶子式可能不为零, 所以,

$$原式 = \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} (-1)^{1+6+1+6} \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = (a^2-b^2) \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} (-1)^{1+4+1+4} \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = (a^2-b^2)^3,$$

其中第二个等号是对第 1 行和第 4 行用 Laplace 定理计算得出.

3) 注意到在第 1 行和第 $2n$ 行中只有一个 2 阶子式可能不为零, 所以,

$$原式 = \begin{vmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{vmatrix} (-1)^{1+2n+1+2n} \begin{vmatrix} a_{n-1} & & & & & b_{n-1} \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_{n-1} & & & & & d_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = (a_n d_n - b_n c_n) \cdots (a_1 d_1 - b_1 c_1) = \prod_{i=1}^{n} (a_i d_i - b_i c_i).$$

5. 设 4 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & p \\ b_1 & b_2 & b_3 & p \\ c_1 & c_2 & c_3 & p \\ d_1 & d_2 & d_3 & p \end{vmatrix},$$

求第一列各元素的代数余子式之和 $A_{11} + A_{21} + A_{31} + A_{41}$.

解:

$$A_{11} + A_{21} + A_{31} + A_{41} = \begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & p \\ 1 & b_2 & b_3 & p \\ 1 & c_2 & c_3 & p \\ 1 & d_2 & d_3 & p \end{vmatrix} = 0.$$

习题2.3(B)

1. 计算下列方阵的行列式:

1) $A = \begin{bmatrix} x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & y \\ y & 0 & 0 & 0 & x \end{bmatrix}$, 2) $B = \begin{bmatrix} a_0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & a_4 \end{bmatrix}$, 其中 $a_k \neq 0 (k = 0, 1, 2, 3, 4)$.

解: 1)

$$|A| = x(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} x & y & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 \\ 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} + y(-1)^{5+1}\begin{vmatrix} y & 0 & 0 & 0 \\ x & y & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 \\ 0 & 0 & x & y \end{vmatrix} = x^5 + y^5.$$

2)

$$|B| \xlongequal[\substack{-\frac{1}{a_2}c_3+c_1 \\ -\frac{1}{a_3}c_4+c_1 \\ -\frac{1}{a_4}c_5+c_1}]{-\frac{1}{a_1}c_2+c_1} \begin{vmatrix} a_0 - \frac{1}{a_1} - \cdots - \frac{1}{a_4} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = a_1a_2a_3a_4\Big(a_0 - \sum_{i=1}^{4}\frac{1}{a_i}\Big).$$

2. 用 Laplace 定理计算下列行列式:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 10 & 16 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & 16 & 1 & 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}$.

解: 1) 注意到在第 1 行和第 2 行中有 3个 2 阶子式不为零, 所以,

$$\text{原式} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}(-1)^{1+2+1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}(-1)^{1+2+1+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_3^2 & x_4^2 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}(-1)^{1+2+2+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & x_3 & x_4 \\ 0 & x_3^2 & x_4^2 \end{vmatrix}$$

$$= (x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3) - 2(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)(x_4 - x_3).$$

2) 方法一. 注意到在第 1 行和第 2 行中有 3个 2 阶子式不为零, 所以,

$$\text{原式} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}(-1)^{1+2+1+2}\begin{vmatrix} 16 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}(-1)^{1+2+1+3}\begin{vmatrix} 10 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 16 & 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}(-1)^{1+2+2+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{-r_2+r_1} \begin{vmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 16 & 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= (16 - 2\cdot 9 + 4)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 2(2-1)(3-1)(3-2) = 4.$$

方法二. 由于

$$\text{原式} \xlongequal{-r_4+r_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 16 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & 16 & 1 & 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}.$$

注意到在上式的第 $1,2$ 行和第 3 行中只有一个 3 阶子式可能不为零, 所以,

$$\text{原式}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 4\\ 4 & 9 & 16\end{vmatrix}(-1)^{1+2+3+1+2+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 4 & 9\end{vmatrix}=(3-2)(4-2)(4-3)(2-1)(3-1)(3-2)=4.$$

3. 已知 5 阶行列式

$$D_5=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5\\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2\\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0\end{vmatrix}=27,$$

求 $A_{41}+A_{42}+A_{43}$ 和 $A_{44}+A_{45}$, 其中 $A_{4j}(j=1,2,3,4,5)$ 为 D_5 的第 4 行第 j 个元素的代数余子式.

解: 由行列式按一行的展开定理,

$$\sum_{k=1}^{5}a_{4k}A_{4k}=A_{41}+A_{42}+A_{43}+2A_{44}+2A_{45}=D_5=27,\quad \sum_{k=1}^{5}a_{2k}A_{4k}=2A_{41}+2A_{42}+2A_{43}+A_{44}+A_{45}=0,$$

记 $x=A_{41}+A_{42}+A_{43}$ 和 $y=A_{44}+A_{45}$. 则由此得到二元一次方程组

$$\begin{cases}x+2y=27,\\ 2x+y=0.\end{cases}$$

解得 $x=-9, y=18$, 即 $A_{41}+A_{42}+A_{43}=-9$ 和 $A_{44}+A_{45}=18$.

4. 设 $a>b>c>0$, 试证

$$D=\begin{vmatrix} a & a^2 & bc\\ b & b^2 & ac\\ c & c^2 & ab\end{vmatrix}<0.$$

证明:

$$D=\frac{1}{abc}\begin{vmatrix} a^2 & a^3 & abc\\ b^2 & b^3 & abc\\ c^2 & c^3 & abc\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a^2 & a^3 & 1\\ b^2 & b^3 & 1\\ c^2 & c^3 & 1\end{vmatrix}\xlongequal[-a^2c_3+c_1]{-ac_1+c_2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1\\ b^2-a^2 & b^2(b-a) & 1\\ c^2-a^2 & c^2(c-a) & 1\end{vmatrix}$$

$$=1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} b^2-a^2 & b^2(b-a)\\ c^2-a^2 & c^2(c-a)\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)\begin{vmatrix} b+a & b^2\\ c+a & c^2\end{vmatrix}$$

$$=(a-b)(a-c)((b+a)c^2-b^2(c+a))=(a-b)(a-c)(bc(c-b)+a(c^2-b^2))$$

$$=-(a-b)(a-c)(b-c)(ab+ac+bc)<0.$$

5. 设 $a\neq b$, 试证

$$D_n=\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & ab\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b\end{vmatrix}=\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}.$$

证明: 用数学归纳法. 首先, 当 $n=1$ 时, $D_1=a+b=\frac{a^2-b^2}{a-b}$, 结论成立; 当 $n=2$ 时, $D_2=(a+b)^2-ab=a^2+ab+b^2=\frac{a^3-b^3}{a-b}$, 结论亦成立. 假设直至 $n-1$ 结论都成立. 往证

对 n 结论成立. 由于

$$
\begin{aligned}
D_n &= (a+b)(-1)^{1+1}D_{n-1} + 1\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a+b & ab \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix} \\
&= (a+b)D_{n-1} - ab(-1)^{1+1}D_{n-2} = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2} \\
&= (a+b)\frac{a^n - b^n}{a-b} - ab\frac{a^{n-1} - b^{n-1}}{a-b} = \frac{a^{n+1} - ab^n + a^n b - b^{n+1} - a^n b + ab^n}{a-b} \\
&= \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}.
\end{aligned}
$$

所以结论对 n 成立. 由数学归纳法得出, 结论对一切 $n \geq 1$ 成立.

3 第三章

3.1 习题3.1

1. 试证: 1) $P(i,j)^{-1}=P(i,j)$; 2) $P(i[k])^{-1}=P(i[\frac{1}{k}]), k\neq 0$; 3) $P(i,j[k])^{-1}=P(i,j[-k])$.

证明: 1) 记 $P(i,j)$ 为 (a_{st}), $P(i,j)P(i,j)$ 为 (b_{st}). 则当 $s\neq i,j$,

$$b_{st}=\sum_{m=1}^{n}a_{sm}a_{mt}=\sum_{m=1}^{n}\delta_{sm}a_{mt}=a_{st}=\delta_{st};$$

$$b_{it}=\sum_{m=1}^{n}a_{im}a_{mt}=\sum_{m=1}^{n}\delta_{jm}a_{mt}=a_{jt}=\delta_{it},$$

$$b_{jt}=\sum_{m=1}^{n}a_{jm}a_{mt}=\sum_{m=1}^{n}\delta_{im}a_{mt}=a_{it}=\delta_{jt}.$$

所以, $P(i,j)P(i,j)=E$. 进而, $P(i,j)^{-1}=P(i,j)$.

2) 记 $P(i[k])$ 为 (a_{st}), $P(i[\frac{1}{k}])$ 为 (b_{st}), $P(i[k])P(i[\frac{1}{k}])$ 为 (c_{st}), $P(i[\frac{1}{k}])P(i[k])$ 为 (d_{st}). 则当 $s\neq i$,

$$c_{st}=\sum_{m=1}^{n}a_{sm}b_{mt}=\sum_{m=1}^{n}\delta_{sm}b_{mt}=b_{st}=\delta_{st},$$

$$d_{st}=\sum_{m=1}^{n}b_{sm}a_{mt}=\sum_{m=1}^{n}\delta_{sm}a_{mt}=a_{st}=\delta_{st};$$

而

$$c_{it}=\sum_{m=1}^{n}a_{im}a_{mt}=\sum_{m=1}^{n}k\delta_{im}b_{mt}=kb_{it}=k\cdot\frac{1}{k}\delta_{it}=\delta_{it},$$

$$d_{it}=\sum_{m=1}^{n}b_{im}a_{mt}=\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{k}\delta_{im}a_{mt}=\frac{1}{k}a_{it}=\frac{1}{k}\cdot k\delta_{it}=\delta_{it}.$$

所以, $P(i[k])P(i[\frac{1}{k}])=E$, $P(i[\frac{1}{k}])P(i[k])=E$. 进而, $P(i[k])^{-1}=P(i[\frac{1}{k}])$.

3) 记 $P(i,j[k])$ 为 (a_{st}), $P(i,j[-k])$ 为 (b_{st}), $P(i,j[k])P(i,j[-k])$ 为 (c_{st}) 和 $P(i,j[-k])P(i,j[k])$ 为 (d_{st}). 则当 $s\neq i$,

$$c_{st}=\sum_{m=1}^{n}a_{sm}b_{mt}=\sum_{m=1}^{n}\delta_{sm}b_{mt}=b_{st}=\delta_{st},$$

$$d_{st}=\sum_{m=1}^{n}b_{sm}a_{mt}=\sum_{m=1}^{n}\delta_{sm}a_{mt}=a_{st}=\delta_{st};$$

而

$$c_{it}=\sum_{m=1}^{n}a_{im}a_{mt}=\sum_{m=1}^{n}(\delta_{im}+k\delta_{jm})b_{mt}=b_{it}+kb_{jt}=\delta_{it}-k\delta_{jt}+k\delta_{jt}=\delta_{it},$$

$$d_{it}=\sum_{m=1}^{n}b_{im}a_{mt}=\sum_{m=1}^{n}(\delta_{im}-k\delta_{jm})a_{mt}=a_{it}-ka_{jt}=\delta_{it}+k\delta_{jt}-k\delta_{jt}=\delta_{it}.$$

所以, $P(i,j[k])P(i,j[-k])=E$, $P(i,j[-k])P(i,j[k])=E$. 进而, $P(i,j[k])^{-1}=P(i,j[-k])$.

2. 试证: 1) $P(i,j)^{\mathrm{T}}=P(i,j)$; 2) $P(i[k])^{\mathrm{T}}=P(i[k]), k\neq 0$; 3) $P(i,j[k])^{\mathrm{T}}=P(j,i[k])$.

证明: 1) 记 $P(i,j)$ 为 (a_{st}), $P(i,j)^{\mathrm{T}}$ 为 (b_{st}). 则当 $s\neq i,j$, $b_{st}=a_{ts}=\delta_{ts}=\delta_{st}=a_{st}$; $b_{it}=a_{ti}=\delta_{tj}=\delta_{jt}=a_{it}$, $b_{jt}=a_{tj}=\delta_{ti}=\delta_{it}=a_{jt}$. 所以, $P(i,j)^{\mathrm{T}}=P(i,j)$.

2) 记 $P(i[k])$ 为 (a_{st}), $P(i[k])^{\mathrm{T}}$ 为 (b_{st}). 则当 $s\neq i$, $b_{st}=a_{ts}=\delta_{ts}=\delta_{st}=a_{st}$; $b_{it}=a_{ti}=k\delta_{ti}=k\delta_{it}=a_{it}$. 所以, $P(i[k])^{\mathrm{T}}=P(i[k])$.

3) 记 $P(i,j[k])$ 为 (a_{st}), $P(i,j[k])^{\mathrm{T}}$ 为 (b_{st}), $P(j,i[k])$ 为 (c_{st}), 则当 $s\neq j$, $b_{st}=a_{ts}=\delta_{ts}=\delta_{st}=c_{st}$; $b_{jt}=a_{tj}=k\delta_{ti}+\delta_{tj}=k\delta_{it}+\delta_{jt}=c_{jt}$. 所以, $P(i,j[k])^{\mathrm{T}}=P(j,i[k])$.

3. 已知 n 阶矩阵 A 满足 $A^3=O$, 试证 $E-A$ 可逆, 且 $(E-A)^{-1}=E+A+A^2$.

证明: 由于

$$(E-A)(E+A+A^2)=E-A+A-A^2+A^2-A^3=E-A^3=E-O=E,$$

$$(E+A+A^2)(E-A)=E+A+A^2-A-A^2-A^3=E-A^3=E-O=E,$$

所以, $E-A$ 可逆, 且 $(E-A)^{-1}=E+A+A^2$.

4. 设 A 为对称矩阵且可逆, 试证 A^{-1} 亦为对称矩阵.

证明: 由于 $E=AA^{-1}$, 所以两边转置并由 A 为对称矩阵得出, $E=(A^{-1})^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}=(A^{-1})^{\mathrm{T}}A$. 又由于 $E=A^{-1}A$, 两边转置且由 A 的对称性得出, $E=A^{\mathrm{T}}(A^{-1})^{\mathrm{T}}=A(A^{-1})^{\mathrm{T}}$. 所以, $A^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm{T}}$, 即 A^{-1} 亦为对称矩阵.

3.2 习题3.2

习题3.2(A)

1. 求下列矩阵的逆矩阵:

1) $\begin{bmatrix}1&2\\2&5\end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$; 3) $\begin{bmatrix}1&2&-1\\3&4&-2\\5&-4&1\end{bmatrix}$;

4) $\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&2&0&0\\2&1&3&0\\1&2&1&4\end{bmatrix}$; 5) $\begin{bmatrix}5&2&0&0\\2&1&0&0\\0&0&8&3\\0&0&5&2\end{bmatrix}$; 6) $\begin{bmatrix}a_1&&&\\&a_2&&\\&&\ddots&\\&&&a_n\end{bmatrix}$ $(a_1a_2\cdots a_n\neq 0)$.

解: 1) 该矩阵行列式的值为 $5-4=1$. 逆矩阵为

$$\begin{bmatrix}5&-2\\-2&1\end{bmatrix}.$$

2) 该矩阵行列式的值为 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$. 逆矩阵为

$$\begin{bmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}.$$

3)

$$
\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\xrightarrow[-5r_1+r_3]{-3r_1+r_2}
\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -14 & 6 & -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[-7r_2+r_3]{r_2+r_1}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 16 & -7 & 1 \end{bmatrix}
\xrightarrow{r_3+r_2}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 13 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 16 & -7 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[r_3\times(-1)]{r_2\times(-\frac{1}{2})}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{13}{2} & 3 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -16 & 7 & -1 \end{bmatrix}.
$$

所以, 逆矩阵为

$$
\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -\frac{13}{2} & 3 & -\frac{1}{2} \\ -16 & 7 & -1 \end{bmatrix}.
$$

4)

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\xrightarrow[-r_1+r_4]{\substack{-r_1+r_2 \\ -2r_1+r_2}}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{-r_2+r_4}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\xrightarrow{r_2\times\frac{1}{2}}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{-r_2+r_3}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\xrightarrow{r_3\times\frac{1}{3}}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{-r_3+r_4}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}
\xrightarrow{r_4\times\frac{1}{4}}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & -\frac{5}{24} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.
$$

所以, 逆矩阵为

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{8} & -\frac{5}{24} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}
= \frac{1}{24}
\begin{bmatrix} 24 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 12 & 0 & 0 \\ -12 & -4 & 8 & 0 \\ 3 & -5 & -2 & 6 \end{bmatrix}.
$$

5) 由于原矩阵是分块对角矩阵, 即

$$
\begin{bmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{bmatrix}, \quad A_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, \quad A_2^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 8 \end{bmatrix},
$$

所以, 逆矩阵为

$$
\begin{bmatrix} A_1^{-1} & \\ & A_2^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 8 \end{bmatrix}.
$$

6) 逆矩阵为

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & & & \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{a_n} \end{bmatrix}.$$

2. 解下列矩阵方程:

1) $X\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

解: 1) 记方程为 $XA = B$, 则 $X = BA^{-1}$. 为求 A^{-1},

$$(A, E) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-2r_1+r_3]{-2r_1+r_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-r_2+r_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-2r_3+r_2]{r_3+r_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 \times (-1)]{r_2 \times \frac{1}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2+r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

所以, 逆矩阵

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

进而, 得到

$$X = BA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -6 & 6 & 3 \\ -8 & 15 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -\frac{8}{3} & 5 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

2) 记方程为 $AXB = C$, 则 $X = A^{-1}CB^{-1}$. 为求 A^{-1} 和 B^{-1},

$$(A, E) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-3r_1+r_3]{-2r_1+r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-r_2+r_3]{r_2+r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 \times (-1)]{r_2 \times (-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-5r_3+r_2]{2r_3+r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \times \frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

所以,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & -6 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

而

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

由此得到

$$X = A^{-1}CB^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & -6 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -6 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}.$$

3. 设方阵 A 满足 $A^2 - A - 2E = O$, 证明 A 及 $A+2E$ 都可逆, 并求 A^{-1} 及 $(A+2E)^{-1}$.

证明: 由 $A^2 - A - 2E = O$ 知, $A(A-E) = 2E$, 进而, $A(\frac{1}{2}(A-E)) = E$, 所以 A 可逆, 且 $A^{-1} = \frac{1}{2}(A-E)$. 再由 A 可逆知, A^2 可逆. 而由 $A^2 - A - 2E = O$ 知, $A + 2E = A^2$, 所以 $A+2E$ 可逆, 且

$$(A+2E)^{-1} = (A^2)^{-1} = (A^{-1})^2 = \left(\frac{1}{2}(A-E)\right)^2 = \frac{1}{4}(A^2 - 2A + E)$$
$$= \frac{1}{4}(A + 2E - 2A + E) = \frac{1}{4}(3E - A).$$

4. 设 $n(n \geq 2)$ 阶方阵 A 的伴随矩阵 A^*, 证明: 1) 若 $|A| = 0$, 则 $|A^*| = 0$;　2) $|A^*| = |A|^{n-1}$.

证明: 1) 反证法. 设 $|A^*| \neq 0$, 则 A^* 可逆. 由 $AA^* = |A|E = 0E = O$, 推出 $A = O(A^*)^{-1} = O$, 进而 $A^* = O$, 所以 $|A^*| = 0$, 矛盾. 故 $|A^*| = 0$.

2) 由 $AA^* = |A|E$, 推出 $|A||A^*| = |A|^n$. 当 $|A| \neq 0$ 时, 由前面立刻得出 $|A^*| = |A|^{n-1}$. 当 $|A| = 0$ 时, 由1)知, $|A^*| = 0$, 依然有 $|A^*| = |A|^{n-1}$. 故结论得证.

5. 设 A 为 $n(n \geq 2)$ 阶方阵, 证明 A 可逆的充分必要条件是 A^* 可逆.

证明: 必要性. 由 A 可逆知, $|A| \neq 0$. 再由 $AA^* = |A|E$, 得到由 $(\frac{1}{|A|}A)A^* = E$, 所以 A^* 可逆.

充分性. 由 A^* 可逆知, $|A^*| \neq 0$. 再由上一题的结论 $|A^*| = |A|^{n-1}$ 知, $|A| \neq 0$, 所以 A 可逆.

6. 设 A, B 都是 n 阶可逆矩阵, 计算

$$\left| -2\begin{bmatrix} A^* & O \\ O & B^{-1} \end{bmatrix} \right|.$$

解: 原式 $= (-2)^{2n}|A^*||B^{-1}| = 2^{2n}|A|^{n-1}|B|^{-1}$.

7. 利用逆矩阵解下列线性方程组:

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 2, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 3; \end{cases}$　　2) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$

解: 1) 记方程为 $AX=B$, 则 $X=A^{-1}B$. 为求 A^{-1},

$$(A,E)=\begin{bmatrix}1&2&3&1&0&0\\2&2&5&0&1&0\\3&5&1&0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[-3r_1+r_3]{-2r_1+r_2}\begin{bmatrix}1&2&3&1&0&0\\0&-2&-1&-2&1&0\\0&-1&-8&-3&0&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3\times(-1)]{-r_2+r_1}\begin{bmatrix}1&0&2&-1&1&0\\0&-2&-1&-2&1&0\\0&1&8&3&0&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}1&0&2&-1&1&0\\0&1&8&3&0&-1\\0&-2&-1&-2&1&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{2r_2+r_3}\begin{bmatrix}1&0&2&-1&1&0\\0&1&8&3&0&-1\\0&0&15&4&1&-2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3\times\frac{1}{15}}\begin{bmatrix}1&0&2&-1&1&0\\0&1&8&3&0&-1\\0&0&1&\frac{4}{15}&\frac{1}{15}&-\frac{2}{15}\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-8r_3+r_1]{-2r_3+r_1}\begin{bmatrix}1&0&0&-\frac{23}{15}&\frac{13}{15}&\frac{4}{15}\\0&1&0&\frac{13}{15}&-\frac{8}{15}&\frac{1}{15}\\0&0&1&\frac{4}{15}&\frac{1}{15}&-\frac{2}{15}\end{bmatrix}.$$

所以, 逆矩阵

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{23}{15}&\frac{13}{15}&\frac{4}{15}\\\frac{13}{15}&-\frac{8}{15}&\frac{1}{15}\\\frac{4}{15}&\frac{1}{15}&-\frac{2}{15}\end{bmatrix}=\frac{1}{15}\begin{bmatrix}-23&13&4\\13&-8&1\\4&1&-2\end{bmatrix}.$$

进而, 得到

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{15}\begin{bmatrix}-23&13&4\\13&-8&1\\4&1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=\frac{1}{15}\begin{bmatrix}15\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\ \text{即}\ \begin{cases}x_1=1,\\x_2=0,\\x_3=0.\end{cases}$$

2) 记方程为 $AX=B$, 则 $X=A^{-1}B$. 为求 A^{-1},

$$(A,E)=\begin{bmatrix}1&-1&-1&1&0&0\\2&-1&-3&0&1&0\\3&2&-5&0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[-3r_1+r_3]{-2r_1+r_2}\begin{bmatrix}1&-1&-1&1&0&0\\0&1&-1&-2&1&0\\0&5&-2&-3&0&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-5r_2+r_3]{r_2+r_1}\begin{bmatrix}1&0&-2&-1&1&0\\0&1&-1&-2&1&0\\0&0&3&7&-5&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3\times\frac{1}{3}}\begin{bmatrix}1&0&-2&-1&1&0\\0&1&-1&-2&1&0\\0&0&1&\frac{7}{3}&-\frac{5}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3+r_2]{2r_3+r_1}\begin{bmatrix}1&0&0&\frac{11}{3}&-\frac{7}{3}&\frac{2}{3}\\0&1&0&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\0&0&1&\frac{7}{3}&-\frac{5}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}.$$

所以, 逆矩阵

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{11}{3}&-\frac{7}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{7}{3}&-\frac{5}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}11&-7&2\\1&-2&1\\7&-5&1\end{bmatrix}.$$

进而, 得到

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}11&-7&2\\1&-2&1\\7&-5&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}15\\0\\9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\0\\3\end{bmatrix},\ \text{即}\ \begin{cases}x_1=5,\\x_2=0,\\x_3=3.\end{cases}$$

8. 设矩阵 A 满足 $AB=A+2B$, 其中

$$A=\begin{bmatrix}0&3&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{bmatrix},$$

求矩阵 B.

解: 由 $AB=A+2B$ 知, $(A-2E)B=A$, 由此得到 $B=(A-2E)^{-1}A$. 而

$$A-2E=\begin{bmatrix}-2&3&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{bmatrix},$$

为求其逆,

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_1+r_3]{2r_1+r_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-r_2+r_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 \times \frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{-r_3+r_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-r_2+r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

所以,

$$(A-2E)^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$B = (A-2E)^{-1}A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 6 & 6 \\ -2 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

9. 设 3 阶方阵 A, B 满足关系式 $A^{-1}BA = 6A + BA$, 且

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix},$$

求 B.

解: 由 $A^{-1}BA = 6A + BA$ 知, $A^{-1}B = 6E + B$, 进而 $(A^{-1} - E)B = 6E$, 所以 $B = 6(A^{-1} - E)^{-1}$. 而

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \qquad A^{-1} - E = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \qquad (A^{-1} - E)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix},$$

所以

$$B = 6(A^{-1} - E)^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

10. 设 3 阶方阵 A, B 满足关系式 $A^*BA = 2BA - 4E$, 其中 A^* 是 A 的伴随矩阵. 若

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

求 B^{-1}.

解: 由 $A^*BA = 2BA - 4E$ 知, $4E = (2E - A^*)BA$, 两边右乘 $A^{-1}B^{-1}$, 得到 $4A^{-1}B^{-1} = 2E - A^*$, 再左乘 $\frac{1}{4}A$, 得出 $B^{-1} = \frac{1}{4}A(2E - A^*)$. 经计算,

$$A^* = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \qquad 2E - A^* = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

$$B^{-1}=\frac{1}{4}A(2E-A^*)=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}4&0&0\\0&-2&0\\0&0&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

11. 设 $P^{-1}AP=\Lambda$, 其中 $P=\begin{bmatrix}-1&-4\\1&1\end{bmatrix}$, $\Lambda=\begin{bmatrix}-1&0\\0&2\end{bmatrix}$, 求 A^{11}.

解: 由 $P^{-1}AP=\Lambda$ 知, $P^{-1}A^{11}P=\Lambda^{11}$, 进而, $A^{11}=P\Lambda^{11}P^{-1}$. 而 $P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&4\\-1&-1\end{bmatrix}$, $\Lambda^{11}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&2^{11}\end{bmatrix}$. 所以,

$$\begin{aligned}A^{11}=P\Lambda^{11}P^{-1}&=\begin{bmatrix}-1&-4\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0\\0&2^{11}\end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&4\\-1&-1\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&-2^{13}\\-1&2^{11}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&4\\-1&-1\end{bmatrix}\\&=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1+2^{13}&4+2^{13}\\-1-2^{11}&-4-2^{11}\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}8193&8196\\-2049&-2052\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2731&2732\\-683&-684\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

12. 已知实矩阵 $A=(a_{ij})_{3\times3}$ 满足条件: (1) $a_{ij}=A_{ij}(i,j=1,2,3,A_{ij}$ 是 a_{ij} 的代数余子式); (2) $a_{11}\neq0$. 计算 $|A|$.

解: 一方面, 由条件(1)知, $A^*=A^{\mathrm{T}}$, 再由展开定理知 $|A|E=AA^*=AA^{\mathrm{T}}$, 所以 $|A|^3=|A|^2$, 即 $|A|^2(|A|-1)=0$, 由此推出 $|A|=0$ 或 $|A|=1$. 另一方面, 由条件(1), (2)和展开定理知 $|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2>0$. 综合以上, 得出 $|A|=1$.

习题3.2(B)

1. 设 n 阶矩阵 A 及 m 阶矩阵 B 都可逆, 求 $\begin{bmatrix}O&A\\B&O\end{bmatrix}^{-1}$.

解: 因为 $\begin{bmatrix}O&A\\B&O\end{bmatrix}\begin{bmatrix}O&B^{-1}\\A^{-1}&O\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E&O\\O&E\end{bmatrix}$, 所以 $\begin{bmatrix}O&A\\B&O\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}O&B^{-1}\\A^{-1}&O\end{bmatrix}$.

2. 设 $A^k=O(k$ 为正整数, 则 $E-A$ 可逆, 并求 $E-A$ 的逆.

解: 因为 $(E-A)(E+A+\cdots+A^{k-1})=E-A+A-A^2+\cdots+A^{k-1}-A^k=E-A^k=E-O=E$, 所以 $E-A$ 可逆, 且 $(E-A)^{-1}=E+A+\cdots+A^{k-1}$.

3. 已知 A,B 为 3 阶矩阵, 且满足 $2A^{-1}B=B-4E$, 其中 E 是 3 阶单位矩阵. 1) 试证矩阵 $A-2E$ 可逆; 2) 若 $B=\begin{bmatrix}1&-2&0\\1&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$, 求矩阵 A.

解: 对 $2A^{-1}B=B-4E$ 左乘 A, 得到 $2B=AB-4A$. 一方面, 由此得出 $4A=(A-2E)B$, 两边右乘 A^{-1}, 进而有 $E=(A-2E)(\frac{1}{4}BA^{-1})$, 因此, 矩阵 $A-2E$ 可逆; 由此知 B 可逆, 进而 $B-4E$ 可逆. 另一方面, 也可以得出 $2B=A(B-4E)$. 这样, $A=2B(B-4E)^{-1}$. 而

$$B-4E=\begin{bmatrix}-3&-2&0\\1&-2&0\\0&0&-2\end{bmatrix},\qquad (B-4E)^{-1}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}-2&2&0\\-1&-3&0\\0&0&-4\end{bmatrix},$$

所以

$$A=2\begin{bmatrix}1&-2&0\\1&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}\frac{1}{8}\begin{bmatrix}-2&2&0\\-1&-3&0\\0&0&-4\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}0&8&0\\-4&-4&0\\0&0&-8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&2&0\\-1&-1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}.$$

4. 设 3 阶实矩阵 $A=(a_{ij})_{3\times3}$, 且满足条件: (1) $a_{ij}=A_{ij}(i,j=1,2,3),A_{ij}$ 是 a_{ij} 的代数余子式; (2) $a_{33}=-1$, $|A|=1$;　(3) $b=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$. 求 $Ax=b$ 的解.

解: 由条件(1)知, $A^* = A^{\mathrm{T}}$, 再由展开定理和(2)知 $E = |A|E = AA^* = AA^{\mathrm{T}}$. 一方面, 由此得出 $A^{-1} = A^{\mathrm{T}}$, 从而由 $Ax = b$ 解得 $x = A^{-1}b = A^{\mathrm{T}}b$, 再由条件(3)知 $x = (a_{31}, a_{32}, a_{33})^{\mathrm{T}}$; 另一方面, 也由此得出 $\sum_{k=1}^{3} a_{3k}^2 = 1$, 再由 $a_{33} = -1$ 知, $a_{31} = a_{32} = 0$. 所以, 解得 $x = (0, 0, -1)^{\mathrm{T}}$.

3.3 习题3.3

习题3.3(A)

1. 在秩为 r 的矩阵中, 有没有值为 0 的 $r-1$ 阶子式? 有没有值为 0 的 r 阶子式?

解: 都有可能. 例如, 当

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

可以看出, $R(A) = 2$, 显然, 有值为 0 的 1 阶子式, 而 $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ 是值为 0 的 2 阶子式.

2. 从矩阵 A 中划去一行得到矩阵 B, 问 A, B 秩的关系怎样?

解: 由于 B 比 A 少一行, 所以 B 的子式都是 A 的子式, 而矩阵的秩是值不为零的最高阶子式的阶数, 所以 $R(B) \leq R(A)$.

设 $R(A) = r \geq 2$. 假定 $R(B) < r-1$, 则 B 的 $r-1$ 阶和 r 阶子式值都为零. 考虑 A 的任意一个 r 阶子式, 若它不含划去的行, 则也是 B 的 r 阶子式, 值为零; 若它含划去的行, 则不是 B 的 r 阶子式, 但由展开定理(按划去的行可展开成 r 个 B 的 $r-1$ 阶子式) 及 B 的 $r-1$ 阶子式值都为零的事实知, 值依然为零. 所以此时 $R(A) < r$, 推出矛盾, 因此 $R(B) \geq r-1$. 若 $R(A) = r \leq 1$, 则显然 $R(B) \geq 0 \geq r-1$.

总之, $R(A) \geq R(B) \geq R(A) - 1$.

3. 求作一个秩是 4 的方阵, 它的两个行向量是 $(1, 0, 1, 0, 0)$, $(1, -1, 0, 0, 0)$.

解: 取

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

显然, $|A| = 0$. 而

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{-r_3+r_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

所以, $R(A) = 4$, A 即为所求.

4. 求下列矩阵的秩, 并求它的一个值非零的最高阶子式:

1) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -3 \\ 7 & 0 & 5 & -1 & -8 \end{bmatrix}$;

3) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 8 & 3 & 7 \\ 2 & -3 & 0 & 7 & -5 \\ 3 & -2 & 5 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$; 4) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 4 & 3 \end{bmatrix}$.

解: 1)

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow[-r_1+r_3]{-3r_1+r_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & 5 \\ 0 & 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{-r_2+r_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

则秩为 2, $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$

2)

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -3 \\ 7 & 0 & 5 & -1 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{-r_2+r_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -3 \\ 7 & 0 & 5 & -1 & -8 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow[-7r_1+r_3]{-2r_1+r_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 & -4 & 2 \\ 0 & -7 & 11 & 9 & -7 \\ 0 & -21 & 33 & 27 & -22 \end{bmatrix} \xrightarrow{-3r_2+r_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 & -4 & 2 \\ 0 & -7 & 11 & 9 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

则秩为 3,

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 7 & 0 & -8 \end{vmatrix} = 7 \neq 0.$$

3)

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 8 & 3 & 7 \\ 2 & -3 & 0 & 7 & -5 \\ 3 & -2 & 5 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 7 & -5 \\ 3 & -2 & 5 & 8 & 0 \\ 2 & 1 & 8 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow[-2r_1+r_4]{\substack{-2r_1+r_2 \\ -3r_1++r_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2 \leftrightarrow r_3]{r_3 \leftrightarrow r_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -3 & -6 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & -4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow[2r_2+r_4]{3r_2+r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{7}{8}r_3+r_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

则秩为 3,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 2 & -3 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 16 \neq 0.$$

4)

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & 1 & -3 & -7 \\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-2r_1+r_4]{\substack{-2r_1+r_2 \\ -3r_1+r_3}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & 8 & 9 & 12 \\ 0 & -7 & 7 & 8 & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow[-7r_2+r_4]{-8r_2+r_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-r_3+r_4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

则秩为 3,

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

5. 设矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -6 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & a & 7 & -1 \\ 1 & -1 & -6 & -1 & b \end{bmatrix},$$

求 A 的秩.

解: 因为

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -6 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & a & 7 & -1 \\ 1 & -1 & -6 & -1 & b \end{bmatrix} \xrightarrow[-r_1+r_4]{\substack{-2r_1+r_2 \\ -3r_1+r_3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 6+a & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & -4 & b \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-2r_2+r_4]{-r_2+r_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 8+a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2+b \end{bmatrix},$$

则当 $a=-8, b=-2$ 时, $R(A)=2$; 当 $a=-8, b\neq -2$ 时, $R(A)=3$; 当 $a\neq -8, b=-2$ 时, $R(A)=3$; 当 $a\neq -8, b\neq -2$ 时, $R(A)=4$.

6. 设 A 为 $n(n>2)$ 阶方阵, 证明 $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$.

证明: 由展开定理知, $A^*(A^*)^* = |A^*|E$, 进而 $AA^*(A^*)^* = |A^*|A$, 所以 $|A|E(A^*)^* = |A^*|A$, 即 $|A|(A^*)^* = |A^*|A$, 而 $|A^*| = |A|^{n-1}$, 因此, $|A|(A^*)^* = |A|^{n-1}A$. 当 $|A|\neq 0$ 时, 立刻可得 $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$.

当 $|A|=0$ 时, 则 $R(A)\leq n-1$. 此时若 $R(A)=n-1$, 则 $R(A^*)=1$, 从而可知 A^* 的 $n-1(>1)$ 阶子式值均为零, 所以 $(A^*)^* = O = 0A = |A|^{n-2}A$; 若 $R(A)<n-1$, 则 $R(A^*)=0$, 从而可知 $A^*=O$, 因此, $(A^*)^* = O = 0A = |A|^{n-2}A$.

因此们得证 $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$.

习题3.3(B)

1. 设 A 是 4×3 矩阵, 且 A 的秩 $R(A)=2$, 而

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

求 AB 的秩.

解: 因为

$$|B|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}=2\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=2\cdot(3+2)=10\neq 0,$$

所以, B 可逆, 因此, $R(AB)=R(A)=2$.

2. 设矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & a & 4 \\ 1 & 0 & a & 1 & 5 \\ 2 & a & 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

的秩 $R(A)=3$, 求 a 的值.

解: 因为

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & a & 4 \\ 1 & 0 & a & 1 & 5 \\ 2 & a & 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}\xrightarrow[-2r_1+r_4]{\substack{-2r_1+r_2\\ -r_1+r_3}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & a-4 & -2 \\ 0 & -1 & a-2 & -1 & 2 \\ 0 & a-2 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3\leftrightarrow r_4]{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & a-2 & -1 & 2 \\ 0 & a-2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & a-4 & -2 \end{bmatrix}\xrightarrow{(a-2)r_2+r_3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & a-2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & a^2-4a+3 & 3-a & 2a-6 \\ 0 & 0 & -4 & a-4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & a-2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & a-4 & -2 \\ 0 & 0 & (a-3)(a-1) & -(a-3) & 2(a-3) \end{bmatrix},$$

当 $a=3$ 时, 最后一行是零行, 此时 $R(A)=3$. 当 $a\neq 3$ 时, 继续运算,

$$A\xrightarrow{(a-3)r_3+r_4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & a-2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & a-4 & -2 \\ 0 & 0 & (a-3)(a-5) & (a-3)(a-5) & 0 \end{bmatrix},$$

则当 $a=5$ 时, 最后一行是零行, 此时 $R(A)=3$. 因此 $a=3$ 或 $a=5$.

3. 已知

$$A=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}(1,-1,0),\qquad B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & a & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

若 $R(AB+B)=2$, 求 a.

解: 因为 $AB+B=(A+E)B$, 而

$$A+E=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}(1,-1,0)+\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

$|A+E| = 1\cdot(-1)^{3+3}(-4+3) = -1 \neq 0$, 所以 $A+E$ 可逆, 因此 $R(B) = R((A+E)B) = R(AB+B) = 2$.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & a & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_1+r_3]{-2r_1+r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & a-4 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & a-4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2r_2+r_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & a-12 & 0 \end{bmatrix},$$

由 $R(B) = 2$ 知, $a = 12$.

4 第四章

4.1 习题4.1

习题4.1(A)

1. 用 Cramer 法则解下列方程组:

1) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=1, \\ 2x_1+2x_2+5x_3=2, \\ 3x_1+5x_2+\ \ x_3=3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x_1+6x_2 & =1, \\ x_1+5x_2+6x_3 & =0, \\ x_2+5x_3+6x_6 & =0, \\ x_3+5x_4+6x_5 & =0, \\ x_4+5x_5 & =1. \end{cases}$

解: 1) 计算

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix}=-23-2(-13)+3\cdot 4=15,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix}=|A|=15,\quad D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}=0,\quad D_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix}=0,$$

所以, $x_1=\frac{D_1}{|A|}=1$, $x_2=\frac{D_2}{|A|}=0$, $x_3=\frac{D_3}{|A|}=0$.

2) 计算

$$\begin{aligned} |A|=\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} &= 5\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}-6\begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} \\ &=25\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}-30\begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}-6\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} \\ &=125\cdot 19-150\cdot 5-30\cdot 19-30\cdot 19+36\cdot 5=665, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_1=\begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}-6\begin{vmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} \\ &=5\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}-6\begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}+6\begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix} \\ &=25\cdot 19-30\cdot 5-6\cdot 19+36\cdot 36=1507, \end{aligned}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -5 \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -30 \cdot 36 - 5 \cdot 19 + 6 \cdot 5 = -1145,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 5 \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 25 \cdot 36 - 6 \cdot 36 + 19 = 703,$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 25 \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} - 30 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -25 \cdot 30 + 30 \cdot 6 + 30 \cdot 6 = -395,$$

$$D_5 = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 25 \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 30 \begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 25 \cdot 19 - 30 \cdot 5 - 6 \cdot 19 + 1 = 212,$$

所以, $x_1 = \frac{D_1}{|A|} = \frac{1507}{665}$, $x_2 = \frac{D_2}{|A|} = -\frac{1145}{665}$, $x_3 = \frac{D_3}{|A|} = \frac{703}{665}$, $x_4 = \frac{D_4}{|A|} = -\frac{395}{665}$, $x_5 = \frac{D_5}{|A|} = \frac{212}{665}$.

2. 问 λ, μ 取何值时, 齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + \mu x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2\mu x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解.

解: 计算系数行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \mu & 1 \\ 1 & 2\mu & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[-r_2+r_3]{-r_2+r_1} \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1-\mu & 0 \\ 1 & \mu & 1 \\ 0 & \mu & 0 \end{vmatrix} = -(\lambda-1)\mu,$$

当且仅当 $|A|=0$, 即 $\lambda=1$ 或 $\mu=0$ 时, 有非零解.

3. λ 取何值时, 非齐次线性方程组

$$\begin{cases}\lambda x_1+\ \ x_2+\ \ x_3=1,\\ \ x_1+\lambda x_2+\ \ x_3=\lambda,\\ \ x_1+\ \ x_2+\lambda x_3=\lambda^2\end{cases}$$

1) 有唯一解; 2) 无解; 3) 有无穷多个解.

解: 对增广矩阵 (A,b) 施行初等行变换

$$(A,b)=\begin{bmatrix}\lambda&1&1&1\\1&\lambda&1&\lambda\\1&1&\lambda&\lambda^2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}1&1&\lambda&\lambda^2\\1&\lambda&1&\lambda\\\lambda&1&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow[-\lambda r_1+r_3]{-r_1+r_2}\begin{bmatrix}1&1&\lambda&\lambda^2\\0&\lambda-1&1-\lambda&\lambda-\lambda^2\\0&1-\lambda&1-\lambda^2&1-\lambda^3\end{bmatrix}=(C,d).$$

当 $\lambda=1$ 时,

$$(C,d)=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$R(A)=R(A,b)=1<3$, 因而有无穷多个解.

当 $\lambda\neq1$ 时,

$$(C,d)\xrightarrow[r_3\times\frac{1}{1-\lambda}]{r_2\times\frac{1}{1-\lambda}}\begin{bmatrix}1&1&\lambda&\lambda^2\\0&-1&1&\lambda\\0&1&1+\lambda&1+\lambda+\lambda^2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2+r_3}\begin{bmatrix}1&1&\lambda&\lambda^2\\0&-1&1&\lambda\\0&0&2+\lambda&(1+\lambda)^2\end{bmatrix}=(H,\ell),$$

则当 $\lambda\neq1$ 且 $\lambda\neq-2$ 时, $R(A)=R(A,b)=3$, 有唯一解; 当 $\lambda=-2$ 时,

$$(H,\ell)=\begin{bmatrix}1&1&-2&4\\0&-1&1&-2\\0&0&0&1\end{bmatrix},$$

$R(A)=2<R(A,b)=3$, 因而无解.

总之, 当 $\lambda\neq1$ 且 $\lambda\neq-2$ 时, 有唯一解; 当 $\lambda=-2$ 时, 无解; 当 $\lambda=1$ 时, 有无穷多个解.

4. 判断下列非齐次线性方程组的相容性, 若相容, 有多少个解?

$$1)\ \begin{cases}4x_1+2x_2-x_3=2,\\ \frac{3}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2+x_3=5,\\ 11x_1+3x_2\qquad=8;\end{cases}\qquad 2)\ \begin{cases}2x_1+x_2-x_3+\ x_4=1,\\ 2x_1+x_2-x_3+\frac{1}{2}x_4=1,\\ 2x_1+x_2-x_3-\ x_4=1.\end{cases}$$

解: 1) 对增广矩阵 (A,b) 施行初等行变换

$$(A,b)=\begin{bmatrix}4&2&-1&2\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&1&5\\11&3&0&8\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\times2}\begin{bmatrix}4&2&-1&2\\3&-1&2&10\\11&3&0&8\end{bmatrix}\xrightarrow{-r_2+r_1}\begin{bmatrix}1&3&-3&-8\\3&-1&2&10\\11&3&0&8\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-11r_1+r_3]{-3r_1+r_2}\begin{bmatrix}1&3&-3&-8\\0&-10&11&34\\0&-30&33&96\end{bmatrix}\xrightarrow{-3r_2+r_3}\begin{bmatrix}1&3&-3&-8\\0&-10&11&34\\0&0&0&-6\end{bmatrix},$$

由于 $R(A)=2<R(A,b)=3$, 无解, 所以不相容.

2) 对增广矩阵 (A,b) 施行初等行变换

$$(A,b)=\begin{bmatrix}2&1&-1&1&1\\2&1&-1&\frac{1}{2}&1\\2&1&-1&-1&1\end{bmatrix}\xrightarrow[-r_1+r_3]{-r_1+r_2}\begin{bmatrix}2&1&-1&1&1\\0&0&0&-\frac{1}{2}&0\\0&0&0&-2&0\end{bmatrix}\xrightarrow{-4r_2+r_3}\begin{bmatrix}2&1&-1&1&1\\0&0&0&-\frac{1}{2}&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

由于 $R(A)=2=R(A,b)<4$, 相容, 有无穷多个解.

习题4.1(B)

1. 问 λ 取何值时, 齐次线性方程组

$$\begin{cases}(1-\lambda)x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0,\\ 2x_1 + (3-\lambda)x_2 + x_3 = 0,\\ x_1 + x_2 + (1-\lambda)x_3 = 0\end{cases}$$

有非零解?

解: 计算系数行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 4\\ 2 & 3-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-4\lambda+\lambda^2)+2(1-2\lambda)+4(\lambda-1)$$
$$= -\lambda(\lambda-2)(\lambda-3),$$

当且仅当 $|A|=0$, 即 $\lambda=0,2,3$ 时, 有非零解.

2. 问 λ 取何值时, 非齐次线性方程组

$$\begin{cases}(2-\lambda)x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1,\\ 2x_1 + (5-\lambda)x_2 - 4x_3 = 2,\\ -2x_1 - 4x_2 + (5-\lambda)x_3 = -\lambda-1\end{cases}$$

1) 有唯一解; 2) 无解; 3) 有无穷多个解.

解: 对增广矩阵 (A,b) 施行初等行变换

$$(A,b) = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 & 1\\ 2 & 5-\lambda & -4 & 2\\ -2 & -4 & 5-\lambda & -\lambda-1\end{bmatrix} \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2} \begin{bmatrix} 2 & 5-\lambda & -4 & 2\\ 2-\lambda & 2 & -2 & 1\\ -2 & -4 & 5-\lambda & -\lambda-1\end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{r_1+r_3} \begin{bmatrix} 2 & 5-\lambda & -4 & 2\\ 2-\lambda & 2 & -2 & 1\\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda\end{bmatrix} = (C,d).$$

当 $\lambda=1$ 时,

$$(C,d) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -4 & 2\\ 1 & 2 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}r_1+r_2} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -4 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$R(A)=R(A,b)=1<3$, 因而有无穷多个解.

当 $\lambda\neq 1$ 时,

$$(C,d) \xrightarrow{r_3\times\frac{1}{1-\lambda}} \begin{bmatrix} 2 & 5-\lambda & -4 & 2\\ 2-\lambda & 2 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_3]{-\frac{2-\lambda}{2}r_1+r_2} \begin{bmatrix} 2 & 5-\lambda & -4 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & \frac{(6-\lambda)(\lambda-1)}{2} & 2(1-\lambda) & \lambda-1\end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{r_3\times\frac{1}{\lambda-1}} \begin{bmatrix} 2 & 5-\lambda & -4 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & \frac{6-\lambda}{2} & -2 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{\lambda-6}{2}r_2+r_3} \begin{bmatrix} 2 & 5-\lambda & -4 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & \frac{\lambda-10}{2} & \frac{\lambda-4}{2}\end{bmatrix},$$

故当 $\lambda\neq 1$ 且 $\lambda\neq 10$ 时, $R(A)=R(A,b)=3$, 有唯一解; 当 $\lambda=10$ 时,

$$(A,b) \to \begin{bmatrix} 2 & -5 & -4 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{bmatrix},$$

$R(A)=2<R(A,b)=3$, 因而无解.

总之, 当 $\lambda\neq 1$ 且 $\lambda\neq 10$ 时, 有唯一解; 当 $\lambda=10$ 时, 无解; 当 $\lambda=1$ 时, 有无穷多个解.

3. 已知线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{$*$}$$

的系数矩阵 A 的秩等于矩阵

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n & 0 \end{bmatrix}$$

的秩, 试证方程组 $(*)$ 有解.

证明: 由于矩阵 B 比矩阵 (A,b) 多一行, (A,b) 比 A 多一列, 因此, $R(B) \geq R(A,b) \geq R(A)$, 而 $R(A) = R(B)$, 所以, $R(A) = R(A,b)$, 故方程组 $(*)$ 有解.

4.2 习题4.2

习题4.2(A)

1. 设向量 $\alpha_1 = (1,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_2 = (0,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_3 = (3,4,0)^{\mathrm{T}}$, 求 $\alpha_1 - \alpha_2$ 及 $3\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3$.

解: $\alpha_1 - \alpha_2 = (1,1,0)^{\mathrm{T}} - (0,1,1)^{\mathrm{T}} = (1-0, 1-1, 0-1)^{\mathrm{T}} = (1,0,-1)^{\mathrm{T}}$.

$3\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 3(1,1,0)^{\mathrm{T}} + 2(0,1,1)^{\mathrm{T}} - (3,4,0)^{\mathrm{T}} = (3+0-3, 3+2-4, 0+2-0)^{\mathrm{T}} = (0,1,2)^{\mathrm{T}}$.

2. 设 $3(\alpha_1 - \alpha) + 2(\alpha_2 - \alpha) = 5\alpha_3 + \alpha$, 其中 $\alpha_1 = (2,5,1,3)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_2 = (10,1,5,10)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_3 = (4,1,-1,1)^{\mathrm{T}}$, 求 α.

解: 由 $3(\alpha_1 - \alpha) + 2(\alpha_2 - \alpha) = 5\alpha_3 + \alpha$ 知, $6\alpha = 3\alpha_1 + 2\alpha_2 - 5\alpha_3 = 3(2,5,1,3)^{\mathrm{T}} + 2(10,1,5,10)^{\mathrm{T}} - 5(4,1,-1,1)^{\mathrm{T}} = (6+20-20, 15+2-5, 3+10+5, 9+20-5)^{\mathrm{T}} = (6,12,18,24)^{\mathrm{T}}$, 所以, $\alpha = (1,2,3,4)^{\mathrm{T}}$.

3. 设向量 $\beta = (1,a,3)^{\mathrm{T}}$ 能由 $\alpha_1 = (2,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_2 = (-3,2,1)^{\mathrm{T}}$ 线性表示, 求 a 的值.

解: 向量 β 能由 α_1, α_2 线性表示, 即非齐次线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 = \beta$ 是相容的, 当且仅当 $R(\alpha_1, \alpha_2) = R(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$. 而

$$(\alpha_1, \alpha_2, \beta) = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2r_1 + r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & -7 & 1-2a \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -7 & 1-2a \end{bmatrix} \xrightarrow{7r_2 + r_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 22-2a \end{bmatrix},$$

由此知 $R(\alpha_1, \alpha_2) = 2$, 进而 $R(\alpha_1, \alpha_2) = R(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ 当且仅当 $22 - 2a = 0$, 即 $a = 11$.

4. 设向量组 $\alpha_1 = (1,1,2)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_2 = (3,t,1)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_3 = (0,2,-t)^{\mathrm{T}}$ 线性相关, 求 t 的值.

解: $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关当且仅当 $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)<3$. 而

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{bmatrix}1&3&0\\1&t&2\\2&1&-t\end{bmatrix}\xrightarrow[-2r_1+r_3]{-r_1+r_2}\begin{bmatrix}1&3&0\\0&t-3&2\\0&-5&-t\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}1&3&0\\0&-5&-t\\0&t-3&2\end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{\frac{1}{5}(t-3)r_2+r_3}\begin{bmatrix}1&3&0\\0&-5&-t\\0&0&2-\frac{1}{5}(t-3)t\end{bmatrix},$$

由此知 $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)<3$ 当且仅当 $2-\frac{1}{5}(t-3)t=0$, 即 $t^2-3t-10=0$, 亦即 $t=5$ 或 $t=-2$.

5. 设向量组 $\beta_1=(1,3,2,a)^{\mathrm{T}}$, $\beta_2=(2,7,a,3)^{\mathrm{T}}$, $\beta_3=(0,a,5,1)^{\mathrm{T}}$ 线性无关, 求 a 的值.

解: β_1,β_2,β_3 线性无关当且仅当 $R(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=3$. 而

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{bmatrix}1&2&0\\3&7&a\\2&a&5\\a&3&1\end{bmatrix}\xrightarrow[-ar_1+r_4]{\substack{-3r_1+r_2\\-2r_1+r_3}}\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&a\\0&a-4&5\\0&3-2a&1\end{bmatrix}\xrightarrow[-(3-2a)r_2+r_4]{-(a-4)r_2+r_3}\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&a\\0&0&5-a(a-4)\\0&0&1-a(3-2a)\end{bmatrix},$$

由此知 $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$ 当且仅当 $5-a(a-4)$ 与 $1-a(3-2a)$ 不同时为零, 而 $5-a(a-4)=0$, 即 $a=5$ 或 $a=-1$, $1-a(3-2a)=0$ 即 $a=1$ 或 $a=\frac{1}{2}$, 因此对于任意 a, 有 $5-a(a-4)$ 与 $1-a(3-2a)$ 不会同时为零, 从而对于一切的 a, 都有 β_1,β_2,β_3 线性无关.

6. 判断下列命题的正确性(正确的, 请给出证明; 错误的, 请举出反例)

1) 如果 $k_1=k_2=\cdots=k_s=0$ 时, 有 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=\mathbf{0}$, 那么 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关;

2) 如果只有当 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 全为零时, 等式

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s+k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_s\beta_s=\mathbf{0}$$

才能成立, 那么 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关; $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 也线性无关.

3) 如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关, $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 也线性相关, 则有不全为零的一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$, 使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=\mathbf{0}$ 与 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_s\beta_s=\mathbf{0}$ 同时成立;

4) 如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关, α_{s+1} 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示, 那么 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\alpha_{s+1}$ 线性无关;

5) 如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关, 那么其中每一个向量都可由其余的向量线性表示;

6) 如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关, 那么其中任何一个向量都不能由其余向量线性表示.

解: 1) 命题是错误的. 反例: 任取 α_1, 令 $\alpha_2=-\alpha_1$. 则 $k_1=k_2=0$ 时, 有 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=\mathbf{0}$, 但 α_1,α_2 线性相关;

2) 命题是错误的. 反例: 令 $\alpha_1=\alpha_2=e_1$, $\beta_1=\mathbf{0}$, $\beta_2=e_2-e_1$. 只有当 k_1,k_2 全为零时, 等式 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_1\beta_1+k_2\beta_2=\mathbf{0}$ 才能成立, 因为此时 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_1\beta_1+k_2\beta_2=k_1(\alpha_1+\beta_1)+k_2(\alpha_2+\beta_2)=k_1e_1+k_2e_2$, 而 e_1,e_2 线性无关. 但 α_1,α_2 线性相关, β_1,β_2 也线性相关;

3) 命题是错误的. 反例: 令 $\alpha_1=\alpha_2=e_1$, $\beta_1=\mathbf{0}$, $\beta_2=e_1-e_2$. 则 α_1,α_2 线性相关, β_1,β_2 也线性相关. 但不存在不全为零的数 k_1,k_2, 使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=\mathbf{0}$ 与 $k_1\beta_1+k_2\beta_2=\mathbf{0}$ 同时成立, 因为否

则 $k_1(\alpha_1-\beta_1)+k_2(\alpha_2-\beta_2)=k_1e_1+k_2e_2=\mathbf{0}$, 由 e_1,e_2 线性无关知, $k_1=k_2=0$, 矛盾;

4) 命题是正确的. 反证法. 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\alpha_{s+1}$ 线性相关, 则存在不全为零的数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s,\lambda_{s+1}$, 使得 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_s\alpha_s+\lambda_{s+1}\alpha_{s+1}=\mathbf{0}$, 此时必定有 $\lambda_{s+1}\neq 0$. 因为若不然, 则由 $\lambda_{s+1}=0$ 知, $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_s\alpha_s=\mathbf{0}$, 而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关, 故推出 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_s=0$, 与 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s,\lambda_{s+1}$ 不全为零矛盾. 因此, $\alpha_{s+1}=-\frac{\lambda_1}{\lambda_{s+1}}\alpha_1-\frac{\lambda_2}{\lambda_{s+1}}\alpha_2-\cdots-\frac{\lambda_s}{\lambda_{s+1}}\alpha_s$, 即 α_{s+1} 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示, 矛盾. 所以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\alpha_{s+1}$ 线性无关;

5) 命题是错误的. 反例: 取 $\alpha_1\neq\mathbf{0}$, $\alpha_2=\mathbf{0}$. 则 α_1,α_2 线性相关, 但 α_1 不能由 α_2 线性表示;

6) 命题是正确的. 反证法. 若存在一个向量能由其余向量线性表示, 不妨设 α_s 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$ 线性表示, 即存在数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{s-1}$ 使得 $\alpha_s=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_{s-1}\alpha_{s-1}$, 则 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_{s-1}\alpha_{s-1}-\alpha_s=\mathbf{0}$, 由于数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{s-1},-1$ 不全为零, 所以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关, 矛盾. 所以其中任何一个向量都不能由其余向量线性表示.

7. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关, 试证 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 线性无关.

证明: 如果 $\lambda_1(\alpha_1+\alpha_2)+\lambda_2(\alpha_2+\alpha_3)+\lambda_3(\alpha_3+\alpha_1)=\mathbf{0}$, 即 $(\lambda_1+\lambda_3)\alpha_1+(\lambda_1+\lambda_2)\alpha_2+(\lambda_2+\lambda_3)\alpha_3=\mathbf{0}$, 则由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关知, $\lambda_1+\lambda_3=\lambda_1+\lambda_2=\lambda_2+\lambda_3=0$, 而这个三元齐次线性方程组的系数行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2\neq 0,$$

方程组只有零解, 即 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$, 所以 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 线性无关.

8. 设 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_3+\alpha_4,\beta_4=\alpha_4+\alpha_1$, 试证向量组 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 线性相关.

证明: 注意到 $\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2+\lambda_3\beta_3+\lambda_4\beta_4=\mathbf{0}$ 即 $(\lambda_1+\lambda_4)\alpha_1+(\lambda_1+\lambda_2)\alpha_2+(\lambda_2+\lambda_3)\alpha_3+(\lambda_3+\lambda_4)\alpha_4=\mathbf{0}$. 考察四元齐次线性方程组 $\lambda_1+\lambda_4=\lambda_1+\lambda_2=\lambda_2+\lambda_3=\lambda_3+\lambda_4=0$. 由于其系数行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{vmatrix}=0,$$

所以该方程组存在非零解, 从而存在不全为零的 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$, 使得 $\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2+\lambda_3\beta_3+\lambda_4\beta_4=\mathbf{0}$, 所以向量组 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 线性相关.

9. 设 $\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_1+\alpha_2,\cdots,\beta_r=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r$, 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关, 试证向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 也线性无关.

证明: 如果 $\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2+\cdots+\lambda_r\beta_r=\mathbf{0}$, 即 $(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_r)\alpha_1+(\lambda_2+\lambda_3+\cdots+\lambda_r)\alpha_2+\cdots+\lambda_r\alpha_r=\mathbf{0}$, 则由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关知, $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_r=\lambda_2+\lambda_3+\cdots+\lambda_r=\cdots=\lambda_r=0$, 而这个 r 元齐次线性方程组显然只有零解, 即 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_r=0$, 所以向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 也线性无关.

10. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是一组 n 维向量, 已知 n 维基本向量 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 能由它们线性表示, 试证 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关.

证明: 方法一. 反证法. 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性相关, 则至少有一个向量可以由其余 $n-1$ 个向量线性表示, 不妨设 α_n 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 线性表示, 则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 可以由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 线性表示, 由线性表示的传递性, 向量组 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 可以由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 线性表示, 由于 $n>n-1$, 则 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 线性相关, 这与 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 线性无关矛盾. 所以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关.

方法二. 向量组 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示, 显然向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 也能由向量组 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 线性表示, 所以两个向量组是等价的, 而等价向量组具有相同的秩, 基本向量组的秩为 n, 所以, 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的秩也为 n, 所以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关.

11. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是一组 n 维向量, 试证它们线性无关的充分必要条件是任一 n 维向量都可由它们线性表示.

证明: 必要性. 方法一. 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关, 令 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$, 则 $|A|\neq 0$, A 可逆, 对于任一 n 维向量 α, 线性方程组 $Ax=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\alpha$ 有唯一解 $x=A^{-1}\alpha$, 即 α 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 唯一线性表示.

方法二. 对于任一 n 维向量 α, 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\alpha$ 是 $n+1$ 个 n 维向量, 必定线性相关, 而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关, 则 α 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 唯一线性表示.

充分性. 若任一 n 维向量都可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示, 则 n 维基本向量 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示, 由上一题知 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关.

12. 设向量 β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示, 但不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{r-1}$ 线性表示, 试证向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{r-1},\beta$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{r-1},\alpha_r$ 等价.

证明: 一方面, 向量 β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示, 所以, 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{r-1},\beta$ 可以由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{r-1},\alpha_r$ 线性表示.

另一方面, 由于向量 β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示, 所以, 存在数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$, 使得 $\beta=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_r\alpha_r$, 又由 β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{r-1}$ 线性表示知, $\lambda_r\neq 0$, 所以, $\alpha_r=-\frac{\lambda_1}{\lambda_r}\alpha_1-\frac{\lambda_2}{\lambda_r}\alpha_2-\cdots-\frac{\lambda_{r-1}}{\lambda_r}\alpha_{r-1}+\frac{1}{\lambda_r}\beta$, 即 α_r 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{r-1},\beta$ 线性表示, 进而, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{r-1},\alpha_r$ 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{r-1},\beta$ 线性表示.

因此, 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{r-1},\beta$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{r-1},\alpha_r$ 可以相互线性表示, 因而等价.

13. 设非零向量 β 可以由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示, 试证表示法唯一的充分必要条件是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关.

证明: 由于非零向量 β 可以由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示, 则非齐次线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_r\alpha_r=\beta$ 有解, 进而 $R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)=R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta)$.

所以, 非零向量 β 可以由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 唯一线性表示, 当且仅当非齐次线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_r\alpha_r=\beta$ 有唯一解, 继而等价于 $R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)=r$, 所以等价于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关.

14. 对于任一矩阵 A, 证明: A 的列(行)向量组线性无关的充分必要条件是 A 为列(行)满秩矩阵.

证明: 记 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, A 的列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$, 行向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$. A 的列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关当且仅当 $R(A)=R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=n$, 即 A 为列满秩矩阵.

A 的行向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性无关当且仅当 转置的列向量组 $\beta_1^{\mathrm{T}},\beta_2^{\mathrm{T}},\cdots,\beta_m^{\mathrm{T}}$ 线性无关. 由前面的证明知, 即当且仅当 $A^{\mathrm{T}}=(\beta_1^{\mathrm{T}},\beta_2^{\mathrm{T}},\cdots,\beta_m^{\mathrm{T}})$ 为列满秩矩阵, 亦即当且仅当 A 为行满秩矩阵.

习题4.2(B)

1. 已知 $\alpha_1=(1,2,3,2)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_2=(1,1,3,-a)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_3=(3,5,8,2)^{\mathrm{T}}$, $\beta=(3,3,b,-6)^{\mathrm{T}}$, 试问当 a,b 为何值时, β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示, 并写出表示式.

解: β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示, 当且仅当非齐次线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$ 有解, 也等价于 $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta)$. 而

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta)=\begin{bmatrix}1&1&3&3\\2&1&5&3\\3&3&8&b\\2&-a&2&-6\end{bmatrix}\xrightarrow[-2r_1+r_4]{\substack{-2r_1+r_2\\-3r_1+r_3}}\begin{bmatrix}1&1&3&3\\0&-1&-1&-3\\0&0&-1&b-9\\0&-a-2&-4&-12\end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{-(a+2)r_2+r_4}\begin{bmatrix}1&1&3&3\\0&-1&-1&-3\\0&0&-1&b-9\\0&0&a-2&3a-6\end{bmatrix}\xrightarrow{(a-2)r_3+r_4}\begin{bmatrix}1&1&3&3\\0&-1&-1&-3\\0&0&-1&b-9\\0&0&0&(a-2)(b-6)\end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow[2r_3+r_1]{r_2+r_1}\begin{bmatrix}1&0&0&2b-18\\0&-1&-1&-3\\0&0&-1&b-9\\0&0&0&(a-2)(b-6)\end{bmatrix}\xrightarrow{-r_3+r_2}\begin{bmatrix}1&0&0&2b-18\\0&-1&0&6-b\\0&0&-1&b-9\\0&0&0&(a-2)(b-6)\end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow[r_3\times(-1)]{r_2\times(-1)}\begin{bmatrix}1&0&0&2b-18\\0&1&0&b-6\\0&0&1&9-b\\0&0&0&(a-2)(b-6)\end{bmatrix},$$

由此知 $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta)$ 当且仅当 $(a-2)(b-6)=0$. 所以当 $a=2$ 时, 对于任意的 b, $\beta=(2b-18)\alpha_1+(b-6)\alpha_2+(9-b)\alpha_3$; 或者当 $b=6$ 时, 对于任意的 a, $\beta=-6\alpha_1+3\alpha_3$.

2. 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关, 若 $\alpha_1+2\alpha_2,2\alpha_2+a\alpha_3,3\alpha_3+2\alpha_1$ 线性相关, 求 a 的值.

解: $\alpha_1+2\alpha_2,2\alpha_2+a\alpha_3,3\alpha_3+2\alpha_1$ 线性相关, 即存在不全为零的数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$, 使得 $\lambda_1(\alpha_1+2\alpha_2)+\lambda_2(2\alpha_2+a\alpha_3)+\lambda_3(3\alpha_3+2\alpha_1)=\mathbf{0}$, 也即 $(\lambda_1+2\lambda_3)\alpha_1+(2\lambda_1+2\lambda_2)\alpha_2+(a\lambda_2+3\lambda_3)\alpha_3=\mathbf{0}$, 由于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关, 所以得到三元齐次线性方程组 $\lambda_1+2\lambda_3=2\lambda_1+2\lambda_2=a\lambda_2+3\lambda_3=0$ 有非零解,

等价于系数行列式 $|A|=0$. 而

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & a & 3 \end{vmatrix}=6+4a,$$

所以, $a=-\frac{3}{2}$.

3. 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关, $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关, 试证 α_1 可以由 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示, α_4 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

证明: 由 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关知, α_2,α_3 线性无关, 而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关, 所以 α_1 可以由 α_2,α_3 线性表示, 进而 α_1 可以由 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示.

假设 α_4 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示, 前面已经证明 α_1 可以由 α_2,α_3 线性表示, 所以 α_4 能由 α_2,α_3 线性表示, 则 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关, 推出矛盾. 所以, α_4 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

4. 已知 A 是 n 阶可逆矩阵, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是 n 维线性无关的列向量, 试证 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$ 线性无关.

证明: $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$ 线性无关当且仅当 $R(A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s)=s$. 而由于 A 是可逆矩阵, 有 $R(A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s)=R(A(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s))=R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$, 再由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是 n 维线性无关的列向量知, $R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=s$, 所以得出 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$ 线性无关.

5. 已知 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示, 但不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$ 线性表示, 试证 α_s 能由 $\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$ 线性表示, 但不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$ 线性表示.

证明: 由于向量 β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示, 所以, 存在数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$, 使得 $\beta=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_s\alpha_s$, 又由 β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$ 线性表示知, $\lambda_s\neq 0$, 所以, $\alpha_s=\frac{1}{\lambda_s}\beta-\frac{\lambda_1}{\lambda_s}\alpha_1-\frac{\lambda_2}{\lambda_s}\alpha_2-\cdots-\frac{\lambda_{s-1}}{\lambda_s}\alpha_{s-1}$, 即 α_s 可以由 $\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$ 线性表示.

假设 α_s 能够由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$ 线性表示, 则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$ 线性表示, 进而向量 β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$ 线性表示, 矛盾. 所以, α_s 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$ 线性表示.

6. 已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m(m>1)$ 线性无关, 且 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m$, 试证向量组 $\beta-\alpha_1,\beta-\alpha_2,\cdots,\beta-\alpha_m$ 线性无关.

证明: 注意到矩阵

$$(\beta-\alpha_1,\beta-\alpha_2,\cdots,\beta-\alpha_m)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}=:(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)C.$$

因为

$$|C|=\begin{vmatrix}0&1&\cdots&1\\1&0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}m-1&m-1&\cdots&m-1\\1&0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&0\end{vmatrix}=(m-1)\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\1&0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&0\end{vmatrix}$$

$$=(m-1)\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\0&-1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&-1\end{vmatrix}=(-1)^{m-1}(m-1)\neq 0,$$

所以, 矩阵 C 可逆, 进而 $R(\beta-\alpha_1,\beta-\alpha_2,\cdots,\beta-\alpha_m)=R((\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)C)=R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$, 再由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关知, $R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=m$, 所以 $R(\beta-\alpha_1,\beta-\alpha_2,\cdots,\beta-\alpha_m)=m$, 因此, $\beta-\alpha_1,\beta-\alpha_2,\cdots,\beta-\alpha_m$ 线性无关.

7. 设 A 是 n 阶方阵, x 是 n 维列向量, 若对某一自然数 m, 有 $A^{m-1}x\neq\mathbf{0},A^mx=\mathbf{0}$, 试证向量组 $x,Ax,\cdots,A^{m-1}x$ 线性无关.

证明: 由 $A^mx=\mathbf{0}$ 知, 对于任意 $k\geq m$, 有 $A^kx=\mathbf{0}$. 如果数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 使得 $\lambda_1x+\lambda_2Ax+\cdots+\lambda_mA^{m-1}x=\mathbf{0}$, 两边左乘 A^{m-1}, 得出 $\lambda_1A^{m-1}x=\mathbf{0}$, 而 $A^{m-1}x\neq\mathbf{0}$, 所以 $\lambda_1=0$; 进而 $\lambda_2Ax+\cdots+\lambda_mA^{m-1}x=\mathbf{0}$, 再两边左乘 A^{m-2}, 得出 $\lambda_2A^{m-1}x=\mathbf{0}$, 因此 $\lambda_2=0$. 因而可以类似递推得到 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_m=0$, 所以向量组 $x,Ax,\cdots,A^{m-1}x$ 线性无关.

4.3 习题4.3

习题4.3(A)

1. 利用初等变换, 求下列矩阵的列向量组的一个极大无关组:

1) $\begin{bmatrix}25&31&17&43\\75&94&53&132\\75&94&54&134\\25&32&20&48\end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\2&0&3&-1&3\\1&1&0&4&-1\end{bmatrix}$.

解: 1) 利用初等行变换化成行阶梯形矩阵

$$\begin{bmatrix}25&31&17&43\\75&94&53&132\\75&94&54&134\\25&32&20&48\end{bmatrix}\xrightarrow[-3r_1+r_2]{\substack{-r_1+r_4\\-r_2+r_3}}\begin{bmatrix}25&31&17&43\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&1&3&5\end{bmatrix}\xrightarrow[-r_3+r_4]{-r_2+r_4}\begin{bmatrix}25&31&17&43\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

非零行首个非零元所在的列为第 $1,2,3$ 列, 显然有一个三阶子式值不为零, 所以, 第 $1,2,3$ 列为矩阵的列向量组的一个极大无关组.

2) 利用初等行变换化成行阶梯形矩阵

$$\begin{bmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\2&0&3&-1&3\\1&1&0&4&-1\end{bmatrix}\xrightarrow[-2r_1+r_3]{-r_1+r_4}\begin{bmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\0&-2&-1&-5&1\\0&0&-2&2&-2\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3\leftrightarrow r_4]{r_2+r_3}\begin{bmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\0&0&-2&2&-2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

非零行首个非零元所在的列为第 $1,2,3$ 列, 显然有一个三阶子式值不为零, 所以, 第 $1,2,3$ 列为矩阵的列向量组的一个极大无关组.

2. 利用初等变换求下列矩阵的秩和行向量组的一个极大无关组:

1) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$.

解: 1) 方法一. 利用初等行变换化成行阶梯形矩阵

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[-3r_1+r_2]{-r_1+r_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & 5 \\ 0 & 4 & -6 & 5 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{-r_2+r_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

矩阵秩为 2. 非零行为第 1,2 行, 所以, 第 1,2 行向量为矩阵的行向量组的一个极大无关组. 注意到任意两行都有一个二阶子式值不为零, 所以任意两个行向量都是行向量组的一个极大无关组.

方法二. 将矩阵转置后, 利用初等行变换化成行阶梯形矩阵

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[-2r_1+r_4]{-3r_1+r_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow[-4r_4+r_2]{-2r_4+r_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

矩阵秩为 2. 任意两列都有一个二阶子式值不为零, 所以转置矩阵的任意两个列向量都是转置矩阵的列向量组的一个极大无关组, 即原矩阵任意两个行向量都是行向量组的一个极大无关组.

2) 方法一. 利用初等行变换化成行阶梯形矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-r_1+r_4]{-2r_1+r_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2+r_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

矩阵秩为 3. 非零行为第 1,2,3 行, 是原矩阵的第 1,2,4 行, 所以, 第 1,2,4 行向量为矩阵的行向量组的一个极大无关组. 极大无关组必含第 4 行向量 α_4, 因为 $2\alpha_1 - \alpha_2 = \alpha_3$, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.

方法二. 将矩阵转置后, 利用初等行变换化成行阶梯形矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-r_1+r_4]{-r_1+r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[-2r_1+r_4]{-2r_1+r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-5r_3+r_4]{-2r_3+r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3+r_5]{r_2+r_5} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2 \leftrightarrow r_3]{-3r_2+r_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

矩阵秩为 3. 第 $1,2,4$ 列有一个三阶子式值不为零, 所以转置矩阵的第 $1,2,4$ 列向量是转置矩阵的列向量组的一个极大无关组, 即原矩阵第 $1,2,4$ 行向量是行向量组的一个极大无关组. 极大无关组必含第 4 行向量 α_4, 因为显然 $2\alpha_1^{\mathrm{T}} - \alpha_2^{\mathrm{T}} = \alpha_3^{\mathrm{T}}$, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.

3. 求下列向量组的秩, 并求一个极大无关组:

1) $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} a \\ 100 \\ 10 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \\ -8 \end{bmatrix}$;

2) $\beta_1 = (1,2,1,3), \beta_2 = (4,-1,-5,-6), \beta_3 = (1,-3,-4,-7)$.

解: 1) 利用初等行变换化成行阶梯形矩阵

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{bmatrix} 1 & a & -2 \\ 2 & 100 & -4 \\ -1 & 10 & 2 \\ 4 & 4 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow[-2r_1+r_2]{\substack{-r_1+r_3 \\ -2r_2+r_4}} \begin{bmatrix} 1 & a & -2 \\ 0 & 100-2a & 0 \\ 0 & 10+a & 0 \\ 0 & -196 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{10+a}{196}r_4+r_3]{\frac{100-2a}{196}r_4+r_2} \begin{bmatrix} 1 & a & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -196 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_4} \begin{bmatrix} 1 & a & -2 \\ 0 & -196 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2$, 非零行首个非零元所在的列为第 $1,2$ 列, 所以, 第 $1,2$ 列向量即 α_1, α_2 为向量组的一个极大无关组.

2) 利用初等行变换化成行阶梯形矩阵

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -5 & -6 \\ 1 & -3 & -4 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow[-4r_1+r_2]{-r_1+r_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -9 & -9 & -18 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{5}{9}r_2+r_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -9 & -9 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$R(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = 2$, 非零行为第 $1,2$ 行, 所以, 第 $1,2$ 行向量即 β_1, β_2 为向量组的一个极大无关组.

4. 求向量组

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \ \alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}, \ \alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \alpha_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ -7 \end{bmatrix}, \ \alpha_5 = \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

的秩和一个极大无关组, 并将该极大无关组以外的向量表成极大无关组的线性组合.

解: 利用初等行变换化成行最简形矩阵

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{bmatrix}1&2&0&2&5\\-2&-5&1&-1&-8\\0&-3&3&4&1\\3&6&0&-7&2\end{bmatrix}\xrightarrow[-3r_1+r_4]{2r_1+r_2}\begin{bmatrix}1&2&0&2&5\\0&-1&1&3&2\\0&-3&3&4&1\\0&0&0&-13&-13\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-3r_2+r_3}\begin{bmatrix}1&2&0&2&5\\0&-1&1&3&2\\0&0&0&-5&-5\\0&0&0&-13&-13\end{bmatrix}\xrightarrow[13r_3+r_4]{\substack{r_3\times(-\frac{1}{5})\\ r_2\times(-1)}}\begin{bmatrix}1&2&0&2&5\\0&1&-1&-3&-2\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-2r_3+r_1]{3r_3+r_2}\begin{bmatrix}1&2&0&0&3\\0&1&-1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{-2r_2+r_1}\begin{bmatrix}1&0&2&0&1\\0&1&-1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=3$, 非零行首个非零元所在的列为第 $1,2,4$ 列, 所以, 第 $1,2,4$ 列向量即 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 为向量组的一个极大无关组, 且 $\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2$, $\alpha_5=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4$.

5. 设 $\beta_1=\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_m$, $\beta_2=\alpha_1+\alpha_3+\cdots+\alpha_m$, $\cdots$, $\beta_m=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{m-1}$, 试证 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 有相同的秩.

证明: 首先, 显然向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示. 其次, 注意到 $\beta_1=(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m)-\alpha_1$, $\beta_2=(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m)-\alpha_2$, $\cdots$, $\beta_m=(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m)-\alpha_m$, 所以 $\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_m=(m-1)(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m)$, 即 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m=\frac{1}{m-1}(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_m)$, 因此, $\alpha_1=(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m)-\beta_1=\frac{1}{m-1}(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_m)-\beta_1=-\frac{m-2}{m-1}\beta_1+\frac{1}{m-1}\beta_2+\cdots+\frac{1}{m-1}\beta_m$, $\alpha_2=(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m)-\beta_2=\frac{1}{m-1}(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_m)-\beta_2=\frac{1}{m-1}\beta_1-\frac{m-2}{m-1}\beta_2+\cdots+\frac{1}{m-1}\beta_m$, $\cdots$, $\alpha_m=(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m)-\beta_m=\frac{1}{m-1}(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_m)-\beta_m=\frac{1}{m-1}\beta_1+\frac{1}{m-1}\beta_2+\cdots-\frac{m-2}{m-1}\beta_m$, 所以向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 可由向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性表示. 故两个向量组等价, 因而有相同的秩.

6. 设向量组 I: $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的秩为 r_1, 向量组 Ⅱ: $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 的秩为 r_2, 向量组 Ⅲ: $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$, $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 的秩为 r_3, 试证 $\max\{r_1,r_2\}\le r_3\le r_1+r_2$.

证明: 由于向量组 I 可由向量组 Ⅲ 线性表示, 所以 $r_1\le r_3$; 同样由于向量组 Ⅱ 也可由向量组 Ⅲ 线性表示, 所以 $r_2\le r_3$; 因此, $\max\{r_1,r_2\}\le r_3$.

取向量组 I 的一个极大无关组 I_0 : $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_{r_1}}$, 取向量组 Ⅱ 的一个极大无关组 II_0 : $\beta_{j_1},\beta_{j_2},\cdots,\beta_{j_{r_2}}$. 合并这两个向量组为向量组 $\mathrm{III}_0: \alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_{r_1}},\beta_{j_1},\beta_{j_2},\cdots,\beta_{j_{r_2}}$.

由于向量组 I 可由向量组 I_0 线性表示, 向量组 I_0 可由向量组 III_0 线性表示, 所以向量组 I 可由向量组 III_0 线性表示; 同样, 由于向量组 Ⅱ 可由向量组 II_0 线性表示, 向量组 II_0 可由向量组 III_0 线性表示, 所以向量组 Ⅱ 可由向量组 III_0 线性表示. 因此, 向量组 Ⅲ 可由向量组 III_0 线性表示, 进而, $r_3\le R(\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_{r_1}},\beta_{j_1},\beta_{j_2},\cdots,\beta_{j_{r_2}})\le r_1+r_2$.

因此, 得证 $\max\{r_1, r_2\} \le r_3 \le r_1 + r_2$.

7. 设向量组 I: $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ 能由向量组 Ⅱ: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表示为

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)K,$$

其中 K 为 $s \times r$ 矩阵, 且向量组 Ⅱ 线性无关, 试证向量组 I 线性无关的充分必要条件是 $R(K) = r$.

证明: 必要性. 设向量组 I 线性无关. 由于向量组 I 可由向量组 Ⅱ 线性表示, 所以 $r \le s$, 进而 $R(K) \le r$. 若 $R(K) < r$, 则齐次线性方程组 $Kx = \mathbf{0}$ 有非零解 x^*, 进而 $(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r)x^* = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)Kx^* = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)\mathbf{0} = \mathbf{0}$, 所以, 向量组 I 线性相关, 推出矛盾. 因此, $R(K) = r$.

充分性. 设 $R(K) = r$. 考虑齐次方程组 $(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r)x = \mathbf{0}$ 是否只有零解. 此方程即为 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)Kx = \mathbf{0}$, 由于向量组 Ⅱ 线性无关, 所以, $Kx = \mathbf{0}$, 再由 $R(K) = r$ 知, $x = \mathbf{0}$, 所以齐次方程组 $(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r)x = \mathbf{0}$ 只有零解, 即向量组 I 线性无关.

8. 设 A 为 n 阶方阵, 且 $A^2 = A$, 试证 $R(A) + R(A - E) = n$.

证明: 由 $A^2 = A$ 知, $A(A - E) = O$, 所以 $R(A) + R(A - E) \le n$. 往证 $R(A) + R(A - E) \ge n$. 因为 $R(A) + R(E - A) \ge R(A + E - A) = R(E) = n$, 而 $R(E - A) = R(A - E)$, 所以 $R(A) + R(A - E) \ge n$. 故 $R(A) + R(A - E) = n$.

9. 设 A 为 n 阶方阵, 且 $A^2 = E$, 试证 $R(A + E) + R(A - E) = n$.

证明: 由 $A^2 = E$ 知, $(A + E)(A - E) = O$, 所以 $R(A + E) + R(A - E) \le n$. 往证 $R(A + E) + R(A - E) \ge n$. 因为 $R(A + E) + R(E - A) \ge R(A + E + E - A) = R(2E) = n$, 而 $R(E - A) = R(A - E)$, 所以 $R(A + E) + R(A - E) \ge n$. 故 $R(A + E) + R(A - E) = n$.

习题4.3(B)

1. 已知向量组

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{bmatrix},\ \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ 1 \end{bmatrix},\ \alpha_3 = \begin{bmatrix} t \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

的秩是 2, 求 t 的值.

解: 利用初等行变换化成行阶梯形矩阵

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-tr_1+r_3]{-r_1+r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & t \\ 0 & t-1 & 1-t \\ 0 & 1-t & 1-t^2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-r_2+r_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & t \\ 0 & t-1 & 1-t \\ 0 & 0 & 2-t-t^2 \end{bmatrix},$$

由于秩为 2, 所以 $2 - t - t^2 = 0$ 且 $t \ne 1$, 所以, $t = -2$.

2. 已知向量组

$$\beta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \beta_2 = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},\ \beta_3 = \begin{bmatrix} b \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

与向量组

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\-3\\2\end{bmatrix},\ \alpha_2=\begin{bmatrix}3\\1\\0\end{bmatrix},\ \alpha_3=\begin{bmatrix}9\\-7\\6\end{bmatrix}$$

具有相同的秩, 且 β_3 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示, 求 a,b 的值.

解: 利用初等行变换化成行阶梯形矩阵

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{bmatrix}1&3&9\\-3&1&-7\\2&0&6\end{bmatrix}\xrightarrow[-2r_1+r_3]{3r_1+r_2}\begin{bmatrix}1&3&9\\0&10&20\\0&-6&-12\end{bmatrix}\xrightarrow{\frac{3}{5}r_2+r_3}\begin{bmatrix}1&3&9\\0&10&20\\0&0&0\end{bmatrix},$$

所以向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的秩为 2. 再利用初等行变换化成行阶梯形矩阵

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{bmatrix}0&a&b\\-1&1&0\\1&2&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{bmatrix}0&a&b\\0&3&1\\1&2&1\end{bmatrix}\xrightarrow[-\frac{a}{3}r_2+r_3]{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}1&2&1\\0&3&1\\0&0&b-\frac{a}{3}\end{bmatrix},$$

由条件和前面结论知向量组 β_1,β_2,β_3 的秩为 2, 所以 $b-\frac{a}{3}=0$, 即 $a=3b$. 利用初等行变换化成行阶梯形矩阵

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_3)=\begin{bmatrix}1&3&9&b\\-3&1&-7&0\\2&0&6&1\end{bmatrix}\xrightarrow[-2r_1+r_3]{3r_1+r_2}\begin{bmatrix}1&3&9&b\\0&10&20&3b\\0&-6&-12&1-2b\end{bmatrix}\xrightarrow{\frac{3}{5}r_2+r_3}\begin{bmatrix}1&3&9&b\\0&10&20&3b\\0&0&0&1-\frac{b}{5}\end{bmatrix},$$

由 β_3 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示知, 上述矩阵的秩为 2, 所以, $1-\frac{b}{5}=0$, 即 $b=5$. 所以 $a=15,b=5$.

3. 设向量组

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\3\end{bmatrix},\ \alpha_2=\begin{bmatrix}-1\\-3\\5\\1\end{bmatrix},\ \alpha_3=\begin{bmatrix}3\\2\\7\\p+2\end{bmatrix},\ \alpha_4=\begin{bmatrix}-2\\-6\\10\\p\end{bmatrix},\ \alpha=\begin{bmatrix}4\\1\\14\\10\end{bmatrix},$$

1) p 为何值时, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关? 并在此时将向量 α 用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示;

2) p 为何值时, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关? 并在此时求出它的秩和一个极大无关组.

解: 利用初等行变换化成行阶梯形矩阵

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha)=\begin{bmatrix}1&-1&3&-2&4\\1&-3&2&-6&1\\1&5&7&10&14\\3&1&p+2&p&10\end{bmatrix}\xrightarrow[-3r_1+r_4]{\substack{-r_1+r_2\\-r_1+r_3}}\begin{bmatrix}1&-1&3&-2&4\\0&-2&-1&-4&-3\\0&6&4&12&10\\0&4&p-7&p+6&-2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[2r_2+r_4]{3r_2+r_3}\begin{bmatrix}1&-1&3&-2&4\\0&-2&-1&-4&-3\\0&0&1&0&1\\0&0&p-9&p-2&-8\end{bmatrix}\xrightarrow{-(p-9)r_3+r_4}\begin{bmatrix}1&-1&3&-2&4\\0&-2&-1&-4&-3\\0&0&1&0&1\\0&0&0&p-2&1-p\end{bmatrix},$$

1) 当 $p\neq 2$ 时, 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩为 4, 因此向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关. 进一步利用初等行变换化成行最简形矩阵

$$\text{上式}\xrightarrow[-3r_3+r_1]{\substack{r_4\times\frac{1}{p-2}\\-r_3+r_2}}\begin{bmatrix}1&-1&0&-2&1\\0&-2&0&-4&-2\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&\frac{1-p}{p-2}\end{bmatrix}\xrightarrow[-2r_4+r_2]{\substack{r_2\times(-\frac{1}{2})\\r_2+r_1}}\begin{bmatrix}1&0&0&0&2\\0&1&0&0&\frac{3p-4}{p-2}\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&\frac{1-p}{p-2}\end{bmatrix},$$

所以, $\alpha=2\alpha_1+\frac{3p-4}{p-2}\alpha_2+\alpha_3+\frac{1-p}{p-2}\alpha_4$.

2) 当 $p=2$ 时, 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关($\alpha_4=2\alpha_2$), 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩为 3, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为一个极大无关组.

4. 已知向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中的每个向量均可由向量组 $A_0:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示, 且表示法唯一, 试证 A_0 是向量组 A 的一个极大无关组.

证明: 若 A_0 线性相关, 则 A_0 中存在一个向量可由 A_0 中其余向量线性表示, 不妨设为 α_r, 即存在数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{r-1}$, 使得 $\alpha_r=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_{r-1}\alpha_{r-1}$, 又由于 $\alpha_r=\alpha_r$, 但 α_r 是向量组 A 中的向量, 可由向量组 A_0 线性表示, 表示法唯一, 矛盾. 所以 A_0 线性无关. 再结合向量组 A 中的每个向量均可由向量组 A_0 线性表示的事实, 则推出 A_0 是向量组 A 的一个极大无关组.

4.4 习题4.4

习题4.4(A)

1. 求下列齐次线性方程组的基础解系, 并写出通解:

1) $\begin{cases}3x_1-5x_2+x_3-2x_4=0,\\2x_1+3x_2-5x_3+x_4=0,\\-x_1+7x_2-4x_3+3x_4=0,\\4x_1+15x_2-7x_3+9x_4=0;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x_1-8x_2+10x_3+2x_4=0,\\2x_1+4x_2+5x_3-x_4=0,\\3x_1+8x_2+6x_3-2x_4=0.\end{cases}$

解: 1) 利用初等行变换化系数矩阵成行最简形矩阵

$$\begin{bmatrix}3&-5&1&-2\\2&3&-5&1\\-1&7&-4&3\\4&15&-7&9\end{bmatrix}\xrightarrow[r_1\times(-1)]{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}1&-7&4&-3\\2&3&-5&1\\3&-5&1&-2\\4&15&-7&9\end{bmatrix}\xrightarrow[-4r_1+r_4]{\substack{-2r_1+r_2\\-3r_1+r_3}}\begin{bmatrix}1&-7&4&-3\\0&17&-13&7\\0&16&-11&7\\0&43&-23&21\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-43r_2+r_4]{\substack{-r_3+r_2\\-16r_2+r_3}}\begin{bmatrix}1&-7&4&-3\\0&1&-2&0\\0&0&21&7\\0&0&63&21\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3\times\frac{1}{7}\\3r_3+r_1}]{\substack{-3r_3+r_4\\7r_2+r_1}}\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&1&-2&0\\0&0&3&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

因为 $R(A)=3$, $n-R(A)=4-3=1$, 所以基础解系只含有 1 个解向量. 选 x_3 为自由未知量, 此时, 同解方程组为

$$\begin{cases}x_1=x_3,\\x_2=2x_3,\\x_4=-3x_3.\end{cases}$$

取 $x_3=1$, 解得 $x_1=1,x_2=2,x_4=-3$, 即得到一个基础解系和通解分别为

$$\xi=\begin{bmatrix}1\\2\\1\\-3\end{bmatrix},\quad x=k\begin{bmatrix}1\\2\\1\\-3\end{bmatrix},\quad \text{其中 } k \text{ 为任意常数.}$$

2) 利用初等行变换化系数矩阵成行最简形矩阵

$$\begin{bmatrix}1&-8&10&2\\2&4&5&-1\\3&8&6&-2\end{bmatrix}\xrightarrow[-3r_1+r_3]{-2r_1+r_2}\begin{bmatrix}1&-8&10&2\\0&20&-15&-5\\0&32&-24&-8\end{bmatrix}\xrightarrow[-8r_2+r_3]{r_2\times\frac{1}{5}}\begin{bmatrix}1&-8&10&2\\0&4&-3&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2\times(-1)]{2r_2+r_1}\begin{bmatrix}1&0&4&0\\0&-4&3&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

因为 $R(A)=2, n-R(A)=4-2=2$, 所以基础解系含有 2 个解向量. 选 x_2,x_3 为自由未知量, 此时, 同解方程组为

$$\begin{cases}x_1=-4x_3,\\ x_4=4x_2-3x_3.\end{cases}$$

令 $\begin{bmatrix}x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$, 分别解得 $\begin{bmatrix}x_1\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-4\\-3\end{bmatrix}$, 于是得到一个基础解系和通解分别为

$$\xi_1=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\4\end{bmatrix},\quad \xi_2=\begin{bmatrix}-4\\0\\1\\-3\end{bmatrix},\quad x=k_1\begin{bmatrix}0\\1\\0\\4\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-4\\0\\1\\-3\end{bmatrix},\quad \text{其中 } k_1,k_2 \text{ 为任意常数.}$$

2. 设矩阵

$$A=\begin{bmatrix}2&-2&1&3\\9&-5&2&8\end{bmatrix},$$

求一个 4×2 矩阵 B , 使 $AB=O$, 且 $R(B)=2$.

解: 先求齐次线性方程组 $Ax=\mathbf{0}$ 的一个基础解系. 利用初等行变换化系数矩阵成行最简形矩阵

$$\begin{bmatrix}2&-2&1&3\\9&-5&2&8\end{bmatrix}\xrightarrow{-2r_1+r_2}\begin{bmatrix}2&-2&1&3\\5&-1&0&2\end{bmatrix}\xrightarrow[2r_2+r_1]{r_2\times(-1)}\begin{bmatrix}-8&0&1&-1\\-5&1&0&-2\end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{bmatrix}-5&1&0&-2\\-8&0&1&-1\end{bmatrix},$$

因为 $R(A)=2, n-R(A)=4-2=2$, 所以基础解系含有 2 个解向量. 选 x_1,x_4 为自由未知量, 此时, 同解方程组为

$$\begin{cases}x_2=5x_1+2x_4,\\ x_3=8x_1+x_4.\end{cases}$$

令 $\begin{bmatrix}x_1\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$, 分别解得 $\begin{bmatrix}x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\8\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$, 于是得到一个基础解系为

$$\xi_1=\begin{bmatrix}1\\5\\8\\0\end{bmatrix},\quad \xi_2=\begin{bmatrix}0\\2\\1\\1\end{bmatrix},$$

以它们作为列向量的矩阵秩为 2, 且 $A(\xi_1,\xi_2)=(A\xi_1,A\xi_2)=(\mathbf{0},\mathbf{0})=O$, 所以

$$B=\begin{bmatrix}1&0\\5&2\\8&1\\0&1\end{bmatrix}.$$

3. 求一个齐次线性方程组, 使它的基础解系为 $\xi_1=(0,1,2,3)^{\mathrm{T}},\xi_2=(3,2,1,0)^{\mathrm{T}}$.

解: 注意到 $\xi_3=\frac{1}{3}(\xi_2-2\xi_1)=(1,0,-1,-2)^{\mathrm{T}}$ 也是该齐次线性方程组的解. 由 ξ_3,ξ_1 线性无关知, 它们也是一个基础解系. 选 x_1,x_2 为自由未知量, 容易看出同解方程组为

$$\begin{cases}x_3=-x_1+2x_2,\\ x_4=-2x_1+3x_2,\end{cases}$$

因此得到齐次线性方程组

$$\begin{cases}\ \ x_1-2x_2+x_3=0,\\ 2x_1-3x_2+x_4=0.\end{cases}$$

4. 设 4 元线性方程组

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0. \end{cases}$$

又已知齐次线性方程组 (Ⅱ) 的通解为

$$x = k_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

问线性方程组 (I) 与 (Ⅱ) 是否有非零公共解?若有, 则求出非零公共解; 若没有, 则说明理由.

解: 注意到 $\xi_1 = (0,1,1,0)^{\mathrm{T}}, \xi_2 = (-1,2,2,1)^{\mathrm{T}}$ 是齐次线性方程组 (Ⅱ) 的一个基础解系. 注意到 $\xi_3 = \xi_2 - 2\xi_1 = (-1,0,0,1)^{\mathrm{T}}$ 也是齐次线性方程组 (Ⅱ) 的解. 由 ξ_1, ξ_3 线性无关知, 它们也是 (Ⅱ) 的一个基础解系. 选 x_3, x_4 为自由未知量, 容易看出 (Ⅱ) 的同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = -x_4, \\ x_2 = x_3, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x_1 + x_4 = 0, \\ x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

考虑齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_4 = 0, \\ x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

其解若存在即为线性方程组 (I) 与 (Ⅱ) 的公共解. 利用初等行变换化系数矩阵成行最简形矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[-r_2+r_4]{-r_1+r_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2+r_3]{-r_2+r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3\times(-1)]{r_3\leftrightarrow r_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

因为 $R(A) = 3$, $n - R(A) = 4 - 3 = 1$, 所以基础解系只含 1 个解向量. 选 x_4 为自由未知量, 此时, 同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = -x_4, \\ x_2 = x_4 \\ x_3 = x_4, \end{cases}$$

取 $x_4 = 1$, 解得 $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 1$, 即得到一个基础解系 $\xi = (-1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$, 线性方程组 (I) 与 (Ⅱ) 的公共解为 $x = k(-1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$, 其中 k 为任意常数, 进而线性方程组 (I) 与 (Ⅱ) 的非零公共解为

$$x = k \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{其中 } k \text{ 为任意非零常数.}$$

5. 设 4 元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 3, 已知 η_1, η_2, η_3 是它的三个解向量, 且

$$\eta_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \eta_2 + \eta_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix},$$

求该方程组的解.

解: 因为 $n-R(A)=4-3=1$, 所以对应的齐次线性方程组的基础解系只含 1 个解向量. 而 $\xi:=2\eta_1-(\eta_2+\eta_3)=(3,4,5,6)^{\mathrm{T}}$ 是对应的齐次线性方程组的一个非零解, 构成一个基础解系, 所以该非齐次线性方程组的通解为

$$x=k\xi+\eta_1=k\begin{bmatrix}3\\4\\5\\6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\3\\4\\5\end{bmatrix},$$

其中 k 为任意常数.

6. 求解下列非齐次线性方程组, 并写出它的一个解及对应的齐次线性方程组的一个基础解系:

1) $\begin{cases}x_1+\ \ x_2 \qquad\qquad\quad =5,\\ 2x_1+\ \ x_2+\ \ x_3+2x_4=1,\\ 5x_1+3x_2+2x_3+2x_4=3;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x_1-5x_2+2x_3-3x_4=11,\\ 5x_1+3x_2+6x_3-\ \ x_4=-1,\\ 2x_1+4x_2+2x_3+\ \ x_4=-6.\end{cases}$

解: 1) 利用初等行变换化增广矩阵成行最简形矩阵

$$\begin{bmatrix}1&1&0&0&5\\2&1&1&2&1\\5&3&2&2&3\end{bmatrix}\xrightarrow[-5r_1+r_3]{-2r_1+r_2}\begin{bmatrix}1&1&0&0&5\\0&-1&1&2&-9\\0&-2&2&2&-22\end{bmatrix}\xrightarrow{-2r_2+r_3}\begin{bmatrix}1&1&0&0&5\\0&-1&1&2&-9\\0&0&0&-2&-4\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3+r_2]{\substack{r_2+r_1\\r_3+r_1}}\begin{bmatrix}1&0&1&0&-8\\0&-1&1&0&-13\\0&0&0&-2&-4\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3\times(-\frac{1}{2})]{r_2\times(-1)}\begin{bmatrix}1&0&1&0&-8\\0&1&-1&0&13\\0&0&0&1&2\end{bmatrix},$$

因为 $R(A)=3$, $n-R(A)=4-3=1$, 所以对应的齐次线性方程组的基础解系只含有 1 个解向量. 此时, 非齐次线性方程组同解方程组为

$$\begin{cases}x_1=-x_3-8,\\x_2=x_3+13,\\x_4=2.\end{cases}$$

取 $x_3=0$, 解得 $x_1=-8, x_2=13, x_4=2$, 即得到非齐次线性方程组的一个解向量 $\eta_0=(-8,13,0,2)^{\mathrm{T}}$. 选 x_3 为自由未知量, 对应的齐次线性方程组的同解方程组为

$$\begin{cases}x_1=-x_3,\\x_2=x_3,\\x_4=0.\end{cases}$$

取 $x_3=1$, 解得 $x_1=-1, x_2=1, x_4=2$, 即得到对应的齐次线性方程组的一个基础解系为 $\xi=(-1,1,1,0)^{\mathrm{T}}$. 所以非齐次线性方程组的通解为

$$x=k\xi+\eta_0=k\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-8\\13\\0\\2\end{bmatrix},\quad \text{其中 } k \text{ 为任意常数.}$$

2) 利用初等行变换化增广矩阵成行最简形矩阵

$$\begin{bmatrix}1&-5&2&-3&11\\5&3&6&-1&-1\\2&4&2&1&-6\end{bmatrix}\xrightarrow[-2r_1+r_3]{-5r_1+r_2}\begin{bmatrix}1&-5&2&-3&11\\0&28&-4&14&-56\\0&14&-2&7&-28\end{bmatrix}\xrightarrow{-2r_3+r_2}\begin{bmatrix}1&-5&2&-3&11\\0&0&0&0&0\\0&14&-2&7&-28\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2\times(-\frac{1}{2})]{\substack{r_2\leftrightarrow r_3\\r_2+r_1}}\begin{bmatrix}1&9&0&4&-17\\0&-7&1&-\frac{7}{2}&14\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

因为 $R(A)=2, n-R(A)=4-2=2$, 所以对应的齐次线性方程组的基础解系含有 2 个解向量. 此时, 非齐次线性方程组同解方程组为

$$\begin{cases} x_1=-9x_2-4x_4-17, \\ x_3=7x_2+\frac{7}{2}x_4+14. \end{cases}$$

取 $x_2=x_4=0$, 解得 $x_1=-17, x_3=14$, 即得到非齐次线性方程组的一个解向量 $\eta_0=(-17,0,14,0)^{\mathrm{T}}$. 选 x_2, x_4 为自由未知量, 对应的齐次线性方程组的同解方程组为

$$\begin{cases} x_1=-9x_2-4x_4, \\ x_3=7x_2+\frac{7}{2}x_4. \end{cases}$$

令 $\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, 分别解得 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -9 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix}$, 于是得到一个基础解系

$$\xi_1=\begin{bmatrix} -9 \\ 1 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \xi_2=\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ \frac{7}{2} \\ 1 \end{bmatrix},$$

所以非齐次线性方程组的通解为

$$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\eta_0=k_1\begin{bmatrix} -9 \\ 1 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ \frac{7}{2} \\ 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -17 \\ 0 \\ 14 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{其中 } k_1, k_2 \text{ 为任意常数.}$$

7. 设向量组

$$\alpha_1=\begin{bmatrix} a \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad \alpha_2=\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \alpha_3=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \beta=\begin{bmatrix} 1 \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

试问: 当 a, b, c 满足什么条件时, 1) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 且表示式唯一; 2) β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示; 3) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 但表示式不唯一, 并求出一般的表示式.

解: 1) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 且表示式唯一, 当且仅当非齐次线性方程组 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)x=\beta$ 有唯一解, 故当且仅当 $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)=R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta)=3$, 从而当且仅当系数矩阵的行列式值不为零, 即

$$\begin{vmatrix} a & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 10 & 5 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}=(-1)(-1)^{3+3}(a+4)=-(a+4)\neq 0,$$

因此, 当 $a\neq -4$ 时, β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 且表示式唯一.

2) β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 当且仅当非齐次线性方程组 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)x=\beta$ 无解, 故当且仅当 $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)<R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta)$, 而由1)知, $a=-4$,

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta)=\begin{bmatrix} -4 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & b \\ 10 & 5 & 4 & c \end{bmatrix}\xrightarrow[-5r_2+r_3]{2r_2+r_1}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1+2b \\ 2 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & -1 & c-5b \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & 1+2b \\ 0 & 0 & -1 & c-5b \end{bmatrix}\xrightarrow[-r_2+r_1]{r_2+r_3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -b-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2b+1 \\ 0 & 0 & 0 & 1+c-3b \end{bmatrix},$$

所以, $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)=2$, 因而 $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)<R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta)$ 即 $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta)=3$, 等价于 $1+c-3b\neq 0$. 因此, 当 $a=-4, 3b-c\neq 1$ 时, β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

3) β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示, 但表示式不唯一, 当且仅当非齐次线性方程组 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)x=\beta$ 有无穷多个解, 故当且仅当 $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta)<3$, 而由1)知, $a=-4$, 由2)中的计算知, $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$, 因而 $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta)=2$, 等价于 $1+c-3b=0$. 因此, 当 $a=-4, 3b-c=1$ 时, β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示, 但表示式不唯一. 此时, $n-R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3-2=1$, 所以对应的齐次线性方程组的基础解系只含有 1 个解向量. 此时, 非齐次线性方程组同解方程组为

$$\begin{cases} x_2=-2x_1-b-1, \\ x_3=2b+1. \end{cases}$$

取 $x_1=0$, 解得 $x_2=-b-1, x_3=2b+1$, 即得到非齐次线性方程组的一个解向量 $\eta_0=(0,-b-1,2b+1)^{\mathrm{T}}$. 选 x_1 为自由未知量, 对应的齐次线性方程组的同解方程组为

$$\begin{cases} x_2=-2x_1, \\ x_3=0. \end{cases}$$

令 $x_1=1$, 解得 $x_2=-2, x_3=0$, 即得到对应的齐次线性方程组的一个基础解系为 $\xi=(1,-2,0)^{\mathrm{T}}$. 所以非齐次线性方程组的通解为

$$x=k\xi+\eta_0=k\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ -b-1 \\ 2b+1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k \\ -(2k+b+1) \\ 2b+1 \end{bmatrix},\quad \text{其中 } k \text{ 为任意常数.}$$

8. 设 η_0 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的一个解, $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是对应的齐次线性方程组的一个基础解系, 试证: 1) $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r},\eta_0$ 线性无关;   2) $\eta_0,\eta_0+\xi_1,\eta_0+\xi_2,\cdots,\eta_0+\xi_{n-r}$ 线性无关.

证明: 1) 反证法. 假设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r},\eta_0$ 线性相关, 由于 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是对应的齐次线性方程组的一个基础解系, 因此, $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是线性无关的, 进而, η_0 可以由 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性表示, 由此推出 η_0 也是对应的齐次线性方程组的一个解向量, 矛盾. 所以, $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r},\eta_0$ 线性无关.

2) 向量组 $\eta_0,\eta_0+\xi_1,\eta_0+\xi_2,\cdots,\eta_0+\xi_{n-r}$ 线性无关等价于矩阵 $A:=(\eta_0,\eta_0+\xi_1,\eta_0+\xi_2,\cdots,\eta_0+\xi_{n-r})$ 的列秩为 $n-r+1$, 也就等价于 $R(A)=n-r+1$. 显然 A 经 $n-r$ 次初等消法列变换可以化成矩阵 $B:=(\eta_0,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r})$, 而初等列变换不改变矩阵的秩, 所以, $R(A)=R(B)$. 又 $R(B)$ 等于 B 的列秩, 再由1)知, B 的列秩为 $n-r+1$, 所以推出, $R(A)=n-r+1$. 由此得证, 向量组 $\eta_0,\eta_0+\xi_1,\eta_0+\xi_2,\cdots,\eta_0+\xi_{n-r}$ 线性无关.

9. 设 n 元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵的秩为 r, $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r+1}$ 是它的 $n-r+1$ 个线性无关的解, 试证它的任一解可表示为

$$x=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r+1}\eta_{n-r+1},$$

其中 $k_1+k_2+\cdots+k_{n-r+1}=1$.

证明: 对于该非齐次线性方程组的任一解 $x=\eta$, 当 η 等于 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r+1}$ 之一时, 显然结论成立; 当 η 不等于 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r+1}$ 任意一个时, 设 η_0 是该非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的一个解, $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是对应的齐次线性方程组的一个基础解系, 则由非齐次线性方程组的通解表示

式知, 向量组 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r+1},\eta$ 可以由向量组 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r},\eta_0$ 线性表示, 前者有 $n-r+2$ 个向量, 后者有 $n-r+1$ 个向量, 因此, $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r+1},\eta$ 必定线性相关, 再由 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r+1}$ 是线性无关的, 立刻得出 η 可以由 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r+1}$ 线性表示, 即存在常数 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r+1}$, 使得 $\eta=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r+1}\eta_{n-r+1}$. 由于 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r+1},\eta$ 都是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的解向量, 所以, 前式两边左乘矩阵 A 推出, $b=(k_1+k_2+\cdots+k_{n-r+1})b$, 从而 $(k_1+k_2+\cdots+k_{n-r+1}-1)b=\mathbf{0}$, 而 $b\neq\mathbf{0}$, 进而, $k_1+k_2+\cdots+k_{n-r+1}-1=0$, 即 $k_1+k_2+\cdots+k_{n-r+1}=1$.

由此得证, 该非齐次线性方程组的任一解可表示为

$$x=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r+1}\eta_{n-r+1},$$

其中 $k_1+k_2+\cdots+k_{n-r+1}=1$.

习题4.4(B)

1. 已知 A 是 4 阶矩阵, 其秩 $R(A)=3$, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的三个不同的解向量, 且 $\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3=(2,4,6,8)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_1+2\alpha_3=(1,3,5,7)^{\mathrm{T}}$, 求方程组 $Ax=b$ 的通解.

解: 由于 $n-R(A)=4-3=1$, 因此对应的齐次线性方程组的基础解系只含 1 个解向量. 由于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的三个解向量, 记 $\eta_0:=(\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3)-(\alpha_1+2\alpha_3)=(2,4,6,8)^{\mathrm{T}}-(1,3,5,7)^{\mathrm{T}}=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\eta_1=\frac{1}{2}(2(\alpha_1+2\alpha_3)-(\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3))=\frac{1}{2}((2,6,10,14)^{\mathrm{T}}-(2,4,6,8)^{\mathrm{T}})=(0,1,2,3)^{\mathrm{T}}$. 由于

$$A\eta_0=(b+2b+b)-(b+2b)=b,\quad A\eta_1=\frac{1}{2}(2(b+2b)-(b+2b+b))=b,$$

所以, η_0,η_1 是该非齐次线性方程组的解向量. 再记 $\xi:=\eta_1-\eta_0=(0,1,2,3)^{\mathrm{T}}-(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}=(-1,0,1,2)^{\mathrm{T}}$, 则 ξ 是对应的齐次线性方程组的一个非零解, 因而可以构成一个基础解系. 故方程组 $Ax=b$ 的通解为

$$x=k\xi+\eta_0=k\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix},\quad \text{其中 } k \text{ 为任意常数.}$$

2. 已知 A 为 2×4 矩阵, $R(A)=2$, 并且齐次线性方程组 $Ax=\mathbf{0}$ 的任一解都可由其解向量组

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\2\\0\\1\end{bmatrix},\quad \alpha_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\-3\end{bmatrix},\quad \alpha_3=\begin{bmatrix}3\\a\\2\\-5\end{bmatrix},\quad \alpha_4=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\b\end{bmatrix}$$

线性表示, 求 a,b 及矩阵 A.

解: 由于 $n-R(A)=4-2=2$, 因此齐次线性方程组 $Ax=\mathbf{0}$ 的基础解系含 2 个解向量. 不妨设 ξ_1,ξ_2 为一个基础解系. 显然, 解向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 可以由 ξ_1,ξ_2 线性表示, 又由条件知, ξ_1,ξ_2 也可以由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示, 因此, 两个向量组等价, 因而有相同的秩, 故解向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的

秩为 2. 而利用初等行变换,

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{bmatrix}1&1&3&1\\2&0&a&0\\0&1&2&1\\1&-3&-5&b\end{bmatrix}\xrightarrow[-r_1+r_4]{-2r_1+r_2}\begin{bmatrix}1&1&3&1\\0&-2&a-6&-2\\0&1&2&1\\0&-4&-8&b-1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[4r_3+r_4]{2r_3+r_2}\begin{bmatrix}1&1&3&1\\0&0&a-2&0\\0&1&2&1\\0&0&0&b+3\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}1&1&3&1\\0&1&2&1\\0&0&a-2&0\\0&0&0&b+3\end{bmatrix},$$

所以, 由 $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=2$ 推出 $a=2,b=-3$. 此时, α_1, α_2 是线性无关的解向量组, 构成一个基础解系. 结合 α_1, α_2 的定义, 选 x_2,x_3 作为自由未知量, 不难看出同解方程组为

$$\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}x_2+x_3,\\x_4=\frac{1}{2}x_2-3x_3,\end{cases}$$

等价于

$$\begin{cases}2x_1-x_2-2x_3\qquad\quad=0,\\\qquad\;\;-x_2+6x_3+2x_4=0,\end{cases}$$

所以,

$$A=\begin{bmatrix}2&-1&-2&0\\0&-1&6&2\end{bmatrix}.$$

2. 设 4 维向量组 $\alpha_1=(1+a,1,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_2=(2,2+a,2,2)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_3=(3,3,3+a,3)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_4=(4,4,4,4+a)^{\mathrm{T}}$, 问 a 为何值时, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关? 当 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关时, 求其一个极大线性无关组, 并将其余向量用该极大线性无关组线性表示.

解: $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关当且仅当其构成的方阵行列式值为 0, 此即

$$0=\begin{vmatrix}1+a&2&3&4\\1&2+a&3&4\\1&2&3+a&4\\1&2&3&4+a\end{vmatrix}\overset{\substack{c_2+c_1\\c_3+c_1\\c_4+c_1}}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}10+a&2&3&4\\10+a&2+a&3&4\\10+a&2&3+a&4\\10+a&2&3&4+a\end{vmatrix}$$

$$=(10+a)\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&2+a&3&4\\1&2&3+a&4\\1&2&3&4+a\end{vmatrix}\overset{\substack{-2c_1+c_2\\-3c_1+c_3\\-4c_1+c_4}}{=\!=\!=}(10+a)\begin{vmatrix}1&0&0&0\\1&a&0&0\\1&0&a&0\\1&0&0&a\end{vmatrix}$$

$$=(10+a)a^3,$$

即 $a=0$ 或 $a=-10$ 时, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关.

当 $a=0$ 时,

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\\1&2&3&4\\1&2&3&4\end{bmatrix}\xrightarrow[-r_1+r_4]{\substack{-r_1+r_2\\-r_1+r_3}}\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

故 α_1 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大线性无关组, $\alpha_2=2\alpha_1$, $\alpha_3=3\alpha_1$, $\alpha_4=4\alpha_1$.

当 $a=-10$ 时,

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{bmatrix}-9&2&3&4\\1&-8&3&4\\1&2&-7&4\\1&2&3&-6\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_4}\begin{bmatrix}1&2&3&-6\\1&-8&3&4\\1&2&-7&4\\-9&2&3&4\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[9r_1+r_4]{\substack{-r_1+r_2\\-r_1+r_3}}\begin{bmatrix}1&2&3&-6\\0&-10&0&10\\0&0&-10&10\\0&20&30&-50\end{bmatrix}\xrightarrow[3r_3+r_4]{2r_2+r_4}\begin{bmatrix}1&2&3&-6\\0&-10&0&10\\0&0&-10&10\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3\times(-\frac{1}{10})]{r_2\times(-\frac{1}{10})}\begin{bmatrix}1&2&3&-6\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[-3r_3+r_1]{-2r_2+r_1}\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大线性无关组, $\alpha_4=-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3$.

3. 设有 4 元线性方程组

$$(\mathrm{I})\quad\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3=0,\\x_1+2x_2+x_3-x_4=0.\end{cases}$$

又已知 4 元线性方程组 (Ⅱ) 的一个基础解系为

$$\eta_1=\begin{bmatrix}2\\-1\\a+2\\1\end{bmatrix},\quad\eta_2=\begin{bmatrix}-1\\2\\4\\a+8\end{bmatrix}.$$

1) 求方程组 (I) 的一个基础解系; 2) 问 a 为何值时, 方程组 (I) 与 (Ⅱ) 有非零公共解?在有非零公共解时, 求出全部非零公共解.

解: 1) 利用初等行变换将 A 化成最简形矩阵,

$$A=\begin{bmatrix}2&3&-1&0\\1&2&1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_1\leftrightarrow r_2]{-2r_2+r_1}\begin{bmatrix}1&2&1&-1\\0&-1&-3&2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-2r_2+r_1]{r_2\times(-1)}\begin{bmatrix}1&0&-5&3\\0&1&3&-2\end{bmatrix},$$

因为 $R(A)=2$, $n-R(A)=4-2=2$, 所以齐次线性方程组的基础解系含有 2 个解向量. 选 x_3,x_4 为自由未知量, 同解方程组为

$$\begin{cases}x_1=5x_3-3x_4,\\x_2=-3x_3+2x_4.\end{cases}$$

令 $\begin{bmatrix}x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$, 分别解得 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\-3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-3\\2\end{bmatrix}$, 于是得到一个基础解系

$$\xi_1=\begin{bmatrix}5\\-3\\1\\0\end{bmatrix},\quad\xi_2=\begin{bmatrix}-3\\2\\0\\1\end{bmatrix}.$$

2) 方法一. 定义

$$\tilde{\eta}_1=2\eta_1+\eta_2=\begin{bmatrix}3\\0\\2a+8\\a+10\end{bmatrix},\quad\tilde{\eta}_2=\eta_1+2\eta_2=\begin{bmatrix}0\\3\\a+10\\2a+17\end{bmatrix}.$$

由 η_1,η_2 是方程组 (Ⅱ) 的基础解系知, $\tilde{\eta}_1,\tilde{\eta}_2$ 是方程组 (Ⅱ) 的解向量, 不难看出它们是线性无关的, 因此也构成方程组 (Ⅱ) 的一个基础解系. 取 x_1,x_2 为自由未知量, 得到方程组 (Ⅱ) 的同解方程组

$$\begin{cases} x_3=\frac{2a+8}{3}x_1+\frac{a+10}{3}x_2, \\ x_4=\frac{a+10}{3}x_1+\frac{2a+17}{3}x_2, \end{cases}$$

也即

$$\begin{cases} (2a+8)x_1+(a+10)x_2-3x_3=0, \\ (a+10)x_1+(2a+17)x_2-3x_4=0. \end{cases}$$

考虑方程组 (I) 与 (Ⅱ) 联立的齐次线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=0, \\ x_1+2x_2+x_3-x_4=0, \\ (2a+8)x_1+(a+10)x_2-3x_3=0, \\ (a+10)x_1+(2a+17)x_2-3x_4=0. \end{cases}$$

其解若存在即为线性方程组 (I) 与 (Ⅱ) 的公共解. 利用初等行变换化系数矩阵成行最简形矩阵

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2a+8 & a+10 & -3 & 0 \\ a+10 & 2a+17 & 0 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2\times(-1)]{\substack{-2r_2+r_1 \\ r_1\leftrightarrow r_2}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2a+8 & a+10 & -3 & 0 \\ a+10 & 2a+17 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-(a+10)r_1+r_4]{-(2a+8)r_1+r_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -3a-6 & -2a-11 & 2a+8 \\ 0 & -3 & -a-10 & a+7 \end{bmatrix} \xrightarrow[3r_2+r_4]{(3a+6)r_2+r_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 7a+7 & -4a-4 \\ 0 & 0 & -a-1 & a+1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4\times\frac{1}{3}]{\substack{r_3\leftrightarrow r_4 \\ 7r_3+r_4}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -a-1 & a+1 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2r_2+r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -a-1 & a+1 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 \end{bmatrix},$$

所以, 当 $a=-1$ 时, $R(A)=2$, $n-R(A)=4-2=2$, 所以基础解系含 2 个解向量. 注意此时, 线性方程组 (I) 与 (Ⅱ) 是同解方程组. 选 x_3,x_4 为自由未知量, 此时, 同解方程组为

$$\begin{cases} x_1=5x_3-3x_4, \\ x_2=-3x_3+2x_4, \end{cases}$$

令 $\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$, 分别解得 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, 于是得到一个基础解系

$$\eta_1=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \eta_2=\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix},$$

即为 (Ⅱ) 的基础解系. 进而线性方程组 (I) 与 (Ⅱ) 的非零公共解为

$$x=k_1\eta_1+k_2\eta_2=k_1\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \text{其中 } k_1,k_2 \text{ 为不同时为零的任意常数.}$$

方法二. ξ_1,ξ_2 是齐次线性方程组 (I) 的基础解系, η_1,η_2 是齐次线性方程组 (Ⅱ) 的基础解系. 我们证明: 方程组 (I) 与 (Ⅱ) 有非零公共解当且仅当 $\xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2$ 线性相关. 事实上, 设方程组 (I) 与 (Ⅱ) 有非零公共解 η, 则存在不全为零的数 λ_1,λ_2 使得 $\eta=\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2$, 存在不全为零的数 μ_1,μ_2 使得 $\eta=\mu_1\eta_1+\mu_2\eta_2$, 因此, $\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2-\mu_1\eta_1-\mu_2\eta_2=\mathbf{0}$, 注意到 $\lambda_1,\lambda_2,\mu_1,\mu_2$ 不全为零, 所以, $\xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2$ 线性相关. 反

之, 若 $\xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2$ 线性相关, 则存在不全为零的数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ 使得 $\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2+\lambda_3\eta_1+\lambda_4\eta_2=\mathbf{0}$, 由 ξ_1,ξ_2 线性无关性质知, λ_3,λ_4 不全为零, 因此, 同理由 η_1,η_2 线性无关性质知, λ_1,λ_2 不全为零. 记 $\eta:=\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2=(-\lambda_3)\eta_1+(-\lambda_4)\eta_2$. 则 η 是方程组 (I) 与 (Ⅱ) 的非零公共解.

利用初等行变换化矩阵成行最简形矩阵

$$(\xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2)=\begin{bmatrix}5&-3&2&-1\\-3&2&-1&2\\1&0&a+2&4\\0&1&1&a+8\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}1&0&a+2&4\\-3&2&-1&2\\5&-3&2&-1\\0&1&1&a+8\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-5r_1+r_3]{3r_1+r_2}\begin{bmatrix}1&0&a+2&4\\0&2&3a+5&14\\0&-3&-5a-8&-21\\0&1&1&a+8\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_4}\begin{bmatrix}1&0&a+2&4\\0&1&1&a+8\\0&-3&-5a-8&-21\\0&2&3a+5&14\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-2r_2+r_4]{3r_2+r_3}\begin{bmatrix}1&0&a+2&4\\0&1&1&a+8\\0&0&-5a-5&3a+3\\0&0&3a+3&-2a-2\end{bmatrix}\xrightarrow[-3r_3+r_4]{2r_4+r_3}\begin{bmatrix}1&0&a+2&4\\0&1&1&a+8\\0&0&a+1&-a-1\\0&0&0&a+1\end{bmatrix},$$

所以, 当 $a=-1$ 时, $R(\xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2)=2$, 且此时

$$\text{上式}=\begin{bmatrix}1&0&1&4\\0&1&1&7\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$\xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2$ 中任意两个都构成极大无关组, 故线性方程组 (I) 与 (Ⅱ) 是同解方程组, 进而线性方程组 (I) 与 (Ⅱ) 的非零公共解为

$$x=k_1\eta_1+k_2\eta_2=k_1\begin{bmatrix}2\\-1\\1\\1\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\2\\4\\7\end{bmatrix},\quad \text{其中 } k_1,k_2 \text{ 为不同时为零的任意常数.}$$

4. 已知下列非齐次线性方程组:

$$\text{(I)}\quad\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+5x_4=-9,\\x_1-\ x_2-\ x_3\qquad\ =8,\\-x_1+\ x_2-\ x_3+2x_4=-4;\end{cases}\qquad\text{(Ⅱ)}\quad\begin{cases}ax_1-x_2-\ x_3+2x_4=11,\\\qquad 2x_2-bx_3+7x_4=-4,\\\qquad\qquad x_3-\ x_4=1-c.\end{cases}$$

1) 求出方程组 (I) 的通解; 2) 问方程组 (Ⅱ) 中的参数 a,b,c 为何值时, 方程组 (I) 与 (Ⅱ) 同解.

解: 1) 利用初等行变换将增广矩阵化成最简形矩阵,

$$\begin{bmatrix}1&2&3&5&-9\\1&-1&-1&0&8\\-1&1&-1&2&-4\end{bmatrix}\xrightarrow[r_1+r_3]{-r_1+r_2}\begin{bmatrix}1&2&3&5&-9\\0&-3&-4&-5&17\\0&3&2&7&-13\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2+r_3}\begin{bmatrix}1&2&3&5&-9\\0&-3&-4&-5&17\\0&0&-2&2&4\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3\times(-\frac{1}{2})]{r_2\times(-1)}\begin{bmatrix}1&2&3&5&-9\\0&3&4&5&-17\\0&0&1&-1&-2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-3r_3+r_1]{-4r_3+r_2}\begin{bmatrix}1&2&0&8&-3\\0&3&0&9&-9\\0&0&1&-1&-2\end{bmatrix}\xrightarrow[-2r_2+r_1]{r_2\times\frac{1}{3}}\begin{bmatrix}1&0&0&2&3\\0&1&0&3&-3\\0&0&1&-1&-2\end{bmatrix},$$

因为 $R(A)=3$, $n-R(A)=4-3=1$, 所以对应的齐次线性方程组的基础解系含有 1 个解向量. 此时, 非

齐次线性方程组同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = -2x_4 + 3, \\ x_2 = -3x_4 - 3, \\ x_3 = x_4 - 2. \end{cases}$$

取 $x_4 = 0$, 解得 $x_1 = 3, x_2 = -3, x_3 = -2$, 即得到非齐次线性方程组的一个解向量 $\eta_0 = (3, -3, -2, 0)^{\mathrm{T}}$. 选 x_4 为自由未知量, 对应的齐次线性方程组的同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = -2x_4, \\ x_2 = -3x_4, \\ x_3 = x_4. \end{cases}$$

令 $x_4 = 1$, 解得 $x_1 = -2, x_2 = -3, x_3 = 1$, 即得到对应的齐次线性方程组的一个基础解系 $\xi = (-2, -3, 1, 1)^{\mathrm{T}}$. 所以非齐次线性方程组的通解为

$$x = k\xi + \eta_0 = k\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{其中 } k \text{ 为任意常数.}$$

2) 利用初等行变换将下列矩阵化成行阶梯形矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & -9 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 8 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & -4 \\ a & -1 & -1 & 2 & 11 \\ 0 & 2 & -b & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1-c \end{bmatrix} \xrightarrow[-ar_1+r_4]{\substack{-r_1+r_2 \\ r_1+r_3}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -4 & -5 & 17 \\ 0 & 3 & 2 & 7 & -13 \\ 0 & -1-2a & -1-3a & 2-5a & 11+9a \\ 0 & 2 & -b & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1-c \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3\times(-\frac{1}{2})]{\substack{r_2+r_3 \\ r_2\times(-1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & -9 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1-2a & -1-3a & 2-5a & 11+9a \\ 0 & 2 & -b & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1-c \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_5\times 3]{r_4\times 3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & -9 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3-6a & -3-9a & 6-15a & 33+27a \\ 0 & 6 & -3b & 21 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1-c \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-2r_2+r_5]{(1+2a)r_2+r_4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & -9 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1-a & 11-5a & 16-7a \\ 0 & 0 & -3b-8 & 11 & 22 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1-c \end{bmatrix} \xrightarrow[-r_3+r_6]{\substack{(a-1)r_3+r_4 \\ (3b+8)r_3+r_5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & -9 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 12-6a & 18-9a \\ 0 & 0 & 0 & 3-3b & 6-6b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3-c \end{bmatrix},$$

而方程组 (I) 与 (Ⅱ) 同解, 当且仅当上述矩阵的秩等于 $R(A)$. 而 $R(A) = 3$, 所以, 当 $a = 2, b = 1, c = 3$ 时, 方程组 (I) 与 (Ⅱ) 同解.

5 第五章

5.1 习题5.1

1. 判明下列数集是否构成数域:

1) $F=\{2,4,6,8,\cdots\}$; 2) $F=\{a\pi\,|\,a\in\mathbf{Q}\}$; 3) $F=\{a+b\mathrm{i}\,|\,a,b\in\mathbf{Q}\}$.

解: 1) F 不构成数域. 虽然对加法, 乘法封闭, 但对减法, 除法不封闭, 不含 0 和 1.

2) F 不构成数域. 虽然对加法, 减法封闭, 但对乘法, 除法不封闭, 不含 1.

3) F 构成数域. 显然含 0 和 1, 令 $\alpha=a+b\mathrm{i}\in F,\beta=c+d\mathrm{i}\in F$, $a,b,c,d\in\mathbf{Q}$. 因为有理数域对加法, 减法, 乘法, 除法运算封闭, 则 $\alpha\pm\beta=(a\pm c)+(b\pm d)\mathrm{i}\in F$, $\alpha\cdot\beta=(ac-bd)+(ad+bc)\mathrm{i}\in F$, $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\mathrm{i}\in F$, 所以 F 对加法, 减法, 乘法, 除法运算封闭, 因此也构成数域.

2. 验证数集 $F=\{a+b\sqrt{2}\,|\,a,b\in\mathbf{Q}\}$ 是一个数域.

证明: 显然含 0 和 1, 令 $\alpha=a+b\sqrt{2}\in F,\beta=c+d\sqrt{2}\in F$, $a,b,c,d\in\mathbf{Q}$. 因为有理数域对加法, 减法, 乘法, 除法运算封闭, 则 $\alpha\pm\beta=(a\pm c)+(b\pm d)\sqrt{2}\in F$, $\alpha\cdot\beta=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}\in F$, $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{ac-2bd}{c^2-2d^2}+\frac{bc-ad}{c^2-2d^2}\sqrt{2}\in F$, 所以 F 对加法, 减法, 乘法, 除法运算封闭, 因此也构成数域.

3. 设 $f(x)$ 是一个首项系数为 1 的多项式, 并已知它的根为 $0,-1,1$ (二重), 试求 $f(x)$ 按降幂排列的表达式.

解: 由条件知 $f(x)=x(x+1)(x-1)^2=(x^2+x)(x^2-2x+1)=x^4-x^3-x^2+x$.

4. 判明多项式的下述因式分解式中哪些是复数域上的标准分解?哪些不是?

1) $f(x)=(x-1)^2(x+1)$; 2) $g(x)=(x^2+2)(x-3)^2$;

3) $h(x)=2(x+1)^2x(x+5)$; 4) $p(\lambda)=\lambda(2\lambda-1)(\lambda-\frac{1}{2})$.

解: 1) 是; 2) 不是, 应该为 $g(x)=(x+\sqrt{2}\mathrm{i})(x-\sqrt{2}\mathrm{i})(x-3)^2$; 3) 是; 4) 不是, 应该为 $p(\lambda)=2\lambda(\lambda-\frac{1}{2})^2$.

5.2 习题5.2

习题5.2(A)

1. 在实数域上, 求下列矩阵的特征值与特征向量:

1) $A=\begin{bmatrix}0&0&2\\0&2&0\\2&0&0\end{bmatrix}$; 2) $B=\begin{bmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{bmatrix}$; 3) $A=\begin{bmatrix}3&3&2\\1&1&-2\\-3&-1&0\end{bmatrix}$;

4) $B=\begin{bmatrix}6&2&4\\2&3&2\\4&2&6\end{bmatrix}$; 5) $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&3\\3&3&6\end{bmatrix}$; 6) $B=\begin{bmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{bmatrix}$.

解: 1) 由于 A 的特征多项式

$$\psi(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&0&-2\\0&\lambda-2&0\\-2&0&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-2)-2\cdot2(\lambda-2)=(\lambda-2)^2(\lambda+2),$$

得到 A 的特征值为 $\lambda_1=2$(二重), $\lambda_2=-2$.

对于 $\lambda_1=2$, 求解齐次线性方程组 $(\lambda_1 E-A)x=\mathbf{0}$. 由于

$$\lambda_1 E-A=\begin{bmatrix}2&0&-2\\0&0&0\\-2&0&2\end{bmatrix}\xrightarrow[r_1\times\frac{1}{2}]{r_1+r_3}\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$3-R(\lambda_1 E-A)=3-1=2$, 基础解系含 2 个向量. 取自由未知量 x_2,x_3, 令 $\begin{bmatrix}x_2\\x_3\end{bmatrix}$ 为 $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$, 分别解得 $x_1=0,x_1=1$, 所以得到一个基础解系 $\xi_1=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\xi_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$, 于是, A 对应于特征值 $\lambda_1=2$ 的全部特征向量为

$$k_1\xi_1+k_2\xi_2=k_1\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \text{ 其中 } k_1,k_2 \text{ 为不同时为零的任意实数.}$$

对于 $\lambda_2=-2$, 求解齐次线性方程组 $(\lambda_2 E-A)x=\mathbf{0}$. 由于

$$\lambda_2 E-A=\begin{bmatrix}-2&0&-2\\0&-4&0\\-2&0&-2\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{r_1\times(-\frac{1}{2})\\ r_2\times(-\frac{1}{4})}]{-r_1+r_3}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$3-R(\lambda_2 E-A)=3-2=1$, 基础解系含 1 个向量. 取自由未知量 $x_3=-1$, 解得 $x_1=1,x_2=0$, 所以得到一个基础解系 $\xi_3=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$, 于是, A 对应于特征值 $\lambda_2=-2$ 的全部特征向量为

$$k_3\xi_3=k_3\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \text{ 其中 } k_3 \text{ 为任意非零实数.}$$

2) 由于 B 的特征多项式

$$\psi(\lambda)=|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-4&-6&0\\3&\lambda+5&0\\3&6&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-20+18)=(\lambda+2)(\lambda-1)^2,$$

得到 B 的特征值为 $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=1$(二重).

对于 $\lambda_1=-2$, 求解齐次线性方程组 $(\lambda_1 E-B)x=\mathbf{0}$. 由于

$$\lambda_1 E-B=\begin{bmatrix}-6&-6&0\\3&3&0\\3&6&-3\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{-r_2+r_3\\ -r_3+r_2}]{2r_2+r_1}\begin{bmatrix}0&0&0\\3&0&3\\0&3&-3\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{r_1\leftrightarrow r_2\\ r_2\leftrightarrow r_3}]{\substack{r_2\times\frac{1}{3}\\ r_3\times\frac{1}{3}}}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$3-R(\lambda_1 E-B)=3-2=1$, 基础解系含 1 个向量. 取自由未知量 $x_3=-1$, 解得 $x_1=1,x_2=-1$, 所以得到一个基础解系 $\xi_1=(1,-1,-1)^{\mathrm{T}}$, 于是, B 对应于特征值 $\lambda_1=-2$ 的全部特征向量为

$$k_1\xi_1=k_1\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}, \text{ 其中 } k_1 \text{ 为任意非零实数.}$$

对于 $\lambda_2=1$, 求解齐次线性方程组 $(\lambda_2 E-B)x=\mathbf{0}$. 由于

$$\lambda_2 E-B=\begin{bmatrix}-3&-6&0\\3&6&0\\3&6&0\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{r_1+r_3\\ r_1\times(-\frac{1}{3})}]{r_1+r_2}\begin{bmatrix}1&2&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$3-R(\lambda_2 E-B)=3-1=2$, 基础解系含 2 个向量. 取自由未知量 x_2,x_3, 令 $\begin{bmatrix}x_2\\x_3\end{bmatrix}$ 为 $\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$, 分别解得 $x_1=2,x_1=0$, 所以得到一个基础解系 $\xi_2=(2,-1,0)^{\mathrm{T}}$, $\xi_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$, 于是, B 对应于特征

值 $\lambda_2=1$ 的全部特征向量为

$$k_2\xi_2+k_3\xi_3=k_2\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\ \text{其中 } k_2,k_3 \text{ 为不同时为零的任意实数.}$$

3) 由于 A 的特征多项式

$$\psi(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-3&-2\\-1&\lambda-1&2\\3&1&\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{r_1+r_2}\begin{vmatrix}\lambda-3&-3&-2\\\lambda-4&\lambda-4&0\\3&1&\lambda\end{vmatrix}$$
$$=(\lambda-4)\begin{vmatrix}\lambda-3&-3&-2\\1&1&0\\3&1&\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{-c_2+c_1}(\lambda-4)\begin{vmatrix}\lambda&-3&-2\\0&1&0\\2&1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda^2+4),$$

得到 A 的实特征值为 $\lambda=4$.

对于 $\lambda=4$, 求解齐次线性方程组 $(\lambda E-A)x=\mathbf{0}$. 由于

$$\lambda E-A=\begin{bmatrix}1&-3&-2\\-1&3&2\\3&1&4\end{bmatrix}\xrightarrow[-3r_1+r_3]{r_1+r_2}\begin{bmatrix}1&-3&-2\\0&0&0\\0&10&10\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{3r_3+r_1\\r_2\leftrightarrow r_3}]{r_3\times\frac{1}{10}}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$3-R(\lambda E-A)=3-2=1$, 基础解系含 1 个向量. 取自由未知量 $x_3=-1$, 解得 $x_1=1,x_2=1$, 所以得到一个基础解系 $\xi=(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$, 于是, A 对应于特征值 $\lambda=4$ 的全部特征向量为

$$k\xi=k\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix},\ \text{其中 } k \text{ 为任意非零实数.}$$

4) 由于 B 的特征多项式

$$\psi(\lambda)=|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-6&-2&-4\\-2&\lambda-3&-2\\-4&-2&\lambda-6\end{vmatrix}\xlongequal{-2r_2+r_1}\begin{vmatrix}\lambda-2&-2\lambda+4&0\\-2&\lambda-3&-2\\-4&-2&\lambda-6\end{vmatrix}$$
$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1&-2&0\\-2&\lambda-3&-2\\-4&-2&\lambda-6\end{vmatrix}\xlongequal{2c_1+c_2}(\lambda-2)\begin{vmatrix}1&0&0\\-2&\lambda-7&-2\\-4&-10&\lambda-6\end{vmatrix}$$
$$=(\lambda-2)(\lambda^2-13\lambda+42-20)=(\lambda-11)(\lambda-2)^2,$$

得到 B 的特征值为 $\lambda_1=11$, $\lambda_2=2$(二重).

对于 $\lambda_1=11$, 求解齐次线性方程组 $(\lambda_1E-B)x=\mathbf{0}$. 由于

$$\lambda_1E-B=\begin{bmatrix}5&-2&-4\\-2&8&-2\\-4&-2&5\end{bmatrix}\xrightarrow[-2r_2+r_3]{r_3+r_1}\begin{bmatrix}1&-4&1\\-2&8&-2\\0&-18&9\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{2r_3+r_1\\r_2\leftrightarrow r_3}]{\substack{2r_1+r_2\\r_3\times(-\frac{1}{9})}}\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&2&-1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$3-R(\lambda_1E-B)=3-2=1$, 基础解系含 1 个向量. 取自由未知量 $x_3=2$, 解得 $x_1=2,x_2=1$, 所以得到一个基础解系 $\xi_1=(2,1,2)^{\mathrm{T}}$, 于是, B 对应于特征值 $\lambda_1=11$ 的全部特征向量为

$$k_1\xi_1=k_1\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix},\ \text{其中 } k_1 \text{ 为任意非零实数.}$$

对于 $\lambda_2=2$, 求解齐次线性方程组 $(\lambda_2E-B)x=\mathbf{0}$. 由于

$$\lambda_2E-B=\begin{bmatrix}-4&-2&-4\\-2&-1&-2\\-4&-2&-4\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{r_1\times(-\frac{1}{2})\\r_1+r_2}]{-r_1+r_3}\begin{bmatrix}2&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$3-R(\lambda_2E-B)=3-1=2$, 基础解系含 2 个向量. 取自由未知量 x_2,x_3, 令 $\begin{bmatrix}x_2\\x_3\end{bmatrix}$ 为 $\begin{bmatrix}-2\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$, 分别解得 $x_1=1,x_1=1$, 所以得到一个基础解系 $\xi_2=(1,-2,0)^{\mathrm{T}}$, $\xi_3=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$, 于是, B 对应于特征

值 $\lambda_2=2$ 的全部特征向量为

$$k_2\xi_2+k_3\xi_3=k_2\begin{bmatrix}1\\-2\\0\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\text{ 其中 } k_2,k_3 \text{ 为不同时为零的任意实数.}$$

5) 由于 A 的特征多项式

$$\begin{aligned}\psi(\lambda)=|\lambda E-A|&=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-3\\-2&\lambda-1&-3\\-3&-3&\lambda-6\end{vmatrix}\xlongequal{-r_1+r_2}\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-3\\-\lambda-1&\lambda+1&0\\-3&-3&\lambda-6\end{vmatrix}\\&=(\lambda+1)\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-3\\-1&1&0\\-3&-3&\lambda-6\end{vmatrix}\xlongequal{c_2+c_1}(\lambda+1)\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&-3\\0&1&0\\-6&-3&\lambda-6\end{vmatrix}\\&=\lambda(\lambda+1)(\lambda-9),\end{aligned}$$

得到 A 的实特征值为 $\lambda_1=0,\ \lambda_2=-1,\ \lambda_3=9.$

对于 $\lambda_1=0$, 求解齐次线性方程组 $(\lambda_1E-A)x=\mathbf{0}$. 由于

$$\lambda_1E-A=\begin{bmatrix}-1&-2&-3\\-2&-1&-3\\-3&-3&-6\end{bmatrix}\xrightarrow[-3r_1+r_3]{-2r_1+r_2}\begin{bmatrix}-1&-2&-3\\0&3&3\\0&3&3\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{r_2\times\frac13\\-2r_2+r_1}]{\substack{r_1\times(-1)\\-r_2+r_3}}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$3-R(\lambda_1E-A)=3-2=1$, 基础解系含 1 个向量. 取自由未知量 $x_3=-1$, 解得 $x_1=1,x_2=1$, 所以得到一个基础解系 $\xi_1=(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$, 于是, A 对应于特征值 $\lambda_1=0$ 的全部特征向量为

$$k_1\xi_1=k_1\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix},\text{ 其中 } k_1 \text{ 为任意非零实数.}$$

对于 $\lambda_2=-1$, 求解齐次线性方程组 $(\lambda_2E-A)x=\mathbf{0}$. 由于

$$\lambda_2E-A=\begin{bmatrix}-2&-2&-3\\-2&-2&-3\\-3&-3&-7\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{-2r_1+r_3\\r_2\leftrightarrow r_3}]{-r_1+r_2}\begin{bmatrix}-2&-2&-3\\1&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{r_1\leftrightarrow r_2\\r_2+r_1}]{\substack{2r_2+r_1\\r_1\times(-\frac15)}}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$3-R(\lambda_2E-A)=3-2=1$, 基础解系含 1 个向量. 取自由未知量 $x_2=-1$, 解得 $x_1=1,x_3=0$, 所以得到一个基础解系 $\xi_2=(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$, 于是, A 对应于特征值 $\lambda_2=-1$ 的全部特征向量为

$$k_2\xi_2=k_2\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\text{ 其中 } k_2 \text{ 为任意非零实数.}$$

对于 $\lambda_3=9$, 求解齐次线性方程组 $(\lambda_3E-A)x=\mathbf{0}$. 由于

$$\lambda_3E-A=\begin{bmatrix}8&-2&-3\\-2&8&-3\\-3&-3&3\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{-8r_3+r_1\\2r_3+r_2}]{r_3\times(-\frac13)}\begin{bmatrix}0&-10&5\\0&10&-5\\1&1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{-r_2+r_3\\r_1\leftrightarrow r_3}]{\substack{r_2+r_1\\r_2\times\frac15}}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&2&-1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$3-R(\lambda_3E-A)=3-2=1$, 基础解系含 1 个向量. 取自由未知量 $x_2=1$, 解得 $x_1=1,x_3=2$, 所以得到一个基础解系 $\xi_3=(1,1,2)^{\mathrm{T}}$, 于是, A 对应于特征值 $\lambda_3=9$ 的全部特征向量为

$$k_3\xi_3=k_3\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix},\text{ 其中 } k_3 \text{ 为任意非零实数.}$$

6) 由于 B 的特征多项式

$$\psi(\lambda)=|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1 & -2\\ -5 & \lambda+3 & -3\\ 1 & 0 & \lambda+2\end{vmatrix}\overset{-(\lambda+2)c_1+c_3}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1 & -\lambda^2+2\\ -5 & \lambda+3 & 5\lambda+7\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$=5\lambda+7+(\lambda+3)(\lambda^2-2)=\lambda^3+3\lambda^2+3+1$$

$$=(\lambda+1)^3,$$

得到 B 的特征值为 $\lambda=-1$(三重).

对于 $\lambda=-1$, 求解齐次线性方程组 $(\lambda E-B)x=\mathbf{0}$. 由于

$$\lambda E-B=\begin{bmatrix}-3 & 1 & -2\\ -5 & 2 & -3\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow[5r_3+r_2]{3r_3+r_1}\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{r_1\leftrightarrow r_3\\ r_2\leftrightarrow r_3}]{-2r_1+r_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$3-R(\lambda E-B)=3-2=1$, 基础解系含 1 个向量. 取自由未知量 $x_3=-1$, 解得 $x_1=1,x_2=1$, 所以得到一个基础解系 $\xi=(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$, 于是, B 对应于特征值 $\lambda=-1$ 的全部特征向量为

$$k\xi=k\begin{bmatrix}1\\ 1\\ -1\end{bmatrix}, \text{ 其中 } k \text{ 为任意非零实数.}$$

2. 设 A 为 n 阶标量矩阵, 证明任何 n 维非零列向量都是 A 的特征向量.

证明: 设 $A=aE$, 则任意 n 维非零列向量 α, 有 $A\alpha=a\alpha$, 所以 α 是 A 对应于(唯一)特征值 a 的特征向量.

3. 证明: 方阵 A 与 A^{T} 的特征多项式相同, 从而特征值完全相同.

证明: 因为 $|\lambda E-A|=|(\lambda E-A)^{\mathrm{T}}|=|\lambda E-A^{\mathrm{T}}|$, 所以$A$ 与 A^{T} 的特征多项式相同, 因此特征值完全相同.

4. 设 λ_0 是方阵 A 的特征值, k 为(所考虑数域内的)任意常数, 证明 $k\lambda_0$ 是方阵 kA 的特征值; 并且若 α 是 A 对应于特征值 λ_0 的特征向量, 则 α 也是 kA 对应于特征值 $k\lambda_0$ 的特征向量.

证明: 因为 $A\alpha=\lambda_0\alpha$, 所以 $(kA)\alpha=k(A\alpha)=k(\lambda_0\alpha)=(k\lambda_0)\alpha$, 因此, $k\lambda_0$ 是方阵 kA 的特征值, α 也是 kA 对应于特征值 $k\lambda_0$ 的特征向量.

5. 设 λ_0 是方阵 A 的特征值, m 为正整数, 证明 λ_0^m 是方阵 A^m 的特征值; 并且若 α 是 A 对应于特征值 λ_0 的特征向量, 则 α 也是 A^m 对应于特征值 λ_0^m 的特征向量.

证明: 因为 $A\alpha=\lambda_0\alpha$, 所以 $A^m\alpha=A^{m-1}(A\alpha)=A^{m-1}(\lambda_0\alpha)=\lambda_0A^{m-1}\alpha=\cdots=\lambda_0^m\alpha$, 因此, λ_0^m 是方阵 A^m 的特征值, α 也是 A^m 对应于特征值 λ_0^m 的特征向量.

6. 设 λ_0 是方阵 A 的特征值, $f(\lambda)$ 是(所考虑数域上的)一个多项式, 证明 $f(\lambda_0)$ 是方阵 $f(A)$ 的特征值; 并且若 α 是 A 对应于特征值 λ_0 的特征向量, 则 α 也是 $f(A)$ 对应于特征值 $f(\lambda_0)$ 的特征向量.

证明: 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$. 因为 $A\alpha=\lambda_0\alpha$, 所以 $A^m\alpha=\lambda_0^m\alpha(m=$

$1,2,\cdots,n)$, $E\alpha=\alpha$, 进而,

$$f(A)\alpha=(a_nA^n+a_{n-1}A^{n-1}+\cdots+a_1A+a_0E)\alpha=a_nA^n\alpha+a_{n-1}A^{n-1}\alpha+\cdots+a_1A\alpha+a_0E\alpha$$

$$=a_n\lambda_0^n\alpha+a_{n-1}\lambda_0^{n-1}\alpha+\cdots+a_1\lambda_0\alpha+a_0\alpha=(a_n\lambda_0^n+a_{n-1}\lambda_0^{n-1}+\cdots+a_1\lambda_0+a_0)\alpha=f(\lambda_0)\alpha,$$

因此, $f(\lambda_0)$ 是方阵 $f(A)$ 的特征值, α 也是 $f(A)$ 对应于特征值 $f(\lambda_0)$ 的特征向量.

7. 已知三阶矩阵 A 的特征值为 $1,2,3$, 试求矩阵 $B=\frac{1}{2}A^*+3E$ 的特征值.

解: 由 $|A|=1\cdot2\cdot3=6$ 知, A 可逆, 且 A^{-1}的特征值为 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}$, 再由 $AA^*=|A|E$ 知, $A^*=6A^{-1}$, 因此, A^* 的特征值为 $6,3,2$. 令 $f(\lambda)=\frac{1}{2}\lambda+3$, 则 $B=f(A^*)$, 其特征值为 $f(6),f(3),f(2)$, 即 $6,\frac{9}{2},4$.

8. 已知向量 $\alpha=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ 是矩阵 $A=\begin{bmatrix}a&1&1\\2&0&1\\-1&2&2\end{bmatrix}$ 对应于特征值 λ 的特征向量, 试求 a 与 λ 的值.

解: 因为 $A\alpha=\lambda\alpha$, 即

$$\begin{bmatrix}a+2\\3\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda\\\lambda\\\lambda\end{bmatrix},$$

所以 $\lambda=3$, $a=1$.

9. 设向量 $\alpha=\begin{bmatrix}1\\k\\1\end{bmatrix}$ 是矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}$ 的特征向量, 试求常数 k 的值.

解: 由于 A 的特征多项式

$$\psi(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&-1\\-1&\lambda-2&-1\\-1&-1&\lambda-2\end{vmatrix}\xlongequal[(\lambda-2)r_1+r_3]{-r_1+r_2}\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&-1\\-(\lambda-1)&\lambda-1&0\\(\lambda-3)(\lambda-1)&-(\lambda-1)&0\end{vmatrix}$$

$$=(-1)(\lambda-1)^2\begin{vmatrix}-1&1\\\lambda-3&-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-4),$$

得到 A 的特征值为 $\lambda_1=1$(二重), $\lambda_2=4$.

若 $A\alpha=\lambda_1\alpha$, 即

$$\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\k\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\k\\1\end{bmatrix},$$

也即

$$\begin{bmatrix}3+k\\2+2k\\3+k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\k\\1\end{bmatrix},$$

推出 $k=-2$, 所以, 当 $k=-2$ 时, $\alpha=(1,-2,1)^{\mathrm{T}}$ 是 A 对应于特征值 $\lambda_1=1$ 的特征向量.

若 $A\alpha=\lambda_2\alpha$, 即

$$\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\k\\1\end{bmatrix}=4\begin{bmatrix}1\\k\\1\end{bmatrix},$$

也即

$$\begin{bmatrix}3+k\\2+2k\\3+k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\4k\\4\end{bmatrix},$$

推出 $k=1$, 所以, 当 $k=1$ 时, $\alpha=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 A 对应于特征值 $\lambda_2=4$ 的特征向量.

10. 对于方阵 A, 如果存在正整数 k, 使 $A^k=O$, 则称 A 为一个幂零矩阵. 试证幂零矩阵的特征值全都为 0.

证明: 设 λ 是 A 的任意一个特征值, 则 λ^k 是 A^k 的特征值, 而 $A^k=O$, 其特征值全都为 0, 所以, $\lambda^k=0$, 进而 $\lambda=0$. 由 λ 的任意性知, A 的特征值全都为 0.

11. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是方阵 A 对应于特征值 λ_0 的一组特征向量. 证明: 对任意一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$, 只要 $\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s\neq\mathbf{0}$, 那么 α 必是 A 对应于特征值 λ_0 的特征向量.

证明: 由于 $A\alpha=A(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s)=k_1A\alpha_1+k_2A\alpha_2+\cdots+k_sA\alpha_s=k_1\lambda_0\alpha_1+k_2\lambda_0\alpha_2+\cdots+k_s\lambda_0\alpha_s=\lambda_0(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s)=\lambda_0\alpha$, 且 $\alpha\neq\mathbf{0}$, 所以, α 是 A 对应于特征值 λ_0 的特征向量.

12. 设 α_1,α_2 分别是矩阵 A 对应于特征值 λ_1,λ_2 特征向量, 而 $\lambda_1\neq\lambda_2$, 证明 $\alpha_1+\alpha_2$ 不能是 A 的特征向量.

证明: 首先, 证明对应于不同特征值的两个特征向量必定线性无关. 反证法. 假设 α_1,α_2 是线性相关的, 则其中一个可由另外一个线性表示, 不妨设 α_1 可由 α_2 线性表示, 即存在数 k 使得 $\alpha_1=k\alpha_2$, 则 $A\alpha_1=A(k\alpha_2)=kA\alpha_2$, 即 $\lambda_1\alpha_1=k\lambda_2\alpha_2$, 因此 $\lambda_1\alpha_1=\lambda_2\alpha_1$, 进而, $(\lambda_1-\lambda_2)\alpha_1=\mathbf{0}$, 再由 $\alpha_1\neq\mathbf{0}$ 推出 $\lambda_1-\lambda_2=0$, 即 $\lambda_1=\lambda_2$, 与 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 矛盾. 所以, α_1,α_2 是线性无关的.

再用反证法证明本题的结论. 假设 $\alpha_1+\alpha_2$ 是 A 对应于某特征值 λ 的特征向量. 则 $A(\alpha_1+\alpha_2)=\lambda(\alpha_1+\alpha_2)$, 即 $A\alpha_1+A\alpha_2=\lambda(\alpha_1+\alpha_2)$, 进而, $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2=\lambda\alpha_1+\lambda\alpha_2$, 因此, $(\lambda-\lambda_1)\alpha_1+(\lambda-\lambda_2)\alpha_2=\mathbf{0}$. 再因为 α_1,α_2 是线性无关的, 所以, $\lambda-\lambda_1=\lambda-\lambda_2=0$, 即 $\lambda=\lambda_1=\lambda_2$, 矛盾. 所以, $\alpha_1+\alpha_2$ 不能是 A 的特征向量.

习题5.2(B)

1. 在所指明的数域上, 求矩阵 A 的特征值与特征向量:

1) $A=\begin{bmatrix}1&2&-1\\2&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$, 实数域; 2) $A=\begin{bmatrix}1&-1\\2&-1\end{bmatrix}$, 复数域.

解: 1) 由于 A 的特征多项式

$$\psi(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&1\\-2&\lambda-1&0\\1&0&\lambda-1\end{vmatrix}\xlongequal{-(\lambda-1)r_1+r_3}\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&1\\-2&\lambda-1&0\\-\lambda(\lambda-2)&2(\lambda-1)&0\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)\begin{vmatrix}-2&1\\-\lambda(\lambda-2)&2\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda-4),$$

得到 A 的特征值为 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=1-\sqrt{5}$, $\lambda_3=1+\sqrt{5}$.

对于 $\lambda_1=1$, 求解齐次线性方程组 $(\lambda_1E-A)x=\mathbf{0}$. 由于

$$\lambda_1E-A=\begin{bmatrix}0&-2&1\\-2&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{r_1\leftrightarrow r_3\\r_2\leftrightarrow r_3}]{2r_3+r_2}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-2&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$3-R(\lambda_1E-A)=3-2=1$, 基础解系含 1 个向量. 取自由未知量 $x_3=2$, 解得 $x_1=0,x_2=1$, 所以得到一个基础解系 $\xi_1=(0,1,2)^{\mathrm{T}}$, 于是, A 对应于特征值 $\lambda_1=1$ 的全部特征向量为

$$k_1\xi_1=k_1\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix},\ \text{其中}\ k_1\ \text{为任意非零实数.}$$

对于 $\lambda_2=1-\sqrt{5}$, 求解齐次线性方程组 $(\lambda_2E-A)x=\mathbf{0}$. 由于

$$\lambda_2E-A=\begin{bmatrix}-\sqrt{5}&-2&1\\-2&-\sqrt{5}&0\\1&0&-\sqrt{5}\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{\sqrt{5}r_3+r_1\\r_2\leftrightarrow r_3}]{2r_3+r_2}\begin{bmatrix}1&0&-\sqrt{5}\\0&-\sqrt{5}&-2\sqrt{5}\\0&-2&-4\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{\sqrt{5}r_3+r_2\\r_2\leftrightarrow r_3}]{r_3\times(-\frac{1}{2})}\begin{bmatrix}1&0&-\sqrt{5}\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$3-R(\lambda_2E-A)=3-2=1$, 基础解系含 1 个向量. 取自由未知量 $x_3=1$, 解得 $x_1=\sqrt{5},x_2=-2$, 所以得到一个基础解系 $\xi_2=(\sqrt{5},-2,1)^{\mathrm{T}}$, 于是, A 对应于特征值 $\lambda_2=1-\sqrt{5}$ 的全部特征向量为

$$k_2\xi_2=k_2\begin{bmatrix}\sqrt{5}\\-2\\1\end{bmatrix},\ \text{其中}\ k_2\ \text{为任意非零实数.}$$

对于 $\lambda_3=1+\sqrt{5}$, 求解齐次线性方程组 $(\lambda_3E-A)x=\mathbf{0}$. 由于

$$\lambda_2E-A=\begin{bmatrix}\sqrt{5}&-2&1\\-2&\sqrt{5}&0\\1&0&\sqrt{5}\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{-\sqrt{5}r_3+r_1\\r_2\leftrightarrow r_3}]{2r_3+r_2}\begin{bmatrix}1&0&\sqrt{5}\\0&\sqrt{5}&2\sqrt{5}\\0&-2&-4\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{-\sqrt{5}r_3+r_2\\r_2\leftrightarrow r_3}]{r_3\times(-\frac{1}{2})}\begin{bmatrix}1&0&\sqrt{5}\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$3-R(\lambda_3E-A)=3-2=1$, 基础解系含 1 个向量. 取自由未知量 $x_3=-1$, 解得 $x_1=\sqrt{5},x_2=2$, 所以得到一个基础解系 $\xi_3=(\sqrt{5},2,-1)^{\mathrm{T}}$, 于是, A 对应于特征值 $\lambda_2=1-\sqrt{5}$ 的全部特征向量为

$$k_3\xi_3=k_3\begin{bmatrix}\sqrt{5}\\2\\-1\end{bmatrix},\ \text{其中}\ k_3\ \text{为任意非零实数.}$$

2) 由于 A 的特征多项式

$$\psi(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&1\\-2&\lambda+1\end{vmatrix}=\lambda^2+1,$$

得到 A 的特征值为 $\lambda_1=\mathrm{i}$, $\lambda_2=-\mathrm{i}$.

对于 $\lambda_1=\mathrm{i}$, 求解齐次线性方程组 $(\lambda_1E-A)x=\mathbf{0}$. 由于

$$\lambda_1E-A=\begin{bmatrix}\mathrm{i}-1&1\\-2&\mathrm{i}+1\end{bmatrix}\xrightarrow{-(\mathrm{i}+1)r_1+r_2}\begin{bmatrix}\mathrm{i}-1&1\\0&0\end{bmatrix},$$

$2-R(\lambda_1E-A)=2-1=1$, 基础解系含 1 个向量. 取自由未知量 $x_1=1$, 解得 $x_2=1-\mathrm{i}$, 所以得到一个基础解系 $\xi_1=(1,1-\mathrm{i})^{\mathrm{T}}$, 于是, A 对应于特征值 $\lambda_1=\mathrm{i}$ 的全部特征向量为

$$c_1\xi_1=c_1\begin{bmatrix}1\\1-\mathrm{i}\end{bmatrix},\ \text{其中}\ c_1\ \text{为任意非零复数.}$$

对于 $\lambda_2=-\mathrm{i}$, 求解齐次线性方程组 $(\lambda_2E-A)x=\mathbf{0}$. 由于

$$\lambda_1E-A=\begin{bmatrix}-\mathrm{i}-1&1\\-2&-\mathrm{i}+1\end{bmatrix}\xrightarrow{(\mathrm{i}-1)r_1+r_2}\begin{bmatrix}-\mathrm{i}-1&1\\0&0\end{bmatrix},$$

$2-R(\lambda_2E-A)=2-1=1$, 基础解系含 1 个向量. 取自由未知量 $x_1=1$, 解得 $x_2=1+\mathrm{i}$, 所以得到一个基础解系 $\xi_2=(1,1+\mathrm{i})^{\mathrm{T}}$, 于是, A 对应于特征值 $\lambda_2=-\mathrm{i}$ 的全部特征向量为

$$c_2\xi_2=c_2\begin{bmatrix}1\\1+\mathrm{i}\end{bmatrix}, \text{ 其中 } c_2 \text{ 为任意非零复数.}$$

2. 设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2=E$. 试证: A 的特征值只能是 1 或 -1; 如果 A 的特征值全是 1, 则必有 $A=E$.

证明: 设 λ 是 A 的任意一个特征值, 则 λ^2 是 A^2 的特征值, 而 $A^2=E$, 其特征值全是 1, 所以, $\lambda^2=1$, 推出 $\lambda=1$, 或者 $\lambda=-1$. 再由 λ 的任意性知, A 的特征值只能是 1 或 -1.

如果 A 的特征值全是 1, 此时 -1 不是 A 的特征值, 因而, $\psi(-1)=|(-1)E-A|\neq 0$, 注意到 $|(-1)E-A|=|-(E+A)|=(-1)^n|E+A|$, 所以, $|E+A|\neq 0$, 因此, $E+A$ 可逆, 由此及 $(E+A)(E-A)=E-A^2=O$, 推出 $E-A=O$, 立刻得到 $A=E$.

此处证明 $B:=E+A$ 可逆的另一办法是, 设 λ 为 B 任一的特征值, 则 $\lambda-1$ 为 $B-E=A$ 的特征值, 而 A 的特征值全是 1, 因此 $\lambda=2$, 由 λ 的任意性知, B 的特征值全是 2, 特征值全非零, 故 B 可逆.

3. 设 n 阶矩阵 A 的全部特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$, 试证: $\mathrm{tr}A=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$.

证明: 记 A 的特征多项式 $\psi(\lambda)=\lambda^n+c_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+c_1\lambda+c_0$. 由条件知, $\psi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$, 此时可以看出 $c_{n-1}=-\lambda_1-\lambda_2-\cdots-\lambda_n=-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)$, 而 $c_{n-1}=-\mathrm{tr}A$, 所以, $\mathrm{tr}A=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$.

4. 设 A 为 n 阶矩阵, 如果任何 n 维非零向量都是 A 的特征向量, 证明 A 必是一个标量矩阵.

证明: 设 n 维基本向量 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 分别是 A 对应于特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的特征向量, 即有 $Ae_i=\lambda_ie_i(i=1,2,\cdots,n)$, 由于 Ae_i 即是 A 的第 i 列, 故 A 的第 i 列为 λ_ie_i. 因此, $A=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$. 再设 $\alpha=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$ 是 A 对应于特征值 λ 的特征向量, 即有 $A\alpha=\lambda\alpha$, 则有 $(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)^{\mathrm{T}}=(\lambda,\lambda,\cdots,\lambda)^{\mathrm{T}}$, 因此, $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=\lambda$, 立刻推出 $A=\lambda E$, A 是一个标量矩阵.

5. 设 n 阶矩阵 A 的每行 n 个元素之和均为常数 a. 试证: 1) a 是 A 的一个特征值; 2) 当 A 可逆时, A^{-1} 的每行元素之和均为 $\frac{1}{a}$.

证明: 令 $\alpha=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$. 则 $A\alpha=(a,a,\cdots,a)^{\mathrm{T}}=a\alpha$, 显然, $\alpha\neq\mathbf{0}$, 所以, a 是 A 的一个特征值, α 是 A 对应于特征值 a 的特征向量. 当 A 可逆时, $a\neq 0$, $\frac{1}{a}$ 是 A^{-1} 的特征值, α 是 A^{-1} 对应于特征值 $\frac{1}{a}$ 的特征向量, 所以, $A^{-1}\alpha=\frac{1}{a}\alpha$, 由此推出 A^{-1} 的每行元素之和均为 $\frac{1}{a}$.

5.3 习题5.3

习题5.3(A)

1. 证明矩阵相似关系具有如下性质: 1) 反身性: 对任何方阵 A, 总有 $A\sim A$; 2) 对称性: 若 $A\sim B$, 则 $B\sim A$; 3) 传递性: 若 $A\sim B, B\sim C$, 则 $A\sim C$.

证明: 1) 对任何方阵 A, 取 $P=E$, 则 $P^{-1}AP=E^{-1}AE=EAE=A$, 总有 $A\sim A$.

2) 若 $A\sim B$, 则存在可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=B$. 记 $Q=P^{-1}$, 此时 $Q^{-1}BQ=PBP^{-1}=A$, 则 $B\sim A$.

3) 若 $A\sim B, B\sim C$, 则存在可逆矩阵 P_1,P_2 使得 $P_1^{-1}AP_1=B$, $P_2^{-1}BP_2=C$, 记 $Q=P_1P_2$, 此时 $Q^{-1}AQ=P_2^{-1}P_1^{-1}AP_1P_2=P_2^{-1}BP_2=C$, 则 $A\sim C$.

2. 相似矩阵的迹相同.

证明: 因为相似的矩阵其特征多项式相同, 从而全部特征值相同, 而矩阵的迹等于全部特征值之和, 所以相似矩阵的迹相同.

3. 判明习题 5.2(A) 第 1 题中各矩阵能否相似对角化. 若能, 求出一个相似因子 P 并给出相应的对角矩阵 Λ.

解: 1) 能. 令

$$P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&1&-1\end{bmatrix},$$

则

$$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{bmatrix}2&&\\&2&\\&&-2\end{bmatrix}.$$

2) 能. 令

$$P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{bmatrix}1&2&0\\-1&-1&0\\-1&0&1\end{bmatrix},$$

则

$$P^{-1}BP=\Lambda=\begin{bmatrix}-2&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}.$$

3) 在实数域不能. 在复数域能.

4) 能. 令

$$P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&-2&0\\2&0&-1\end{bmatrix},$$

则

$$P^{-1}BP=\Lambda=\begin{bmatrix}11&&\\&2&\\&&2\end{bmatrix}.$$

5) 能. 令

$$P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\-1&0&2\end{bmatrix},$$

则

$$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{bmatrix}0&&\\&-1&\\&&9\end{bmatrix}.$$

6) 不能. 因为 $m_1=1<n_1=3$.

4. 设

$$A=\begin{bmatrix}0&10&6\\1&-3&-3\\-2&10&8\end{bmatrix},$$

利用 A 相似于对角矩阵来求 A^{10}.

解: 由于 A 的特征多项式

$$\psi(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-10&-6\\-1&\lambda+3&3\\2&-10&\lambda-8\end{vmatrix}\overset{\lambda r_2+r_1}{\underset{2r_2+r_3}{=\!=\!=}}\begin{vmatrix}0&(\lambda-2)(\lambda+5)&3(\lambda-2)\\-1&\lambda+3&3\\0&2(\lambda-2)&\lambda-2\end{vmatrix}$$
$$=(\lambda-2)^2(-1)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}\lambda+5&3\\2&1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)^2,$$

得到 A 的特征值为 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$(二重).

对于 $\lambda_1=1$, 求解齐次线性方程组 $(\lambda_1E-A)x=\mathbf{0}$. 由于

$$\lambda_1E-A=\begin{bmatrix}1&-10&-6\\-1&4&3\\2&-10&-7\end{bmatrix}\xrightarrow[-2r_1+r_3]{r_1+r_2}\begin{bmatrix}1&-10&-6\\0&-6&-3\\0&10&5\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{-5r_2+r_3\\5r_2+r_1}]{r_2\times(-\frac{1}{3})}\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&2&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$3-R(\lambda_1E-A)=3-2=1$, 基础解系含 1 个向量. 取自由未知量 $x_3=2$, 解得 $x_1=2,x_2=-1$, 所以得到一个基础解系 $\xi_1=(2,-1,2)^{\mathrm{T}}$.

对于 $\lambda_2=2$, 求解齐次线性方程组 $(\lambda_2E-A)x=\mathbf{0}$. 由于

$$\lambda_2E-A=\begin{bmatrix}2&-10&-6\\-1&5&3\\2&-10&-6\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{r_1\times\frac{1}{2}\\r_1+r_2}]{-r_1+r_3}\begin{bmatrix}1&-5&-3\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$3-R(\lambda_2E-A)=3-1=2$, 基础解系含 2 个向量. 取自由未知量 x_2,x_3, 令 $\begin{bmatrix}x_2\\x_3\end{bmatrix}$ 为 $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$, 分别解得 $x_1=5,x_1=3$, 所以得到一个基础解系 $\xi_2=(5,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\xi_3=(3,0,1)^{\mathrm{T}}$.

于是, 令 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$, 则 $P^{-1}AP=\mathrm{diag}(1,2,2)=:\Lambda$, 进而, $A=P\Lambda P^{-1}$, 从而 $A^{10}=P\Lambda^{10}P^{-1}$. 下面来求 P^{-1}.

$$(P,E)=\begin{bmatrix}2&5&3&1&0&0\\-1&1&0&0&1&0\\2&0&1&0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_1\leftrightarrow r_2]{r_2\times(-1)}\begin{bmatrix}1&-1&0&0&-1&0\\2&5&3&1&0&0\\2&0&1&0&0&1\end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow[-2r_1+r_3]{-2r_1+r_2}\begin{bmatrix}1&-1&0&0&-1&0\\0&7&3&1&2&0\\0&2&1&0&2&1\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{r_2+r_1\\-2r_2+r_3}]{-3r_3+r_2}\begin{bmatrix}1&0&0&1&-5&-3\\0&1&0&1&-4&-3\\0&0&1&-2&10&7\end{bmatrix}$$

所以,

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}1&-5&-3\\1&-4&-3\\-2&10&7\end{bmatrix},$$

从而, 有

$$
\begin{aligned}
A^{10}=P\Lambda^{10}P^{-1}&=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{10} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 1 & -4 & -3 \\ -2 & 10 & 7 \end{bmatrix} \\
&=\begin{bmatrix} 2 & 5\cdot 2^{10} & 3\cdot 2^{10} \\ -1 & 2^{10} & 0 \\ 2 & 0 & 2^{10} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 1 & -4 & -3 \\ -2 & 10 & 7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1022 & 10230 & 6138 \\ 1023 & -4091 & -3069 \\ -2046 & 10230 & 7162 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

5. 设 $A\sim B$, 证明: 若 A 是幂等矩阵, 则 B 亦是幂等矩阵; 若 A 是幂零矩阵, 则 B 亦是幂零矩阵.

证明: 由于 $A\sim B$, 则存在可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=B$, 进而, $B^2=(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)=P^{-1}A^2P$, 若 $A^2=A$, 则 $B^2=P^{-1}AP=B$, B 亦是幂等矩阵. 若 A 是幂零矩阵, 即存在正整数 k 使得 $A^k=O$, 因为 $B^k=(P^{-1}AP)^k=P^{-1}A^kP=P^{-1}OP=O$, B 亦是幂零矩阵.

6. 设 $B=P^{-1}AP$. 证明: 若 α 是方阵 A 对应于特征值 λ_0 的特征向量, 则 $P^{-1}\alpha$ 是 B 对应于特征值 λ_0 的特征向量.

证明: 由于 $A\alpha=\lambda_0\alpha$, 则 $P^{-1}A\alpha=\lambda_0P^{-1}\alpha$, 进而, $P^{-1}APP^{-1}\alpha=\lambda_0P^{-1}\alpha$, 即 $B(P^{-1}\alpha)=\lambda_0(P^{-1}\alpha)$, 且 $P^{-1}\alpha\neq\mathbf{0}$, 因为若 $P^{-1}\alpha=\mathbf{0}$, 则 $\alpha=\mathbf{0}$, 而 α 是方阵 A 对应于特征值 λ_0 的特征向量, $\alpha\neq\mathbf{0}$, 矛盾. 所以, $P^{-1}\alpha$ 是 B 对应于特征值 λ_0 的特征向量.

7. 证明: 方阵 A 可相似对角化的充分必要条件是对于 A 的每个 $n_i(n_i\geq 2)$ 重特征值 λ_i 都有 $R(\lambda_iE-A)=n-n_i$.

证明: 因为, 方阵 A 可相似对角化的充分必要条件是对于 A 的每个 $n_i(n_i\geq 2)$ 重特征值 λ_i 都存在与之对应的 n_i 个线性无关的特征向量, 即齐次线性方程组 $(\lambda_iE-A)x=\mathbf{0}$ 的基础解系含 n_i 解向量, 而我们知道, 齐次线性方程组 $(\lambda_iE-A)x=\mathbf{0}$ 的基础解系含解向量的个数为 $n-R(\lambda_iE-A)$, 所以, $n_i=n-R(\lambda_iE-A)$, 即 $R(\lambda_iE-A)=n-n_i$, 故方阵 A 可相似对角化的充分必要条件是对于 A 的每个 $n_i(n_i\geq 2)$ 重特征值 λ_i 都有 $R(\lambda_iE-A)=n-n_i$.

习题5.3(B)

1. 证明两矩阵

$$
A=\begin{bmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix} a_3 & & \\ & a_2 & \\ & & a_1 \end{bmatrix}
$$

相似, 并求出相似因子 P, 使 $P^{-1}AP=B$.

证明: 令

$$
P=\begin{bmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{bmatrix},
$$

则 $P^{-1}=P$, 且

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix} & & 1\\ & 1 & \\ 1 & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix} & & 1\\ & 1 & \\ 1 & & \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} & & a_3\\ & a_2 & \\ a_1 & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & & 1\\ & 1 & \\ 1 & & \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} a_3 & & \\ & a_2 & \\ & & a_1\end{bmatrix}=B,$$

所以 A 与 B 相似, 上述矩阵 P 是一个相似因子.

2. 设 A_1, B_1 都是 n_1 阶矩阵, A_2, B_2 都是 n_2 阶矩阵, 并且 $A_1\sim B_1, A_2\sim B_2$, 试证

$$\begin{bmatrix} A_1 & \\ & A_2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} B_1 & \\ & B_2\end{bmatrix}.$$

证明: 由于 $A_1\sim B_1, A_2\sim B_2$, 所以存在 n_1 阶可逆矩阵 P_1, n_2 阶可逆矩阵 P_2, 使得 $P_1^{-1}A_1P_1=B_1$, $P_2^{-1}A_2P_2=B_2$, 则矩阵

$$\begin{bmatrix} P_1 & \\ & P_2\end{bmatrix}\text{ 可逆且 }\begin{bmatrix} P_1 & \\ & P_2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} P_1^{-1} & \\ & P_2^{-1}\end{bmatrix},$$

因此,

$$\begin{bmatrix} P_1 & \\ & P_2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} A_1 & \\ & A_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_1 & \\ & P_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P_1^{-1}A_1P_1 & \\ & P_2^{-1}A_2P_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} B_1 & \\ & B_2\end{bmatrix},$$

即

$$\begin{bmatrix} A_1 & \\ & A_2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} B_1 & \\ & B_2\end{bmatrix}.$$

3. 设 A, B 均为 n 阶矩阵且 A 可逆, 证明 $AB\sim BA$.

证明: 因为 $A^{-1}(AB)A=BA$, 所以 $AB\sim BA$.

4. 设 A 是幂零矩阵但 $A\neq O$, 试证 A 不能相似对角化.

证明: 反证法. 若 A 能相似对角化, 即存在可逆矩阵 P 使得

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix},$$

由于 A 是幂零矩阵, 即存在正整数 k 使得 $A^k=O$, 则有

$$P^{-1}A^kP=\begin{bmatrix}\lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k\end{bmatrix}=O,$$

进而 $\lambda_1^k=\lambda_2^k=\cdots=\lambda_n^k=0$, 继而 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$, 因此, $P^{-1}AP=O$, 进而 $A=POP^{-1}=O$, 与 $A\neq O$ 矛盾. 所以, A 不能相似对角化.

5. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & -4\\ -2 & x & -2\\ -4 & -2 & 1\end{bmatrix}$ 与 $\Lambda=\begin{bmatrix} y & & \\ & z & \\ & & -4\end{bmatrix}$ 相似, 求 x, y, z.

解: 由于相似的矩阵具有完全相同的特征值, 而 $y, z, -4$ 是 Λ 的特征值, 因此也是 A 的特征值, 因此,

$$0=\psi(-4)=|(-4)E-A|=\begin{vmatrix}-5&2&4\\2&-4-x&2\\4&2&-5\end{vmatrix}\xlongequal[\frac{5}{2}r_2+r_3]{-2r_2+r_1}\begin{vmatrix}-9&10+2x&0\\2&-4-x&2\\9&-8-\frac{5}{2}x&0\end{vmatrix}$$

$$=2(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}-9&10+2x\\9&-8-\frac{5}{2}x\end{vmatrix}=-2(72+\frac{45}{2}x-90-18x)=36-9x,$$

所以得出 $x=4$. 进而, A 的特征多项式

$$\psi(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&4\\2&\lambda-4&2\\4&2&\lambda-1\end{vmatrix}\xlongequal[\frac{1-\lambda}{2}r_2+r_3]{-2r_2+r_1}\begin{vmatrix}\lambda-5&10-2\lambda&0\\2&\lambda-4&2\\5-\lambda&\frac{1}{2}\lambda(5-\lambda)&0\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-5)^2 2(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&-2\\-1&-\frac{\lambda}{2}\end{vmatrix}=(\lambda-5)^2(\lambda+4),$$

所以, A 的全部特征值是 $\lambda_1=5$(二重), $\lambda_2=-4$, 因此, $y=z=5$.

6. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&-3&3\\a&-5&3\\6&-6&b\end{bmatrix}$ 有二重特征值 $\lambda=-2$, 并且 A 可以相似对角化, 求 a, b 的值.

解: 因为 A 可以相似对角化且 $\lambda=-2$ 是 A 的二重特征值, 因此齐次线性方程组 $((-2)E-A)x=\mathbf{0}$ 的基础解系有 2 个向量, 所以 $R((-2)E-A)=3-2=1$, 而

$$(-2)E-A=\begin{bmatrix}-3&3&-3\\-a&3&-3\\-6&6&-2-b\end{bmatrix}\xrightarrow[6r_1+r_3]{\substack{r_1\times(-\frac{1}{3})\\ ar_1+r_2}}\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&3-a&-3+a\\0&0&4-b\end{bmatrix},$$

再由 $R((-2)E-A)=1$ 知, $a=3$, $b=4$.

5.4　习题5.4

习题5.4(A)

1. 已知 n 维实向量 α, β 正交, 证明: 对任意实数 k, ℓ, 向量 $k\alpha$ 与 $\ell\beta$ 也正交.

证明: 因为 $(k\alpha, \ell\beta)=k\ell(\alpha, \beta)=0$, 所以向量 $k\alpha$ 与 $\ell\beta$ 也正交.

2. 设 $\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ 都是 n 维实向量, 并且 α 与 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 都正交, 证明: α 与 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的任一(实系数的)线性组合也正交.

证明: 对于 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的任一(实系数的)线性组合 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3$, 因为 $(\alpha, k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3)=k_1(\alpha, \beta_1)+k_2(\alpha, \beta_2)+k_3(\alpha, \beta_3)=0$, 所以 α 与 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的任一(实系数的)线性组合也正交.

3. 证明: 如果 n 维实向量 α 与任何 n 维实向量都正交, 则 $\alpha=\mathbf{0}$.

证明: 因为 n 维实向量 α 与任何 n 维实向量都正交, 则 $(\alpha, \alpha)=0$, 由此推出 $\alpha=\mathbf{0}$.

4. 利用 Schmidt 单位正交化方法求与下列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 等价的单位正交组 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$:

1) $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \alpha_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \alpha_3=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$;　2) $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix}, \alpha_2=\begin{bmatrix}1\\2\\0\\1\end{bmatrix}, \alpha_3=\begin{bmatrix}0\\-1\\0\\1\end{bmatrix}$.

解: 1) 先正交化. 令 $\beta_1=\alpha_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$, 则 $(\beta_1, \beta_1)=2, ||\beta_1||=\sqrt{2}$. 再令 $\beta_2=k_1^{(2)}\beta_1+\alpha_2$, 其

中 $k_1^{(2)}=-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}=-\frac{1}{2}$, 则

$$\beta_2=-\frac{1}{2}\beta_1+\alpha_2=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 1\end{bmatrix},\qquad (\beta_2,\beta_2)=\frac{3}{2},\qquad ||\beta_2||=\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

再令 $\beta_3=k_1^{(3)}\beta_1+k_2^{(3)}\beta_2+\alpha_3$, 其中 $k_1^{(3)}=-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}=-\frac{2}{2}=-1$, $k_2^{(3)}=-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}=-\frac{-1}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}$, 则

$$\beta_3=-\beta_1+\frac{2}{3}\beta_2+\alpha_3=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3}\end{bmatrix},\qquad (\beta_3,\beta_3)=\frac{1}{3},\qquad ||\beta_3||=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

再单位化, 得到与向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 等价的单位正交组 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$:

$$\gamma_1=\frac{\beta_1}{||\beta_1||}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0\end{bmatrix},\qquad \gamma_2=\frac{\beta_2}{||\beta_2||}=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{6}\\ \frac{\sqrt{6}}{6}\\ \frac{\sqrt{6}}{3}\end{bmatrix},\qquad \gamma_3=\frac{\beta_3}{||\beta_3||}=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{3}}{3}\\ -\frac{\sqrt{3}}{3}\end{bmatrix}.$$

2) 先正交化. 令 $\beta_1=\alpha_1=(1,1,0,1)^{\mathrm{T}}$, 则 $(\beta_1,\beta_1)=3,||\beta_1||=\sqrt{3}$. 再令 $\beta_2=k_1^{(2)}\beta_1+\alpha_2$, 其中 $k_1^{(2)}=-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}=-\frac{4}{3}$, 则

$$\beta_2=-\frac{4}{3}\beta_1+\alpha_2=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\\ 0\\ -\frac{1}{3}\end{bmatrix},\qquad (\beta_2,\beta_2)=\frac{2}{3},\qquad ||\beta_2||=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

再令 $\beta_3=k_1^{(3)}\beta_1+k_2^{(3)}\beta_2+\alpha_3$, 其中 $k_1^{(3)}=-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}=-\frac{0}{3}=0$, $k_2^{(3)}=-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}=-\frac{-1}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}$, 则

$$\beta_3=0\beta_1+\frac{3}{2}\beta_2+\alpha_3=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\ 0\\ 0\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix},\qquad (\beta_3,\beta_3)=\frac{1}{2},\qquad ||\beta_3||=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

再单位化, 得到与向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 等价的单位正交组 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$:

$$\gamma_1=\frac{\beta_1}{||\beta_1||}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{3}}{3}\\ 0\\ \frac{\sqrt{3}}{3}\end{bmatrix},\qquad \gamma_2=\frac{\beta_2}{||\beta_2||}=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{6}\\ \frac{\sqrt{6}}{3}\\ 0\\ -\frac{\sqrt{6}}{6}\end{bmatrix},\qquad \gamma_3=\frac{\beta_3}{||\beta_3||}=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0\\ 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}.$$

5. 求齐次线性方程组 $2x_1+x_2+2x_3=0$ 的单位正交基础解系.

解: 因为系数矩阵的秩为 1, $3-1=2$, 所以, 该方程组的基础解系有 2 个向量, 取 $\begin{bmatrix}x_2\\ x_3\end{bmatrix}$ 为 $\begin{bmatrix}-2\\ 0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$, 分别解得 $x_1=1,x_1=-1$, 所以得到一个基础解系

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 0\end{bmatrix},\qquad \alpha_2=\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}.$$

先正交化. 令 $\beta_1=\alpha_1=(1,-2,0)^{\mathrm{T}}$, 则 $(\beta_1,\beta_1)=5,||\beta_1||=\sqrt{5}$. 再令 $\beta_2=k_1^{(2)}\beta_1+\alpha_2$, 其中 $k_1^{(2)}=-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}=-\frac{-1}{5}=\frac{1}{5}$, 则

$$\beta_2=\frac{1}{5}\beta_1+\alpha_2=\begin{bmatrix}-\frac{4}{5}\\ -\frac{2}{5}\\ 1\end{bmatrix},\qquad (\beta_2,\beta_2)=\frac{45}{25},\qquad ||\beta_2||=\frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

再单位化, 得到与向量组 α_1,α_2 等价的单位正交基础解系 γ_1,γ_2:

$$\gamma_1=\frac{\beta_1}{||\beta_1||}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{5}}{5}\\ -\frac{2\sqrt{5}}{5}\\ 0\end{bmatrix},\qquad \gamma_2=\frac{\beta_2}{||\beta_2||}=\begin{bmatrix}-\frac{4\sqrt{5}}{15}\\ -\frac{2\sqrt{5}}{15}\\ \frac{\sqrt{5}}{3}\end{bmatrix}.$$

6. 判断下列矩阵哪几个是正交矩阵:

1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$; 3) $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$;

4) $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$; 5) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; 6) $\begin{bmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{bmatrix}$.

解: 1) 是; 2) 不是, 正交但不是单位向量; 3) 是; 4) 是; 5) 不是, 正交但不是单位向量; 6) 是.

7. 证明: 若 A 为正交矩阵, 则 $-A, A^{\mathrm{T}}, A^{-1}$ 也是正交矩阵.

证明: 若 A 为正交矩阵, 则 $A^{\mathrm{T}}A = E$, $A^{-1} = A^{\mathrm{T}}$, $AA^{\mathrm{T}} = E$, 从而 $(-A)^{\mathrm{T}}(-A) = A^{\mathrm{T}}A = E$, $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = AA^{\mathrm{T}} = E$, $(A^{-1})^{\mathrm{T}}A^{-1} = (A^{\mathrm{T}})^{-1}A^{-1} = (AA^{\mathrm{T}})^{-1} = E^{-1} = E$, 所以, $-A, A^{\mathrm{T}}, A^{-1}$ 也是正交矩阵.

8. 证明: 若 A, B 都是 n 阶正交矩阵, 则 AB 也是 n 阶正交矩阵.

证明: 若 A, B 都是 n 阶正交矩阵, 则 $A^{\mathrm{T}}A = E$, $B^{\mathrm{T}}B = E$, 从而 $(AB)^{\mathrm{T}}(AB) = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}AB = B^{\mathrm{T}}EB = E$, 所以, AB 也是 n 阶正交矩阵.

9. 证明: 正交矩阵的行列式值只能为 1 或 -1.

证明: 若 A 为正交矩阵, 则 $A^{\mathrm{T}}A = E$, 从而 $|A^{\mathrm{T}}||A| = |E| = 1$, 即 $|A|^2 = 1$, 所以 $|A| = 1$ 或 -1.

10. 证明: n 阶矩阵 $A = (a_{ij})$ 为 H 矩阵的充分必要条件是 $\bar{a}_{ij} = a_{ji}(i, j = 1, 2, \cdots, n)$.

证明: n 阶矩阵 $A = (a_{ij})$ 为 H 矩阵当且仅当 $A^{\mathrm{H}} = A$, 即 $\bar{a}_{ij} = a_{ji}(i, j = 1, 2, \cdots, n)$.

11. 证明: 若 A 为 H 矩阵, 则 $|A|$ 的值为实数.

证明: 若 A 为 H 矩阵, 则 $A^{\mathrm{H}} = A$, 进而 $|A^{\mathrm{H}}| = |A|$, 即 $|\overline{A^{\mathrm{T}}}| = |A|$, 继而 $\overline{|A^{\mathrm{T}}|} = |A|$, 因此 $\overline{|A|} = |A|$, 所以, $|A|$ 的值为实数.

12. 证明: 若 A 为 H 矩阵, k 为实数, 则 kA 仍为 H 矩阵.

证明: 若 A 为 H 矩阵, 则 $A^{\mathrm{H}} = A$, 进而 $(kA)^{\mathrm{H}} = \bar{k}A^{\mathrm{H}} = kA$, 所以, kA 仍为 H 矩阵.

13. 证明: 若 A 为 H 矩阵, 则 $A^{\mathrm{T}}, \overline{A}, A^{\mathrm{H}}$ 也都是 H 矩阵.

证明: 若 A 为 H 矩阵, 则 $A^{\mathrm{H}} = A$, 从而 $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{H}} = \overline{(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}} = \overline{A} = \overline{A^{\mathrm{H}}} = \overline{\overline{A^{\mathrm{T}}}} = A^{\mathrm{T}}$, $(\overline{A})^{\mathrm{H}} = \overline{(\overline{A})^{\mathrm{T}}} = \overline{\overline{A^{\mathrm{T}}}} = A^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{H}})^{\mathrm{T}} = (\overline{A^{\mathrm{T}}})^{\mathrm{T}} = \overline{(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}} = \overline{A}$, $(A^{\mathrm{H}})^{\mathrm{H}} = A = A^{\mathrm{H}}$, 所以, $A^{\mathrm{T}}, \overline{A}, A^{\mathrm{H}}$ 也都是 H 矩阵.

14. 证明: 若 A, B 均为 n 阶 H 矩阵, 则 $A + B$ 也是 n 阶 H 矩阵.

证明: 若 A, B 均为 n 阶 H 矩阵, 则 $A^{\mathrm{H}} = A, B^{\mathrm{H}} = B$, 从而 $(A + B)^{\mathrm{H}} = A^{\mathrm{H}} + B^{\mathrm{H}} = A + B$, 所以, $A + B$ 也是 n 阶 H 矩阵.

15. 证明: 若 A, B 都是 n 阶酉矩阵, 则 AB 也是 n 阶酉矩阵.

证明: 若 A, B 都是 n 阶酉矩阵, 则 $A^{\mathrm{H}}A = E, B^{\mathrm{H}}B = E$, 从而 $(AB)^{\mathrm{H}}(AB) = B^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}}AB = B^{\mathrm{H}}EB = E$, 所以, AB 也是 n 阶酉矩阵.

习题5.4(B)

1. 对于 n 维非零实向量 α,β, 它们的夹角 θ 按下式确定

$$\cos\theta=\frac{(\alpha,\beta)}{||\alpha||||\beta||},\quad 0\le\theta\le\pi.$$

依此求 4 维向量 $\alpha=(1,2,2,3)^{\mathrm{T}}$ 与 $\beta=(3,1,5,1)^{\mathrm{T}}$ 的夹角.

解: 由于 $(\alpha,\beta)=18,||\alpha||=\sqrt{18},||\beta||=6$, 计算得到 $\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以夹角 $\theta=\frac{\pi}{4}$.

2. 证明: 实方阵 A 为正交矩阵的充分必要条件是 $AA^{\mathrm{T}}=E$.

证明: 实方阵 A 为正交矩阵当且仅当 $A^{\mathrm{T}}A=E$, 等价于 $A^{-1}=A^{\mathrm{T}}$, 也就等价于 $AA^{\mathrm{T}}=E$.

3. 证明: 实方阵 A 为正交矩阵的充分必要条件是 A 的行向量组为单位正交组.

证明: 实方阵 A 为正交矩阵当且仅当 $AA^{\mathrm{T}}=E$, 即 $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}})=E$, 等价于 A^{T} 是正交矩阵, 也就等价于 A^{T} 的列向量组是单位正交组, 即 A 的行向量组为单位正交组.

4. 证明: 若 A 为正交矩阵, 则对任意正整数 k, A^{-k} 亦为正交矩阵, 其中 $A^{-k}=(A^k)^{-1}$.

证明: 若 A 为正交矩阵, 则对任意正整数 k, A^k 为正交矩阵, 从而 $(A^k)^{-1}$ 为正交矩阵, 即 A^{-k} 亦为正交矩阵.

5. 证明: 若 A 为正交矩阵, 则 A^* 亦为正交矩阵.

证明: 若 A 为正交矩阵, 则 A^{-1} 为正交矩阵, $-A^{-1}$ 为正交矩阵, 且 $|A|=1$ 或 -1. 而由 $AA^*=|A|E$ 知, $A^*=A^{-1}$ 或 $-A^{-1}$, 所以, A^* 亦为正交矩阵.

6. 试举例说明正交矩阵的特征值未必都是实数.

解: 例如 $A=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$ 是正交矩阵, 但 $\psi(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&1\\-1&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+1$, 特征值为 $\lambda_1=\mathrm{i},\lambda_2=-\mathrm{i}$, 不是实数.

7. 设 λ 是正交矩阵 A 的特征值, 证明 $|\lambda|=1$ ($|\lambda|$ 表示复数 λ 的模).

证明: 设 α 是 A 对应于特征值 λ 的特征向量, 则 $A\alpha=\lambda\alpha$, 两边转置再共轭得到 $\overline{\alpha^{\mathrm{T}}}\,\overline{A^{\mathrm{T}}}=\bar{\lambda}\overline{\alpha^{\mathrm{T}}}$, 注意 A 是实矩阵, $\overline{A^{\mathrm{T}}}=A^{\mathrm{T}}$, 所以, $\overline{\alpha^{\mathrm{T}}}A^{\mathrm{T}}=\bar{\lambda}\overline{\alpha^{\mathrm{T}}}$, 进而 $\overline{\alpha^{\mathrm{T}}}A^{\mathrm{T}}A\alpha=\bar{\lambda}\overline{\alpha^{\mathrm{T}}}\lambda\alpha$, 而 A 是正交矩阵, 所以, 有 $\overline{\alpha^{\mathrm{T}}}\alpha=\bar{\lambda}\lambda\overline{\alpha^{\mathrm{T}}}\alpha=|\lambda|^2\overline{\alpha^{\mathrm{T}}}\alpha$, 即 $(|\lambda|^2-1)\overline{\alpha^{\mathrm{T}}}\alpha=0$, 而由于 α 是特征向量, α 是非零向量, 所以 $\overline{\alpha^{\mathrm{T}}}\alpha>0$, 由此推出 $|\lambda|^2=1$, 故 $|\lambda|=1$.

8. 证明: 若 λ 是正交矩阵 A 的特征值, 则 $\frac{1}{\lambda}$ 也是 A 的特征值.

证明: 若 λ 是正交矩阵 A 的特征值, 则 $|\lambda|=1$, 所以 $\lambda\neq 0$, 或者由正交矩阵是可逆矩阵, 同样推出 $\lambda\neq 0$. 此时 $\frac{1}{\lambda}$ 是 A^{-1} 的特征值, 而由 A 是正交矩阵知, $A^{-1}=A^{\mathrm{T}}$, 所以 $\frac{1}{\lambda}$ 是 A^{T} 的特征值, 而 A 与 A^{T} 具有完全相同的特征值, 所以, $\frac{1}{\lambda}$ 也是 A 的特征值.

9. 证明: 若 A 为 H 矩阵, 则 A^* 也是 H 矩阵.

证明: 要证明 A^* 是 H 矩阵, 即证明 $(A^*)^{\mathrm{H}}=A^*$. 左边矩阵的 (i,j) 元即是 A^* 的 (j,i) 元的共轭, 也

即是 A 的代数余子式 A_{ij} 的共轭, 即

$$\overline{A_{ij}}=(-1)^{i+j}\overline{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

$$=(-1)^{i+j}\begin{vmatrix} \overline{a_{11}} & \cdots & \overline{a_{1,j-1}} & \overline{a_{1,j+1}} & \cdots & \overline{a_{1n}} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \overline{a_{i-1,1}} & \cdots & \overline{a_{i-1,j-1}} & \overline{a_{i-1,j+1}} & \cdots & \overline{a_{i-1,n}} \\ \overline{a_{i+1,1}} & \cdots & \overline{a_{i+1,j-1}} & \overline{a_{i+1,j+1}} & \cdots & \overline{a_{i+1,n}} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \overline{a_{n1}} & \cdots & \overline{a_{n,j-1}} & \overline{a_{n,j+1}} & \cdots & \overline{a_{nn}} \end{vmatrix},$$

而 A 为 H 矩阵, 所以 $A^{\mathrm{H}}=A$, 即 $\overline{a_{ji}}=a_{ij}\ (i,j=1,2,\cdots,n)$, 所以

$$\overline{A_{ij}}=(-1)^{i+j}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{j-1,1} & a_{j+1,1} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1,i-1} & \cdots & a_{j-1,i-1} & a_{j+1,i-1} & \cdots & a_{n,i-1} \\ a_{1,i+1} & \cdots & a_{j-1,i+1} & a_{j+1,i+1} & \cdots & a_{n,i+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{j-1,n} & a_{j+1,n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{i+j}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j-1,1} & \cdots & a_{j-1,i-1} & a_{j-1,i+1} & \cdots & a_{j-1,n} \\ a_{j+1,1} & \cdots & a_{j+1,i-1} & a_{j+1,i+1} & \cdots & a_{J+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{j+i}M_{ji}=A_{ji},$$

而 A_{ji} 即是右边矩阵 A^* 的 (i,j) 元, 所以 $(A^*)^{\mathrm{H}}=A^*$, A^* 也是 H 矩阵.

10. 证明: 若可逆矩阵 A 为 H 矩阵, 则 A^{-1} 也是 H 矩阵.

证明: 由于 A 为可逆 H 矩阵, 则 $A^{\mathrm{H}}=A$. 由此推出, $(A^{-1})^{\mathrm{H}}=\overline{(A^{-1})^{\mathrm{T}}}=\overline{(A^{\mathrm{T}})^{-1}}=(\overline{A^{\mathrm{T}}})^{-1}=(A^{\mathrm{H}})^{-1}=A^{-1}$, 所以 A^{-1} 也是 H 矩阵.

11. 证明: 若 A 为酉矩阵, 则 $|A|$ 的值是模为 1 的复数.

证明: 由于 A 为酉矩阵, 则 $A^{\mathrm{H}}A=E$, 进而 $|A^{\mathrm{H}}||A|=|E|=1$, 即 $|\overline{A^{\mathrm{T}}}||A|=1$, 继而, $\overline{|A^{\mathrm{T}}|}|A|=1$, 因此, $\overline{|A|}|A|=1$, 即 $||A||^2=1$, 所以 $||A||=1$, 即 $|A|$ 的值是模为 1 的复数.

5.5 习题5.5

习题5.5(A)

1. 对下列实对称矩阵 A, 求正交矩阵 Q 及对角矩阵 Λ, 使 $Q^{-1}AQ=\Lambda$:

1) $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$; 2) $A=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$;

3) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; 4) $A=\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

解: 1) 由特征多项式

$$\psi(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-5 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3+r_2} \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ 0 & \lambda-1 & \lambda-1 \\ 2 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix} \xlongequal{-c_2+c_3} \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & \lambda-9 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)(\lambda^2-11\lambda+18-8)=(\lambda-1)^2(\lambda-10),$$

得到特征值 $\lambda_1=1$(二重), $\lambda_2=10$.

对于特征值 $\lambda_1=1$, 解齐次线性方程组 $(\lambda_1 E-A)x=\mathbf{0}$. 此时, 系数矩阵

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_1\times(-1)]{\substack{-2r_1+r_2 \\ 2r_1+r_3}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

取自由未知量 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ 为 $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, 分别解得 $x_3=1, x_3=1$, 得到特征向量 $\alpha_1=(2,0,1)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$. 将 α_1,α_2 单位正交化, 为此令 $\beta_1=\alpha_1$, $(\beta_1,\beta_1)=5$, $||\beta_1||=\sqrt{5}$. 再令 $\beta_2=k_1^{(2)}\beta_1+\alpha_2$, 其中 $k_1^{(2)}=-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}=-\frac{1}{5}$, 所以, $\beta_2=-\frac{1}{5}\beta_1+\alpha_2=(-\frac{2}{5},1,\frac{4}{5})^{\mathrm{T}}$, $||\beta_2||=\frac{3\sqrt{5}}{5}$. 再令 $\gamma_1=\frac{\beta_1}{||\beta_1||}=(\frac{2\sqrt{5}}{5},0,\frac{\sqrt{5}}{5})^{\mathrm{T}}$, $\gamma_2=\frac{\beta_2}{||\beta_2||}=(-\frac{2\sqrt{5}}{15},\frac{\sqrt{5}}{3},\frac{4\sqrt{5}}{15})^{\mathrm{T}}$.

对于特征值 $\lambda_2=10$, 解齐次线性方程组 $(\lambda_2 E-A)x=\mathbf{0}$. 此时, 系数矩阵

$$\begin{bmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[2r_2+r_1]{\substack{-4r_3+r_1 \\ r_3+r_2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 9 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[-4r_2+r_1]{\substack{r_1\leftrightarrow r_3 \\ r_2\times\frac{1}{9}}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

取自由未知量 $x_3=-2$, 解得 $x_1=1, x_2=2$, 得到特征向量 $\alpha_3=(1,2,-2)^{\mathrm{T}}$, $||\alpha_3||=3$. 令 $\gamma_3=\frac{\alpha_3}{||\alpha_3||}=(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3})^{\mathrm{T}}$.

由此得到正交矩阵

$$Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}, \qquad Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 10 \end{bmatrix}.$$

2) 由特征多项式

$$\psi(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda-1 & 2 \\ 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2-\lambda-4)-2\cdot 2\lambda=\lambda^3-3\lambda^2-6\lambda+8$$

$$=(\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda-8)=(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-4),$$

得到特征值 $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=4$.

对于特征值 $\lambda_1=-2$, 解齐次线性方程组 $(\lambda_1 E-A)x=\mathbf{0}$. 此时, 系数矩阵

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3+r_2]{\substack{2r_2+r_1 \\ 2r_3+r_1}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2\times\frac{1}{2}]{\substack{r_1\leftrightarrow r_2 \\ r_2\leftrightarrow r_3}} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

取自由未知量 $x_2=2$, 解得 $x_1=1, x_3=2$, 得到特征向量 $\alpha_1=(1,2,2)^{\mathrm{T}}$, $||\alpha_1||=3$. 令 $\gamma_1=\frac{\alpha_1}{||\alpha_1||}=(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})^{\mathrm{T}}$.

对于特征值 $\lambda_2=1$, 解齐次线性方程组 $(\lambda_2 E-A)x=\mathbf{0}$. 此时, 系数矩阵

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-2r_3+r_2]{\substack{2r_1+r_2 \\ -r_3+r_1}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_1\times(-1)]{r_2\leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

取自由未知量 $x_3=-2$, 解得 $x_1=2, x_2=1$, 得到特征向量 $\alpha_2=(2,1,-2)^{\mathrm{T}}$, $||\alpha_2||=3$. 令 $\gamma_2=\frac{\alpha_2}{||\alpha_2||}=(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3})^{\mathrm{T}}$.

对于特征值 $\lambda_3=4$, 解齐次线性方程组 $(\lambda_3 E-A)x=\mathbf{0}$. 此时, 系数矩阵

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_1\times\frac{1}{2}]{\substack{-r_1+r_2 \\ -2r_2+r_3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

取自由未知量 $x_2=-2$, 解得 $x_1=2, x_3=1$, 得到特征向量 $\alpha_3=(2,-2,1)^{\mathrm{T}}$, $||\alpha_3||=3$. 令 $\gamma_3=\frac{\alpha_3}{||\alpha_3||}=(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3})^{\mathrm{T}}$.

由此得到正交矩阵

$$Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \qquad Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{bmatrix}.$$

3) 由特征多项式

$$\begin{aligned} \psi(\lambda)=|\lambda E-A|&=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda+2 & -2 \\ -4 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} \xlongequal{-2r_2+r_3} \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda+2 & -2 \\ 0 & -2(\lambda+3) & \lambda+3 \end{vmatrix} \\ &=(\lambda+3)\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda+2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{2c_3+c_2} (\lambda+3)\begin{vmatrix} \lambda-1 & -10 & -4 \\ -2 & \lambda-2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &=(\lambda+3)(\lambda^2-3\lambda+2-20)=(\lambda-6)(\lambda+3)^2, \end{aligned}$$

得到特征值 $\lambda_1=6$, $\lambda_2=-3$(二重).

对于特征值 $\lambda_1=6$, 解齐次线性方程组 $(\lambda_1 E-A)x=\mathbf{0}$. 此时, 系数矩阵

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[4r_1+r_3]{\substack{r_3+r_1 \\ 2r_1+r_2}} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -18 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[2r_2+r_1]{\substack{r_2\leftrightarrow r_3 \\ r_2\times(-\frac{1}{9})}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

取自由未知量 $x_3=2$, 解得 $x_1=2, x_2=1$, 得到特征向量 $\alpha_1=(2,1,2)^{\mathrm{T}}$, $||\alpha_1||=3$. 令 $\gamma_1=\frac{\alpha_1}{||\alpha_1||}=(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})^{\mathrm{T}}$.

对于特征值 $\lambda_2=-3$, 解齐次线性方程组 $(\lambda_2 E-A)x=\mathbf{0}$. 此时, 系数矩阵

$$\begin{bmatrix} -4 & -2 & -4 \\ -2 & -1 & -2 \\ -4 & -2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[-2r_2+r_3]{-2r_2+r_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2\times(-1)]{r_1\leftrightarrow r_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

取自由未知量 $\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ 为 $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, 分别解得 $x_1=1, x_1=1$, 得到特征向量 $\alpha_2=(1,-2,0)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_3=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$. 将 α_2,α_3 单位正交化, 为此令 $\beta_1=\alpha_2$, $(\beta_1,\beta_1)=5$, $||\beta_1||=\sqrt{5}$. 再令 $\beta_2=k_1^{(2)}\beta_1+\alpha_3$, 其中 $k_1^{(2)}=-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}=-\frac{1}{5}$, 所以, $\beta_2=-\frac{1}{5}\beta_1+\alpha_3=(\frac{4}{5},\frac{2}{5},-1)^{\mathrm{T}}$, $||\beta_2||=\frac{3\sqrt{5}}{5}$. 再令 $\gamma_2=\frac{\beta_1}{||\beta_1||}=(\frac{\sqrt{5}}{5},-\frac{2\sqrt{5}}{5},0)^{\mathrm{T}}$, $\gamma_3=\frac{\beta_2}{||\beta_2||}=(\frac{4\sqrt{5}}{15},\frac{2\sqrt{5}}{15},-\frac{\sqrt{5}}{3})^{\mathrm{T}}$.

由此得到正交矩阵

$$Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{4\sqrt{5}}{15} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{15} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{5}}{3} \end{bmatrix}, \qquad Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix} 6 & & \\ & -3 & \\ & & -3 \end{bmatrix}.$$

4) 由特征多项式

$$\psi(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-4 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & \lambda-4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda-4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & \lambda-4 \end{vmatrix} \overset{r_4+r_2}{\underset{r_3+r_1}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} \lambda-4 & 0 & \lambda-4 & 0 \\ 0 & \lambda-4 & 0 & \lambda-4 \\ 0 & 1 & \lambda-4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & \lambda-4 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-4)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda-4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & \lambda-4 \end{vmatrix} \overset{-r_1+r_4}{\underset{-r_2+r_3}{=\!=\!=}} (\lambda-4)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda-4 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & \lambda-4 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-4)^2(\lambda^2-8\lambda+16-4)=(\lambda-4)^2(\lambda-2)(\lambda-6),$$

得到特征值 $\lambda_1=4$(二重), $\lambda_2=2$, $\lambda_3=6$.

对于特征值 $\lambda_1=4$, 解齐次线性方程组 $(\lambda_1E-A)x=\mathbf{0}$. 此时, 系数矩阵

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3+r_1]{r_4+r_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_3]{r_1\leftrightarrow r_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

取自由未知量 $\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ 为 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, 分别解得 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, 得到特征向量 $\alpha_1=(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_2=(0,1,0,1)^{\mathrm{T}}$. 显然, α_1,α_2 是正交的. 将 α_1,α_2 单位化, $(\alpha_1,\alpha_1)=2$, $||\alpha_1||=\sqrt{2}$, $(\alpha_2,\alpha_2)=2$, $||\alpha_2||=\sqrt{2}$, 令 $\gamma_1=\frac{\alpha_1}{||\alpha_1||}=\frac{1}{2}(\sqrt{2},0,\sqrt{2},0)^{\mathrm{T}}$, $\gamma_2=\frac{\alpha_2}{||\alpha_2||}=\frac{1}{2}(0,\sqrt{2},0,\sqrt{2})^{\mathrm{T}}$.

对于特征值 $\lambda_2=2$, 解齐次线性方程组 $(\lambda_2E-A)x=\mathbf{0}$. 此时, 系数矩阵

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{2r_3+r_2 \\ r_4+r_2}]{\substack{r_3+r_1 \\ 2r_4+r_1}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{r_2+r_4 \\ r_1\leftrightarrow r_4 \\ r_2\leftrightarrow r_3}]{\substack{-r_2+r_1 \\ r_2\times(-\frac{1}{4}) \\ 2r_2+r_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

取自由未知量 $x_4=1$, 解得 $x_1=1, x_2=-1, x_3=-1$, 得到特征向量 $\alpha_3=(1,-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$, $||\alpha_3||=2$. 令 $\gamma_3=\frac{\alpha_3}{||\alpha_3||}=\frac{1}{2}(1,-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$.

对于特征值 $\lambda_3=6$, 解齐次线性方程组 $(\lambda_3E-A)x=\mathbf{0}$. 此时, 系数矩阵

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{-2r_3+r_2 \\ r_3+r_1}]{\substack{-2r_4+r_1 \\ r_4+r_2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{-2r_2+r_3 \\ r_1\leftrightarrow r_4 \\ r_2\leftrightarrow r_3}]{\substack{r_2+r_1 \\ r_2\times(-\frac{1}{4}) \\ r_2+r_4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

取自由未知量 $x_4=-1$, 解得 $x_1=1,x_2=1,x_3=-1$, 得到特征向量 $\alpha_4=(1,1,-1,-1)^{\mathrm{T}}$, $||\alpha_4||=2$. 令 $\gamma_4=\frac{\alpha_4}{||\alpha_4||}=\frac{1}{2}(1,1,-1,-1)^{\mathrm{T}}$.

由此得到正交矩阵

$$Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{2}&0&1&1\\0&\sqrt{2}&-1&1\\\sqrt{2}&0&-1&-1\\0&\sqrt{2}&1&-1\end{bmatrix},\qquad Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix}4&&&\\&4&&\\&&2&\\&&&6\end{bmatrix}.$$

2. 已知三阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=-2,\lambda_2=1,\lambda_3=4$, $\alpha_1=(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_2=(1,-1,-1)^{\mathrm{T}}$ 分别是 A 对应于特征值 λ_1,λ_2 的特征向量. 试求正交矩阵 Q, 使 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵.

解: 设 A 对应于特征值 $\lambda_3=4$ 的特征向量为 $\alpha_3=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$. 由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为正交特征向量组, 得到方程组

$$\begin{cases}-x_2+x_3=0,\\x_1-x_2-x_3=0.\end{cases}$$

其系数矩阵

$$\begin{bmatrix}0&-1&1\\1&-1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_2\times(-1)]{\substack{-r_1+r_2\\r_1\leftrightarrow r_2}}\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&-1\end{bmatrix},$$

秩为 2, 基础解系含 $3-2=1$ 个向量, 取自由未知量 $x_3=1$, 解得 $x_1=2,x_2=1$, 故可取 $\alpha_3=(2,1,1)^{\mathrm{T}}$. 将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 单位化得到单位正交特征向量组 $\gamma_1=\frac{\alpha_1}{||\alpha_1||}=(0,-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})^{\mathrm{T}}$, $\gamma_2=\frac{\alpha_2}{||\alpha_2||}=(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3})^{\mathrm{T}}$, $\gamma_3=\frac{\alpha_3}{||\alpha_3||}=(\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{6})^{\mathrm{T}}$, 由此得到正交矩阵

$$Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{bmatrix}0&\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{6}}{3}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{6}}{6}\end{bmatrix},\qquad Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix}-2&&\\&1&\\&&4\end{bmatrix}.$$

3. 证明: 如果实对称矩阵 A 还是幂零矩阵, 则 $A=O$.

证明: 由于 A 是幂零矩阵, 其特征值全部是 0, 而 A 又是实对称矩阵, 所以必定存在正交矩阵 Q, 使 $Q^{-1}AQ=\Lambda$, 其中 Λ 为 A 的全部特征值构成的对角矩阵, 所以 $\Lambda=O$, 即 $Q^{-1}AQ=O$, 因此 $A=QOQ^{-1}=O$.

4. 设实对称矩阵 A 满足 $A^2=A$, 证明必有正交矩阵 Q, 使

$$Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix}1&&&&&&&\\&1&&&&&&\\&&\ddots&&&&&\\&&&1&&&&\\&&&&0&&&\\&&&&&0&&\\&&&&&&\ddots&\\&&&&&&&0\end{bmatrix},$$

其中“1”的个数 r 恰是 A 的秩.

证明: 由于 A 是幂等矩阵, 其特征值只能是 1 或 0. 而 A 又是实对称矩阵, 所以必定存在正交矩阵 Q, 使 $Q^{-1}AQ=\Lambda$, 其中 Λ 为 A 的全部特征值构成的对角矩阵且 Λ 等于题目中右边的矩阵,

Λ 中 “1” 的个数为特征值 1 的重数, 此时, $R(\Lambda)$ 等于 “1” 的个数. 由于相似变换不改变矩阵的秩, 因此, $R(A)=R(\Lambda)=$ “1” 的个数.

5. 设 A,B 都是 n 阶实对称矩阵, 并且 A 和 B 的特征值完全相同(包括重根的重数), 证明 $A\sim B$.

证明: 由于 A,B 都是 n 阶实对称矩阵, 并且 A 和 B 的特征值完全相同(包括重根的重数), 所以分别存在正交矩阵 Q_1,Q_2 使得 $Q_1^{-1}AQ_1=\Lambda$, $Q_2^{-1}BQ_2=\Lambda$, 其中 Λ 为 A (或者说 B) 的全部特征值构成的对角矩阵, 因此, $A\sim\Lambda$, $B\sim\Lambda$, 由相似关系的对称性和传递性知, $A\sim B$.

习题5.5(B)

1. 已知实对称矩阵 A 与对角矩阵 Λ 相似, 其中

$$A=\begin{bmatrix}1&a&1\\a&2&b\\1&b&1\end{bmatrix},\qquad \Lambda=\begin{bmatrix}0&&\\&2&\\&&2\end{bmatrix}.$$

试求 a,b 并求正交矩阵 Q, 使 $Q^{-1}AQ=\Lambda$.

解: 令 $\psi(\lambda)=|\lambda E-A|$. 注意到 $\lambda_1=0,\lambda_2=2$(二重) 是 Λ 的特征值, 由于 A 与 Λ 相似, 所以, $0,2$(二重) 也是 A 的特征值, 所以 $\psi(0)=0$, $\psi(2)=0$. 故

$$\begin{aligned}0=\psi(0)=|0E-A|=|-A|&=\begin{vmatrix}-1&-a&-1\\-a&-2&-b\\-1&-b&-1\end{vmatrix}\xlongequal[-r_1+r_3]{-br_1+r_2}\begin{vmatrix}-1&-a&-1\\b-a&ab-2&0\\0&a-b&0\end{vmatrix}\\&=(-1)(-1)^{1+3}(-(a-b)^2)=(a-b)^2,\end{aligned}$$

即 $a-b=0$, 而

$$\begin{aligned}0=\psi(2)=|2E-A|=|-A|&=\begin{vmatrix}1&-a&-1\\-a&0&-b\\-1&-b&1\end{vmatrix}\xlongequal[-r_1+r_3]{-br_1+r_2}\begin{vmatrix}1&-a&-1\\-a-b&ab&0\\0&-a-b&0\end{vmatrix}\\&=(-1)(-1)^{1+3}((a+b)^2)=-(a+b)^2,\end{aligned}$$

即 $a+b=0$, 由此解得 $a=b=0$.

对于特征值 $\lambda_1=0$, 解齐次线性方程组 $(\lambda_1E-A)x=\mathbf{0}$. 此时, 系数矩阵

$$\begin{bmatrix}-1&0&-1\\0&-2&0\\-1&0&-1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_2\times(-\frac{1}{2})]{\substack{-r_1+r_2\\ r_1\times(-1)}}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

取自由未知量 $x_3=-1$, 解得 $x_1=1,x_2=0$, 得到特征向量 $\alpha_1=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$.

对于特征值 $\lambda_2=2$, 解齐次线性方程组 $(\lambda_2E-A)x=\mathbf{0}$. 此时, 系数矩阵

$$\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1+r_2}\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

取自由未知量 $\begin{bmatrix}x_2\\x_3\end{bmatrix}$ 为 $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$, 分别解得 $x_1=0,x_1=1$, 得到特征向量 $\alpha_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_3=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$. 显然, α_2 与 α_3 正交.

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是正交特征向量组. 由于 $||\alpha_1||=\sqrt{2}$, $||\alpha_2||=1$, $||\alpha_3||=\sqrt{2}$, 令 $\gamma_1=\frac{\alpha_1}{||\alpha_1||}=$

$(\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2})^{\mathrm{T}}$, $\gamma_2=\frac{\alpha_2}{||\alpha_2||}=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\gamma_3=\frac{\alpha_3}{||\alpha_3||}=(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2})^{\mathrm{T}}$. 则得到正交矩阵

$$Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\left[\begin{array}{ccc}\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right],$$

使得 $Q^{-1}AQ=\Lambda$.

2. 证明: 对于实对称矩阵 A, 必有实对称矩阵 B, 使 $A=B^3$.

证明: 对于实对称矩阵 A, 存在正交矩阵 Q, 使 $Q^{-1}AQ=\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$, 其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的全部特征值, 都是实数. 因此, $\Lambda=(\mathrm{diag}(\sqrt[3]{\lambda_1},\sqrt[3]{\lambda_2},\cdots,\sqrt[3]{\lambda_n}))^3=:C^3$. 因此, $A=QC^3Q^{-1}=(QCQ^{-1})^3$. 令 $B=QCQ^{-1}$, B 是实矩阵, 由于$B^{\mathrm{T}}=(QCQ^{-1})^{\mathrm{T}}=(QCQ^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=QC^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}}=QCQ^{\mathrm{T}}=QCQ^{-1}=B$, 所以 B 是实对称矩阵, 同时, $A=B^3$.

3. 证明: 不存在实对称矩阵 A, 使 $A^2+E=O$.

证明: 反证法. 假定存在实对称矩阵 A, 使 $A^2+E=O$, 则 $A^2=-E$, 故 A^2 的特征值全部是 -1. 设 λ 是 A 的特征值, 则 λ^2 是 A^2 的特征值. 因此, $\lambda^2=-1$, 继而, $\lambda=\pm\mathrm{i}$, 但 A 是实对称矩阵, 其特征值为实数, 矛盾. 故不存在实对称矩阵 A, 使 $A^2+E=O$.

5.6 习题5.6

习题5.6(A)

1. 指出下列各题在把多项式矩阵经初等变换化为对角矩阵的过程中哪些步骤的做法是错误的:

1) $\left[\begin{array}{cc}\lambda & 0\\ -1 & \lambda\end{array}\right]\xrightarrow{\frac{1}{\lambda}r_1+r_2}\left[\begin{array}{cc}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{array}\right]$;

2) $\left[\begin{array}{cc}\lambda+1 & -1\\ -2 & \lambda\end{array}\right]\xrightarrow{r_2+r_1}\left[\begin{array}{cc}\lambda-1 & \lambda-1\\ -2 & \lambda\end{array}\right]\xrightarrow{r_1\times\frac{1}{\lambda-1}}\left[\begin{array}{cc}1 & 1\\ -2 & \lambda\end{array}\right]$
$\xrightarrow{-c_1+c_2}\left[\begin{array}{cc}1 & 0\\ -2 & \lambda+2\end{array}\right]\xrightarrow{2r_1+r_2}\left[\begin{array}{cc}1 & 0\\ 0 & \lambda+2\end{array}\right]$;

3) $\left[\begin{array}{cc}\lambda & -1\\ -1 & \lambda\end{array}\right]\xrightarrow{r_2\times\lambda}\left[\begin{array}{cc}\lambda & -1\\ -\lambda & \lambda^2\end{array}\right]\xrightarrow{r_1+r_2}\left[\begin{array}{cc}\lambda & -1\\ 0 & \lambda^2-1\end{array}\right]\xrightarrow{\frac{1}{\lambda}c_1+c_2}\left[\begin{array}{cc}\lambda & 0\\ 0 & \lambda^2-1\end{array}\right]$.

解: 1) 消法变换 $\frac{1}{\lambda}r_1+r_2$, 只能乘以多项式, 乘以分式 $\frac{1}{\lambda}$ 是错误的.

2) 第二步倍法变换 $r_1\times\frac{1}{\lambda-1}$, 只能乘以非零常数, 乘以分式 $\frac{1}{\lambda-1}$ 是错误的.

3) 第一步倍法变换 $r_1\times\lambda$, 只能乘以非零常数, 乘以非常数多项式 λ 是错误的. 第三步消法变换 $\frac{1}{\lambda}c_1+c_2$, 只能乘以多项式, 乘以分式 $\frac{1}{\lambda}$ 也是错误的.

2. 已知三阶矩阵 A 的初等因子组为 $\lambda+1$, $(\lambda+1)^2$, 问 A 的特征多项式为何?

解: 因为特征多项式等于初等因子组全体初等因子的乘积, 所以 A 的特征多项式为 $\psi(\lambda)=(\lambda+1)^3$.

3. 已知四阶矩阵 A 的特征多项式为 $\psi(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda+2)^2$, 由此是否可断定 A 的初等因子组为 $(\lambda-1)^2$, $(\lambda+2)^2$? 若不是, 请指出初等因子组的各种可能性.

解: 不能断定. 初等因子组有以下 4 种可能: (i) $\lambda-1,\ \lambda-1,\ \lambda+2,\ \lambda+2$; (ii) $\lambda-1,\ \lambda-1,\ (\lambda+2)^2$; (iii) $(\lambda-1)^2,\ \lambda+2,\ \lambda+2$; (iv) $(\lambda-1)^2,\ (\lambda+2)^2$.

4. 求下列矩阵的 Jordan 标准形:

1) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$; 3) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; 4) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$;

5) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$; 6) $\begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$; 7) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$; 8) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

解: 1) 对特征矩阵进行初等变换化成对角矩阵,

$$\lambda E-A=\begin{bmatrix} \lambda-1 & -1 & 1 \\ 3 & \lambda+3 & -3 \\ 2 & 2 & \lambda-2 \end{bmatrix} \xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & \lambda-1 \\ -3 & \lambda+3 & 3 \\ \lambda-2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-(\lambda-1)c_1+c_3]{c_1+c_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & \lambda & 3\lambda \\ \lambda-2 & \lambda & 3\lambda-\lambda^2 \end{bmatrix} \xrightarrow[-(\lambda-2)r_1+r_3]{3r_1+r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 3\lambda \\ 0 & \lambda & 3\lambda-\lambda^2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-r_2+r_3]{-3c_2+c_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3\times(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}.$$

A 的初等因子组为 λ^2, λ. 于是可得 A 的 Jordan 标准形

$$J=\begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix}.$$

2) 对特征矩阵进行初等变换化成对角矩阵,

$$\lambda E-A=\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 4 & \lambda-4 & 0 \\ 2 & -1 & \lambda-2 \end{bmatrix} \xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_3} \begin{bmatrix} -1 & \lambda & 0 \\ \lambda-4 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & \lambda-2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\lambda c_1+c_2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \lambda-4 & (\lambda-2)^2 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & \lambda-2 \end{bmatrix} \xrightarrow[-r_1+r_3]{(\lambda-4)r_1+r_2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-2)^2 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & \lambda-2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_3+c_2]{r_1\times(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{bmatrix}.$$

所以, A 的初等因子组为 $\lambda-2, (\lambda-2)^2$. 于是可得 A 的 Jordan 标准形

$$J=\begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix}.$$

3) 对特征矩阵进行初等变换化成对角矩阵,

$$\lambda E-A=\begin{bmatrix} \lambda-1 & 2 & -2 \\ -1 & \lambda-3 & 2 \\ -1 & -1 & \lambda \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2} \begin{bmatrix} -1 & \lambda-3 & 2 \\ \lambda-1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[2c_1+c_3]{(\lambda-3)c_1+c_2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \lambda-1 & \lambda^2-4\lambda+5 & 2(\lambda-2) \\ -1 & 2-\lambda & \lambda-2 \end{bmatrix} \xrightarrow[-r_1+r_3]{(\lambda-1)r_1+r_2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2-4\lambda+5 & 2(\lambda-2) \\ 0 & 2-\lambda & \lambda-2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1\times(-1)]{c_3+c_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-1)^2 & 2(\lambda-2) \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2r_3+r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{bmatrix}.$$

A 的初等因子组为 $(\lambda-1)^2, \lambda-2$. 于是可得 A 的 Jordan 标准形

$$J=\begin{bmatrix}1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & 2\end{bmatrix}.$$

4) 对特征矩阵进行初等变换化成对角矩阵,

$$\lambda E-A=\begin{bmatrix}\lambda-2 & 1 & -2\\ -5 & \lambda+3 & -3\\ 1 & 0 & \lambda+2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}1 & 0 & \lambda+2\\ -5 & \lambda+3 & -3\\ \lambda-2 & 1 & -2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-(\lambda+2)c_1+c_3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -5 & \lambda+3 & 5\lambda+7\\ \lambda-2 & 1 & 2-\lambda^2\end{bmatrix}\xrightarrow[-(\lambda-2)r_1+r_3]{5r_1+r_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda+3 & 5\lambda+7\\ 0 & 1 & 2-\lambda^2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2-\lambda^2\\ 0 & \lambda+3 & 5\lambda+7\end{bmatrix}\xrightarrow[-(\lambda+3)r_2+r_2]{(\lambda^2-2)c_2+c_3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda+1)^3\end{bmatrix}.$$

所以, A 的初等因子组为 $(\lambda+1)^3$. 于是可得 A 的 Jordan 标准形

$$J=\begin{bmatrix}-1 & 1 & \\ & -1 & 1\\ & & -1\end{bmatrix}.$$

5) 对特征矩阵进行初等变换化成对角矩阵,

$$\lambda E-A=\begin{bmatrix}\lambda-2 & 1 & 1\\ -2 & \lambda+1 & 2\\ 1 & -1 & \lambda-2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}1 & -1 & \lambda-2\\ -2 & \lambda+1 & 2\\ \lambda-2 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-(\lambda-2)c_1+c_3]{c_1+c_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & \lambda-1 & 2(\lambda-1)\\ \lambda-2 & \lambda-1 & -\lambda^2+4\lambda-3\end{bmatrix}\xrightarrow[-(\lambda-2)r_1+r_3]{2r_1+r_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-1 & 2(\lambda-1)\\ 0 & \lambda-1 & -\lambda^2+4\lambda-3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-r_2+r_3]{-2c_2+c_3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & -(\lambda-1)^2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3\times(-1)}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2\end{bmatrix}.$$

A 的初等因子组为 $\lambda-1, (\lambda-1)^2$. 于是可得 A 的 Jordan 标准形

$$J=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & 1\\ & & 1\end{bmatrix}.$$

6) 对特征矩阵进行初等变换化成对角矩阵,

$$\lambda E-A=\begin{bmatrix}\lambda-5 & 3 & -2\\ -6 & \lambda+4 & -4\\ -4 & 4 & \lambda-5\end{bmatrix}\xrightarrow{c_3+c_2}\begin{bmatrix}\lambda-5 & 1 & -2\\ -6 & \lambda & -4\\ -4 & \lambda-1 & \lambda-5\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_2}\begin{bmatrix}1 & \lambda-5 & -2\\ \lambda & -6 & -4\\ \lambda-1 & -4 & \lambda-5\end{bmatrix}\xrightarrow[2c_1+c_3]{-(\lambda-5)c_1+c_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \lambda & -\lambda^2+5\lambda-6 & 2\lambda-4\\ \lambda-1 & -\lambda^2+6\lambda-9 & 3\lambda-7\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-(\lambda-1)r_1+r_3]{-\lambda r_1+r_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\lambda^2+5\lambda-6 & 2\lambda-4\\ 0 & -\lambda^2+6\lambda-9 & 3\lambda-7\end{bmatrix}\xrightarrow{-r_2+r_3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\lambda^2+5\lambda-6 & 2\lambda-4\\ 0 & \lambda-3 & \lambda-3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_2\leftrightarrow c_3]{-2r_3+r_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -\lambda^2+3\lambda\\ 0 & \lambda-3 & \lambda-3\end{bmatrix}\xrightarrow[-c_3+c_2]{\lambda r_3+r_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & (\lambda-1)(\lambda-2) & 0\\ 0 & 0 & \lambda-3\end{bmatrix}.$$

所以, A 的初等因子组为 $\lambda-1, \lambda-2, \lambda-3$. 于是可得 A 的 Jordan 标准形

$$J=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 3\end{bmatrix}.$$

7) 对特征矩阵进行初等变换化成对角矩阵,

$$\lambda E-A=\begin{bmatrix} \lambda-3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & \lambda-5 & 3 \\ -4 & 1 & -3 & \lambda+1 \end{bmatrix} \xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_2} \begin{bmatrix} 1 & \lambda-3 & 0 & 0 \\ \lambda-1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & \lambda-5 & 3 \\ 1 & -4 & -3 & \lambda+1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-(\lambda-3)c_1+c_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda-1 & -(\lambda-2)^2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & \lambda-5 & 3 \\ 1 & -(\lambda+1) & -3 & \lambda+1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-r_1+r_4]{-(\lambda-1)r_1+r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\lambda-2)^2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & \lambda-5 & 3 \\ 0 & -(\lambda+1) & -3 & \lambda+1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2\times(-1)]{c_4+c_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-2)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-5 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & \lambda+1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-r_3+r_4]{c_4+c_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-2)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_3\leftrightarrow c_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-2)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \lambda-2 \\ 0 & 0 & \lambda-2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[c_4\times 3]{r_3\times\frac{1}{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-2)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda-2 \\ 0 & 0 & \lambda-2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-(\lambda-2)c_3+c_4]{-(\lambda-2)r_3+r_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-2)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(\lambda-2)^2 \end{bmatrix} \xrightarrow{c_4\times(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-2)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-2)^2 \end{bmatrix}.$$

A 的初等因子组为 $(\lambda-2)^2,(\lambda-2)^2$. 于是可得 A 的 Jordan 标准形

$$J=\begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{bmatrix}.$$

8) 对特征矩阵进行初等变换化成对角矩阵,

$$\lambda E-A=\begin{bmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda+1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & \lambda-1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & \lambda \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2} \begin{bmatrix} 1 & \lambda+1 & 1 & 0 \\ \lambda-1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & \lambda-1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-c_1+c_3]{-(\lambda+1)c_1+c_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda-1 & 1-\lambda^2 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & \lambda & \lambda & 0 \\ -2 & 2\lambda & 0 & \lambda \end{bmatrix} \xrightarrow[2r_1+r_4]{\substack{-(\lambda-1)r_1+r_2 \\ r_1+r_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_2\leftrightarrow c_3]{r_3+r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1+\lambda-\lambda^2 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda & \lambda \end{bmatrix} \xrightarrow[(\lambda^2-\lambda-1)c_2+c_3]{-\lambda r_2+r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2(\lambda-1) & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-2c_4+c_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2(\lambda-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

A 的初等因子组为 $\lambda,\lambda^2,\lambda-1$. 于是可得 A 的 Jordan 标准形

$$J=\begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

5. 设 m 阶矩阵 A_1 的 Jordan 标准形为 J_1, n 阶矩阵 A_2 的 Jordan 标准形为 J_2, 并设

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{bmatrix},\qquad J=\begin{bmatrix} J_1 & \\ & J_2 \end{bmatrix},$$

试证 J 是 A 的 Jordan 标准形.

证明: 方法一. 设 $\lambda E_m - A_1 \cong G_1(\lambda)$(对角阵), $\lambda E_n - A_2 \cong G_2(\lambda)$(对角阵). 则

$$\lambda E - A=\begin{bmatrix} \lambda E_m - A_1 & \\ & \lambda E_n - A_2 \end{bmatrix}\cong\begin{bmatrix} G_1(\lambda) & \\ & G_2(\lambda) \end{bmatrix}=: G(\lambda),$$

所以 A 的初等因子组是由 A_1 的初等因子组与 A_2 的初等因子组合成, 进而 A 的 Jordan 标准形由 A_1, A_2 的 Jordan 标准形合成, 即 J 是 A 的 Jordan 标准形.

方法二. 由 $A_1 \sim J_1$, 存在 m 阶可逆矩阵 P_1 使得 $P_1^{-1}A_1P_1 = J_1$; 由 $A_2 \sim J_2$, 存在 n 阶可逆矩阵 P_2 使得 $P_2^{-1}A_2P_2 = J_2$. 令 $P=\begin{bmatrix} P_1 & \\ & P_2 \end{bmatrix}$. 则 P 可逆且 $P^{-1}=\begin{bmatrix} P_1^{-1} & \\ & P_2^{-1} \end{bmatrix}$,

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix} P_1^{-1}A_1P_1 & \\ & P_2^{-1}A_2P_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} J_1 & \\ & J_2 \end{bmatrix}=J,$$

而 J_1, J_2 是 Jordan 标准形, 均是由 Jordan 块构成的分块对角矩阵, 所以 J 也是由 Jordan 块构成的分块对角矩阵, 因此 J 是 A 的 Jordan 标准形.

6. 按上题思路, 求矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ 0 & 2 & & & \\ & & -1 & 1 & 0 \\ & & -4 & 3 & 0 \\ & & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

的 Jordan 标准形.

解: 对特征矩阵 $\lambda E_1 - A_1, \lambda E_2 - A_2$ 分别进行初等变换化成对角矩阵,

$$\lambda E_1 - A_1=\begin{bmatrix} \lambda-1 & 1 \\ 0 & \lambda-2 \end{bmatrix}\xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_2}\begin{bmatrix} 1 & \lambda-1 \\ \lambda-2 & 0 \end{bmatrix}\xrightarrow{-(\lambda-1)c_1+c_2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \lambda-2 & -(\lambda-1)(\lambda-2) \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2\times(-1)]{-(\lambda-2)r_1+r_2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\lambda-1)(\lambda-2) \end{bmatrix},$$

$$\lambda E_2 - A_2=\begin{bmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda-3 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-2 \end{bmatrix}\xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_2}\begin{bmatrix} -1 & \lambda+1 & 0 \\ \lambda-3 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda-2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(\lambda+1)c_1+c_2}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \lambda-3 & (\lambda-1)^2 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda-2 \end{bmatrix}\xrightarrow[r_1\times(-1)]{(\lambda-3)r_1+r_2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-1)^2 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda-2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda-2 \\ 0 & (\lambda-1)^2 & 0 \end{bmatrix}\xrightarrow[(\lambda-1)^2r_2+r_3]{(\lambda-2)c_2+c_3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-2)(\lambda-1)^2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\times(-1)}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-2)(\lambda-1)^2 \end{bmatrix}.$$

A_1 的初等因子组为 $\lambda-1, \lambda-2$. 于是可得 A_1 的 Jordan 标准形 $J_1=\begin{bmatrix} 1 & \\ & 2 \end{bmatrix}$. A_2 的初等因子组

为 $\lambda-2,(\lambda-1)^2$. 于是可得 A_2 的 Jordan 标准形 $J_2=\begin{bmatrix}2&&\\&1&1\\&&1\end{bmatrix}$. 因此, A 的 Jordan 标准形

$$J=\begin{bmatrix}1&&&&\\&2&&&\\&&2&&\\&&&1&1\\&&&&1\end{bmatrix}.$$

7. 设 A 为幂零矩阵, 试证 $|A+E|=1$.

证明: 设 A 的 Jordan 标准形为 J. 则存在可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=J$. 又由 A 为幂零矩阵, 存在正整数 k, $A^k=O$, 进而 $O=P^{-1}A^kP=(P^{-1}AP)^k=J^k$. 而由 J 是 A 的 Jordan 标准形, 则

$$J=\begin{bmatrix}\lambda_1&*&&&\\&\lambda_2&*&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&\ddots&*\\&&&&\lambda_n\end{bmatrix},$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的全部特征值, 因此

$$J^k=\begin{bmatrix}\lambda_1^k&*&*&\cdots&*\\&\lambda_2^k&*&\cdots&*\\&&\ddots&\ddots&\vdots\\&&&\ddots&*\\&&&&\lambda_n^k\end{bmatrix}=O,$$

所以, $\lambda_1^k=\lambda_2^k=\cdots=\lambda_n^k=0$, 进而 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$, 即 J 是主对角线元素全为零的上三角形矩阵. 故 $J+E$ 是主对角线元素全为 1 的上三角形矩阵, 因此, $|J+E|=1$. 而由 $A\sim J$ 知 $A+E\sim J+E$, 故 $|A+E|=|J+E|=1$.

习题5.6(B)

1. 求下列矩阵的 Jordan 标准形:

1) $\begin{bmatrix}3&-1&0\\6&-3&2\\8&-6&5\end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix}4&-5&2\\5&-7&3\\6&-9&4\end{bmatrix}$.

解: 1) 对特征矩阵进行初等变换化成对角矩阵,

$$\lambda E-A=\begin{bmatrix}\lambda-3&1&0\\-6&\lambda+3&-2\\-8&6&\lambda-5\end{bmatrix}\xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_2}\begin{bmatrix}1&\lambda-3&0\\\lambda+3&-6&-2\\6&10-6\lambda&\lambda-5\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-(\lambda-3)c_1+c_2}\begin{bmatrix}1&0&0\\\lambda+3&3-\lambda^2&-2\\6&10-6\lambda&\lambda-5\end{bmatrix}\xrightarrow[-6r_1+r_3]{-(\lambda+3)r_1+r_2}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3-\lambda^2&-2\\0&10-6\lambda&\lambda-5\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2\leftrightarrow c_3}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-2&3-\lambda^2\\0&\lambda-5&10-6\lambda\end{bmatrix}\xrightarrow[c_3\times 2]{r_2\times(-\frac{1}{2})}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&\lambda^2-3\\0&\lambda-5&20-12\lambda\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-(\lambda^2-3)c_2+c_3]{-(\lambda-5)r_2+r_3}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-(\lambda^3-5\lambda^2+9\lambda-5)\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3\times(-1)}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\lambda^3-5\lambda^2+9\lambda-5\end{bmatrix}.$$

由于 $g(\lambda)=\lambda^3-5\lambda^2+9\lambda-5=(\lambda-1)(\lambda-2-\mathrm{i})(\lambda-2+\mathrm{i})$, 所以, A 的初等因子组为 $\lambda-1,\lambda-2-\mathrm{i},\lambda-2+\mathrm{i}$. 于是可得 A 的 Jordan 标准形

$$J=\begin{bmatrix}1&&\\&2+\mathrm{i}&\\&&2-\mathrm{i}\end{bmatrix}.$$

2) 对特征矩阵进行初等变换化成对角矩阵,

$$\lambda E-A=\begin{bmatrix}\lambda-4&5&-2\\-5&\lambda+7&-3\\-6&9&\lambda-4\end{bmatrix}\xrightarrow{-r_3+r_2}\begin{bmatrix}\lambda-4&5&-2\\1&\lambda-2&1-\lambda\\-6&9&\lambda-4\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{bmatrix}1&\lambda-2&1-\lambda\\\lambda-4&5&-2\\-6&9&\lambda-4\end{bmatrix}\xrightarrow[(\lambda-1)c_1+c_3]{-(\lambda-2)c_1+c_2}\begin{bmatrix}1&0&0\\\lambda-4&-\lambda^2+6\lambda-3&\lambda^2-5\lambda+2\\-6&6\lambda-3&2-5\lambda\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[6r_1+r_3]{-(\lambda-4)r_1+r_2}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-\lambda^2+6\lambda-3&\lambda^2-5\lambda+2\\0&6\lambda-3&2-5\lambda\end{bmatrix}\xrightarrow{-r_3+r_2}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-\lambda^2&\lambda^2\\0&6\lambda-3&2-5\lambda\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-6c_3+c_2]{c_2+c_3}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-\lambda^2&0\\0&3&\lambda-1\end{bmatrix}\xrightarrow[c_3\times 3]{r_3\times\frac{1}{3}}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-\lambda^2&0\\0&1&\lambda-1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&\lambda-1\\0&-\lambda^2&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-(\lambda-1)c_2+c_3]{\lambda^2r_2+r_3}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\lambda^2(\lambda-1)\end{bmatrix}.$$

所以, A 的初等因子组为 $\lambda^2,\lambda-1$. 于是可得 A 的 Jordan 标准形

$$J=\begin{bmatrix}0&1&\\&0&\\&&1\end{bmatrix}.$$

2. 设四阶矩阵 A 的特征多项式为 $\psi(\lambda)=\lambda(\lambda+1)(\lambda-2)^2$, 并已知 A 不能相似对角化, 试求 A 的 Jordan 标准形.

证明: 由于 A 不能相似对角化, 所以 A 的初等因子组为 $\lambda,\lambda+1,(\lambda-2)^2$, 对应的 Jordan 块为 $J_1=(0),J_2=(-1),J_3=\begin{bmatrix}2&1\\&2\end{bmatrix}$, 进而 A 的 Jordan 标准形为

$$J=\begin{bmatrix}0&&&\\&-1&&\\&&2&1\\&&&2\end{bmatrix}.$$

3. 证明: 矩阵 A 为幂零矩阵的充分必要条件是 A 的特征值全为零.

证明: 设矩阵 A 为幂零矩阵. 令 A 的 Jordan 标准形为 J. 则存在可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=J$. 又由 A 为幂零矩阵, 存在正整数 k, $A^k=O$, 进而 $O=P^{-1}A^kP=(P^{-1}AP)^k=J^k$. 而由 J 是 A 的 Jordan 标准形, 则

$$J=\begin{bmatrix}\lambda_1&*&&&\\&\lambda_2&*&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&\ddots&*\\&&&&\lambda_n\end{bmatrix},$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的全部特征值, 因此

$$J^k=\begin{bmatrix}\lambda_1^k & * & * & \cdots & * \\ & \lambda_2^k & * & \cdots & * \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & * \\ & & & & \lambda_n^k\end{bmatrix}=O,$$

所以, $\lambda_1^k=\lambda_2^k=\cdots=\lambda_n^k=0$, 进而 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$, 即 A 的特征值全为零.

设 A 的特征值全为零. 令 A 的 Jordan 标准形为 J. 则

$$J=\begin{bmatrix}J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s\end{bmatrix},$$

其中每个 Jordan 块都是如下形式:

$$J_i=\begin{bmatrix}0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0\end{bmatrix}_{m_i},$$

m_i 是 J_i 的阶数. 注意到 $J_i^{m_i}=O$, 所以对于任意 $m\geq m_i$, $J_i^m=O$. 令 $m=\max_{1\leq i\leq s}m_i$, 则 $J_i^m=O(i=1,2,\cdots,s)$, 进而 $J^m=O$. 又由于存在可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=J$, 进而 $P^{-1}A^mP=(P^{-1}AP)^m=J^m=O$, 因此, $A^m=POP^{-1}=O$, 所以 A 为幂零矩阵.

4. 设 A 为 n 阶幂等矩阵, 试证

$$A\sim\Lambda=\begin{bmatrix}1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 0 & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0\end{bmatrix},$$

其中“1”的个数 r 恰是 A 的秩.

证明: 由于 A 为幂等矩阵, 所以 A 的特征值只能是 1 或 0. 设 A 的 Jordan 标准形为

$$J=\begin{bmatrix}J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s\end{bmatrix}.$$

故存在可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=J$. 则 $J^2=(P^{-1}AP)^2=P^{-1}A^2P=P^{-1}AP=J$, 从而 $J_i^2=J_i(i=1,2,\cdots,s)$. 而形为 J_i 的矩阵可以改写成 $\lambda E+N$, 其中 E,N 与 J_i 同阶. 此时$J_i^2-J_i=(\lambda^2-\lambda)E+(2\lambda-1)N+N^2$, 故 $J_i^2=J_i$ 当且仅当 $J_i=(1)$ 或 $J_i=(0)$ $(i=1,2,\cdots,s)$. 因此, 所有 Jordan 块为 1 阶矩阵, 即 Jordan 标准形 J 为对角矩阵 Λ, 因此 $A\sim\Lambda$, 相似矩阵秩相同, $R(A)=R(\Lambda)=$ “1”的个数 r.

6 第六章

6.1 习题6.1

习题6.1(A)

1. 写出下列二次型的矩阵:

1) $f(x_1,x_2,x_3)=3x_2^2-x_3^2+4x_1x_2-x_1x_3+2x_2x_3$; 2) $f(x,y,z)=x^2-2xy+y^2-4xz-7z^2-4yz$;

3) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=-x_1x_2+2\mathrm{i}x_1x_3-3\mathrm{i}x_2x_4$.

解:

$$1)\ A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 3 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -1 \end{bmatrix};\quad 2)\ A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & -7 \end{bmatrix};\quad 3)\ A=\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \mathrm{i} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{3}{2}\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2}\mathrm{i} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. 叙述并证明方阵合同关系的反身性、对称性与传递性.

证明: i) 反身性: $A\simeq A$. 因为 $E^{\mathrm{T}}AE=A$, E 显然是可逆矩阵, 所以 $A\simeq A$.

ii) 对称性: 若 $A\simeq B$, 则 $B\simeq A$. 因为此时存在可逆矩阵 P 使得 $P^{\mathrm{T}}AP=B$, 则 $A=(P^{\mathrm{T}})^{-1}BP^{-1}$, 进而, $(P^{-1})^{\mathrm{T}}B(P^{-1})=A$, 显然 P^{-1} 可逆, 所以, $B\simeq A$.

传递性: 若 $A\simeq B$, $B\simeq C$ 则 $A\simeq C$. 因为此时存在可逆矩阵 P,Q 使得 $P^{\mathrm{T}}AP=B$, $Q^{\mathrm{T}}BQ=C$, 则 $Q^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}APQ=C$, 进而, $(PQ)^{\mathrm{T}}A(PQ)=C$, 显然 PQ 可逆, 所以, $A\simeq C$.

3. 验证下面的矩阵 A,B 合同但不相似:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

证明: 取合同因子 $P=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, 因为 $|P|=2\neq 0$, P 可逆. 同时 $P^{\mathrm{T}}AP=B$, 所以 A,B 合同. 因为相似矩阵具有完全相同特征值, 而 A 的特征值是 1 (二重), B 的特征值是 $1,4$, 所以 A,B 不相似.

4. 验证下面的矩阵 A,B 相似但不合同:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

证明: A 的特征多项式

$$\psi(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 \\ -1 & \lambda-3 \end{vmatrix}=\lambda^2-5\lambda+6-2=(\lambda-1)(\lambda-4),$$

故 A 的特征值为 $1,4$, 都是单重特征值, 因此 A 可以相似对角化为 B, 即 A,B 相似. 因为合同矩阵保持对称性, 而 B 是对称矩阵, A 非对称, 所以 A,B 不合同.

5. 证明: 对实对称矩阵 A,B, 如果 $A\sim B$, 则 $A\simeq B$.

证明: 若 $A\sim B$, 则 A,B 具有完全相同特征值. 又由于是实对称矩阵, 存在正交矩阵 Q_1,Q_2 使得 $Q_1^{-1}AQ_1=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=:\Lambda$, $Q_2^{-1}BQ_2=\Lambda$, 其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的全部特征值.

而 $Q_1^{-1}=Q_1^{\mathrm{T}}$, $Q_2^{-1}=Q_2^{\mathrm{T}}$, 所以, $Q_1^{\mathrm{T}}AQ_1=\Lambda$, $Q_2^{\mathrm{T}}BQ_2=\Lambda$, 即 $A\simeq\Lambda$, $B\simeq\Lambda$, 由合同矩阵的对称性和传递性知, $A\simeq B$.

6. 设 A 是可逆的对称矩阵, 证明 $A^{-1}\simeq A$.

证明: 因为 $A^{-1}A=E$ 及 A 是对称矩阵,, 所以, $A^{\mathrm{T}}A^{-1}A=A^{\mathrm{T}}=A$, 又 A 是可逆矩阵, 所以, $A^{-1}\simeq A$.

习题6.1(B)

1. 试说明对任何矩阵 $A=(a_{ij})$ 及 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$, $f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax$ 是一个 n 元二次型. 以 $n=2$ 为例, 具体给出相应二次型的一般表示式.

解: 因为此时 $f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j=\sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2+\sum_{1\le i<j\le n}(a_{ij}+a_{ji})x_ix_j$, 是 n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的一个二次齐次多项式, 故为 n 元二次型. 在 $n=2$ 时, $f(x_1,x_2)=a_{11}x_1^2+(a_{12}+a_{21})x_1x_2+a_{22}x_2^2$. 注意 A 没有要求对称性, 因此与二次型不会一一对应.

2. 设 A,B 均为 n 阶对称矩阵, 如果对任何 n 维列向量 x, 总有 $x^{\mathrm{T}}Ax=x^{\mathrm{T}}Bx$, 证明 $A=B$.

证明: 取 $x=e_i$, 此时 $e_i^{\mathrm{T}}Ae_i=e_i^{\mathrm{T}}Be_i$ 即 $a_{ii}=b_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$. 再取 $x=e_i+e_j(i\ne j)$ 代入 $x^{\mathrm{T}}Ax=x^{\mathrm{T}}Bx$, 得到 $a_{ii}+a_{jj}+a_{ij}+a_{ji}=b_{ii}+b_{jj}+b_{ij}+b_{ji}$, 再由 $a_{ii}=b_{ii},a_{jj}=b_{jj}$ 及 A,B 均为对称矩阵得出 $a_{ij}=b_{ij}(i\ne j)$. 因此 $A=B$.

3. 设 A 为 n 阶对称矩阵, 如果对任何 n 维列向量 x, 总有 $x^{\mathrm{T}}Ax=0$, 证明 $A=O$.

证明: 方法一. 此时 A,O 均为 n 阶对称矩阵, 对任何 n 维列向量 x, 总有 $x^{\mathrm{T}}Ax=0=x^{\mathrm{T}}Ox$, 由前一题的结论知, $A=O$.

方法二. 取 $x=e_i$, 此时 $e_i^{\mathrm{T}}Ae_i=0$ 即 $a_{ii}=0(i=1,2,\cdots,n)$. 再取 $x=e_i+e_j(i\ne j)$ 代入 $x^{\mathrm{T}}Ax=0$, 得到 $a_{ii}+a_{jj}+a_{ij}+a_{ji}=0$, 再由 $a_{ii}=a_{jj}=0$ 及 A 为对称矩阵得出 $a_{ij}=0(i\ne j)$. 因此 $A=O$.

6.2 习题6.2

1. 用正交变换化下列实二次型为标准型, 并求出所用的正交变换:

1) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$;

2) $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$;

3) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2-2x_1x_4-2x_2x_3+2x_3x_4$.

解: 1) 实二次型 f 的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}1&-2&-4\\-2&4&-2\\-4&-2&1\end{bmatrix},$$

其特征行列式为

$$\psi(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & 4\\ 2 & \lambda-4 & 2\\ 4 & 2 & \lambda-1\end{vmatrix}\xlongequal{-r_1+r_3}\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & 4\\ 2 & \lambda-4 & 2\\ 5-\lambda & 0 & \lambda-5\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-5)\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & 4\\ 2 & \lambda-4 & 2\\ -1 & 0 & 1\end{vmatrix}\xlongequal{c_3+c_1}(\lambda-5)\begin{vmatrix}\lambda+3 & 2 & 4\\ 4 & \lambda-4 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-5)(\lambda^2-\lambda-12-8)=(\lambda-5)^2(\lambda+4),$$

A 的特征值为 $\lambda_1=5$(二重), $\lambda_2=-4$.

对于特征值 $\lambda_1=5$, 由齐次线性方程组 $(\lambda_1E-A)x=\mathbf{0}$ 的系数矩阵

$$\lambda_1E-A=\begin{bmatrix}4&2&4\\2&1&2\\4&2&4\end{bmatrix}\xrightarrow[r_1\leftrightarrow r_2]{\substack{-r_1+r_3\\-2r_2+r_1}}\begin{bmatrix}2&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

取自由未知量 $\begin{bmatrix}x_2\\x_3\end{bmatrix}$ 为 $\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-2\\0\end{bmatrix}$, 分别解得 $x_1=1,x_1=1$, 即得到特征向量的基础解系 $\alpha_1=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_2=(1,-2,0)^{\mathrm{T}}$. 将其用 Schmidt 方法正交单位化, 令 $\beta_1=\alpha_1$, 则 $(\beta_1,\beta_1)=2$, $||\beta_1||=\sqrt{2}$. 再令 $\beta_2=k_1^{(2)}\beta_1+\alpha_2$, 其中 $k_1^{(2)}=-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}=-\frac{1}{2}$, 故 $\beta_2=-\frac{1}{2}\beta_1+\alpha_2=(\frac{1}{2},-2,\frac{1}{2})^{\mathrm{T}}$, $(\beta_2,\beta_2)=\frac{9}{2}$, $||\beta_1||=\frac{3\sqrt{2}}{2}$. 再令 $\gamma_1=\frac{\beta_1}{||\beta_1||}=(\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2})^{\mathrm{T}}$, $\gamma_2=\frac{\beta_2}{||\beta_2||}=(\frac{\sqrt{2}}{6},-\frac{2\sqrt{2}}{3},\frac{\sqrt{2}}{6})^{\mathrm{T}}$.

对于特征值 $\lambda_2=-4$, 由齐次线性方程组 $(\lambda_2E-A)x=\mathbf{0}$ 的系数矩阵

$$\lambda_2E-A=\begin{bmatrix}-5&2&4\\2&-8&2\\4&2&-5\end{bmatrix}\xrightarrow[4r_1+r_3]{\substack{r_3+r_1\\2r_1+r_2}}\begin{bmatrix}-1&4&-1\\0&0&0\\0&18&-9\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{r_2\leftrightarrow r_3\\2r_2+r_1}]{\substack{r_1\times(-1)\\r_3\times\frac{1}{9}}}\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&2&-1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

取自由未知量 $x_3=2$, 解得 $x_1=2,x_2=1$, 即得到特征向量的基础解系 $\alpha_3=(2,1,2)^{\mathrm{T}}$, $(\alpha_3,\alpha_3)=9$, $||\alpha_3||=3$. 令 $\gamma_3=\frac{\alpha_3}{||\alpha_3||}=(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})^{\mathrm{T}}$.

由此得到正交矩阵 $Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$, 即

$$Q=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{6}&\frac{2}{3}\\0&-\frac{2\sqrt{2}}{3}&\frac{1}{3}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{6}&\frac{2}{3}\end{bmatrix},$$

使得

$$Q^{-1}AQ=Q^{\mathrm{T}}AQ=\begin{bmatrix}5&&\\&5&\\&&-4\end{bmatrix}.$$

于是正交变换 $x=Qy$ 即

$$\begin{cases}x_1=\ \ \frac{\sqrt{2}}{2}y_1+\frac{\sqrt{2}}{6}y_2+\frac{2}{3}y_3,\\x_2=\qquad\qquad -\frac{2\sqrt{2}}{3}y_2+\frac{1}{3}y_3,\\x_3=-\frac{\sqrt{2}}{2}y_1+\frac{\sqrt{2}}{6}y_2+\frac{2}{3}y_3\end{cases}$$

便可将二次型 f 化为标准形 $5y_1^2+5y_2^2-4y_3^2$.

2) 实二次型 f 的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{bmatrix},$$

其特征行列式为

$$\begin{aligned}
\psi(\lambda)=|\lambda E-A|&=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -2 & 2\\ -2 & \lambda-5 & 4\\ 2 & 4 & \lambda-5\end{vmatrix}\xlongequal{r_2+r_3}\begin{vmatrix}\lambda-2 & -2 & 2\\ -2 & \lambda-5 & 4\\ 0 & \lambda-1 & \lambda-1\end{vmatrix}\\
&=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-2 & -2 & 2\\ -2 & \lambda-5 & 4\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}\xlongequal{-c_3+c_2}(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-2 & -4 & 2\\ -2 & \lambda-9 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}\\
&=(\lambda-1)(\lambda^2-11\lambda+18-8)=(\lambda-10)(\lambda-1)^2,
\end{aligned}$$

A 的特征值为 $\lambda_1=10$, $\lambda_2=1$(二重).

对于特征值 $\lambda_1=10$, 由齐次线性方程组 $(\lambda_1E-A)x=\mathbf{0}$ 的系数矩阵

$$\lambda_1E-A=\begin{bmatrix}8 & -2 & 2\\ -2 & 5 & 4\\ 2 & 4 & 5\end{bmatrix}\xrightarrow[2r_2+r_1]{\substack{-r_1+r_3\\ r_3+r_2}}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 9 & 9\\ 2 & 4 & 5\end{bmatrix}\xrightarrow[-4r_2+r_1]{\substack{r_1\leftrightarrow r_3\\ r_2\times\frac{1}{9}}}\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

取自由未知量 $x_3=-2$, 解得 $x_1=1,x_2=2$, 即得到特征向量的基础解系 $\alpha_1=(1,2,-2)^{\mathrm{T}}$, $(\alpha_1,\alpha_1)=9$, $||\alpha_1||=3$. 令 $\gamma_1=\frac{\alpha_1}{||\alpha_1||}=(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3})^{\mathrm{T}}$.

对于特征值 $\lambda_2=1$, 由齐次线性方程组 $(\lambda_2E-A)x=\mathbf{0}$ 的系数矩阵

$$\lambda_2E-A=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 2\\ -2 & -4 & 4\\ 2 & 4 & -4\end{bmatrix}\xrightarrow[r_1+\times(-1)]{\substack{r_2+r_3\\ -2r_1+r_2}}\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

取自由未知量 $\begin{bmatrix}x_2\\ x_3\end{bmatrix}$ 为 $\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}$, 分别解得 $x_1=2,x_1=-2$, 即得到特征向量的基础解系 $\alpha_2=(2,1,2)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_3=(-2,2,1)^{\mathrm{T}}$. 由于 $(\alpha_2,\alpha_3)=0$, 所以只需将其单位化. 令 $\gamma_2=\frac{\alpha_2}{||\alpha_2||}=(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})^{\mathrm{T}}$, $\gamma_3=\frac{\alpha_3}{||\alpha_3||}=(-\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3})^{\mathrm{T}}$.

由此得到正交矩阵 $Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$, 即

$$Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix},$$

使得

$$Q^{-1}AQ=Q^{\mathrm{T}}AQ=\begin{bmatrix}10 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}.$$

于是正交变换 $x=Qy$ 即

$$\begin{cases}x_1=\ \ \frac{1}{3}y_1+\frac{2}{3}y_2-\frac{2}{3}y_3,\\ x_2=\ \ \frac{2}{3}y_1+\frac{1}{3}y_2+\frac{2}{3}y_3,\\ x_3=-\frac{2}{3}y_1+\frac{2}{3}y_2+\frac{1}{3}y_3\end{cases}$$

便可将二次型 f 化为标准形 $10y_1^2+y_2^2+y_3^2$.

3) 实二次型 f 的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix},$$

其特征行列式为

$$\psi(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0&1\\-1&\lambda-1&1&0\\0&1&\lambda-1&-1\\1&0&-1&\lambda-1\end{vmatrix}\xlongequal[r_4+r_2]{r_3+r_1}\begin{vmatrix}\lambda-1&0&\lambda-1&0\\0&\lambda-1&0&\lambda-1\\0&1&\lambda-1&-1\\1&0&-1&\lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)^2\begin{vmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&1&\lambda-1&-1\\1&0&-1&\lambda-1\end{vmatrix}\xlongequal[-c_2+c_4]{-c_1+c_3}(\lambda-1)^2\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&\lambda-1&-2\\1&0&-2&\lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)^2(\lambda^2-2\lambda+1-4)=(\lambda+1)(\lambda-3)(\lambda-1)^2,$$

A 的特征值为 $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=3$, $\lambda_3=1$(二重).

对于特征值 $\lambda_1=-1$, 由齐次线性方程组 $(\lambda_1E-A)x=\mathbf{0}$ 的系数矩阵

$$\lambda_1E-A=\begin{bmatrix}-2&-1&0&1\\-1&-2&1&0\\0&1&-2&-1\\1&0&-1&-2\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{2r_3+r_2\\-r_2+r_1\\r_2\times(-\frac{1}{4})}]{\substack{2r_4+r_1\\r_4+r_2\\r_3+r_1}}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&1\\0&1&-2&-1\\1&0&-1&-2\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3+r_1\\2r_3+r_2}]{\substack{r_1\leftrightarrow r_4\\r_2\leftrightarrow r_3}}\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

取自由未知量 $x_4=1$, 解得 $x_1=1,x_2=-1,x_3=-1$, 即得到特征向量的基础解系 $\alpha_1=(1,-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$, $(\alpha_1,\alpha_1)=4$, $||\alpha_1||=2$. 令 $\gamma_1=\frac{\alpha_1}{||\alpha_1||}=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^{\mathrm{T}}$.

对于特征值 $\lambda_2=3$, 由齐次线性方程组 $(\lambda_2E-A)x=\mathbf{0}$ 的系数矩阵

$$\lambda_2E-A=\begin{bmatrix}2&-1&0&1\\-1&2&1&0\\0&1&2&-1\\1&0&-1&2\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{-2r_3+r_2\\r_2+r_1\\r_2\times(-\frac{1}{4})}]{\substack{-2r_4+r_1\\r_4+r_2\\r_3+r_1}}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&-1\\0&1&2&-1\\1&0&-1&2\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3+r_1\\-2r_3+r_2}]{\substack{r_1\leftrightarrow r_4\\r_2\leftrightarrow r_3}}\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

取自由未知量 $x_4=-1$, 解得 $x_1=1,x_2=1,x_3=-1$, 即得到特征向量的基础解系 $\alpha_2=(1,1,-1,-1)^{\mathrm{T}}$, $(\alpha_2,\alpha_2)=4$, $||\alpha_2||=2$. 令 $\gamma_2=\frac{\alpha_2}{||\alpha_2||}=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})^{\mathrm{T}}$.

对于特征值 $\lambda_3=1$, 由齐次线性方程组 $(\lambda_3E-A)x=\mathbf{0}$ 的系数矩阵

$$\lambda_3E-A=\begin{bmatrix}0&-1&0&1\\-1&0&1&0\\0&1&0&-1\\1&0&-1&0\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{r_1\leftrightarrow r_4\\r_2\leftrightarrow r_3}]{\substack{r_4+r_2\\r_3+r_1}}\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

取自由未知量 $\begin{bmatrix}x_3\\x_4\end{bmatrix}$ 为 $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$, 分别解得 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$, 即得到特征向量的基础解系 $\alpha_3=(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_4=(0,1,0,1)^{\mathrm{T}}$. 由于 $(\alpha_3,\alpha_4)=0$, 所以只需将其单位化. 令 $\gamma_3=\frac{\alpha_3}{||\alpha_3||}=(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2},0)^{\mathrm{T}}$, $\gamma_4=\frac{\alpha_4}{||\alpha_4||}=(0,\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2})^{\mathrm{T}}$.

由此得到正交矩阵 $Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)$, 即

$$Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix},$$

使得

$$Q^{-1}AQ=Q^{\mathrm{T}}AQ=\begin{bmatrix}-1&&&\\&3&&\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix}.$$

于是正交变换 $x=Qy$ 即

$$\begin{cases} x_1 = \ \ \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_3, \\ x_2 = -\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 \qquad\quad + \frac{\sqrt{2}}{2}y_4, \\ x_3 = -\frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_3, \\ x_4 = \ \ \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 \qquad\quad + \frac{\sqrt{2}}{2}\ y_4 \end{cases}$$

便可将二次型 f 化为标准形 $-y_1^2+3y_2^2+y_3^2+y_4^2$.

2. 用配方法把把下列二次型化为标准型, 并求出所用的可逆线性变换:

1) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+2x_1x_2-2x_1x_3$;　2) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_3^2-x_2x_3+4x_1x_3$;

3) $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3$.

解: 1) 由于

$$\begin{aligned} f &= x_1^2+2x_1(x_2-x_3)+(x_2-x_3)^2-(x_2-x_3)^2+2x_2^2 \\ &= (x_1+x_2-x_3)^2+x_2^2+2x_2x_3-x_3^2 \\ &= (x_1+x_2-x_3)^2+(x_2+x_3)^2-2x_3^2, \end{aligned}$$

令

$$\begin{cases} y_1 = x_1+x_2-x_3, \\ y_2 = \qquad x_2+x_3, \\ y_3 = \qquad\qquad x_3, \end{cases}$$

亦即

$$\begin{cases} x_1 = y_1-y_2+2y_3, \\ x_2 = \qquad y_2-\ y_3, \\ x_3 = \qquad\qquad y_3, \end{cases}$$

这一可逆线性变换便可将二次型 f 化为标准形 $y_1^2+y_2^2-2y_3^2$.

2) 由于 $f=(x_1+2x_3)^2-x_2x_3$, 先做可逆线性变换

$$\begin{cases} x_1 = y_1, \\ x_2 = \qquad y_2+y_3, \\ x_3 = \qquad y_2-y_3, \end{cases}$$

即

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix},$$

可得

$$f=(y_1+2y_2-2y_3)^2-(y_2^2-y_3^2)=(y_1+2y_2-2y_3)^2-y_2^2+y_3^2,$$

令

$$\begin{cases} z_1 = y_1+2y_2-2y_3, \\ z_2 = \qquad y_2, \\ z_3 = \qquad\qquad y_3, \end{cases}$$

亦即

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix},$$

则 f 化为标准形 $z_1^2 - z_2^2 + z_3^2$. 所用的可逆线性变换为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}.$$

3) 由于

$$f = 2(x_1 - x_2)^2 - (x_2 + 2x_3)^2 + 4x_3^2,$$

令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2, \\ y_2 = \qquad x_2 + 2x_3, \\ y_3 = \qquad\qquad x_3, \end{cases}$$

亦即

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 - 2y_3, \\ x_2 = \qquad y_2 - 2y_3, \\ x_3 = \qquad\qquad y_3, \end{cases}$$

这一可逆线性变换便可将二次型 f 化为标准形 $2y_1^2 - y_2^2 + 4y_3^2$.

6.3 习题6.3

习题6.3(A)

1. 用合同变换(经过若干次初等合同变换实现)把下列实对称矩阵化为对角矩阵, 并求出相应的合同变换矩阵:

$$1)\quad A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}; \qquad 2)\quad A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

解: 1) 对下列矩阵施行初等变换:

$$\begin{bmatrix} A \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2+r_1]{c_2+c_1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{-\frac{1}{2}r_1+r_2 \\ -\frac{5}{2}r_1+r_3}]{\substack{-\frac{1}{2}c_1+c_2 \\ -\frac{5}{2}c_1+c_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{25}{4} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-3r_2+r_3]{-3c_2+c_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

因此,

$$P^{\mathrm{T}}AP = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -\frac{1}{4} & \\ & & -4 \end{bmatrix}, \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2) 对下列矩阵施行初等变换:

$$\begin{bmatrix} A \\ E \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{2r_1+r_2 \\ -2r_1+r_4}]{\substack{2c_1+c_2 \\ -2c_1+c_4}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[3r_2+r_4]{3c_2+c_4} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

因此,

$$P^{\mathrm{T}}AP=\begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & -3 \end{bmatrix}, \qquad P=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. 用合同变换求下列实二次型的规范形, 并求出相应的可逆线性变换:

1) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3$; 2) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$;

3) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=4x_1^2+2x_2^2+x_3^2-2x_4^2+4x_1x_2+4x_1x_3-4x_1x_4+4x_2x_3-4x_2x_4-8x_3x_4$.

解: 1) 二次型 f 的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

对下列矩阵施行初等变换:

$$\begin{bmatrix} A \\ E \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{r_1+r_2 \\ -2r_1+r_3}]{\substack{c_1+c_2 \\ -2c_1+c_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{r_2+r_3 \\ r_2\times\frac{1}{\sqrt{2}}}]{\substack{c_2+c_3 \\ c_2\times\frac{1}{\sqrt{2}}}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

因此,

$$P^{\mathrm{T}}AP=\begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{bmatrix}, \qquad P=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

于是, 可逆线性变换 $x=Py$ 即

$$\begin{cases} x_1=y_1+\frac{1}{\sqrt{2}}y_2-y_3, \\ x_2=\qquad\ \frac{1}{\sqrt{2}}y_2+y_3, \\ x_3=\qquad\qquad\quad y_3 \end{cases}$$

便可将实二次型化为实规范形 $y_1^2-y_2^2$.

2) 二次型 f 的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

对下列矩阵施行初等变换:

$$\begin{bmatrix} A \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2+r_1]{c_2+c_1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{-\frac{1}{2}r_1+r_2 \\ -r_1+r_3}]{\substack{-\frac{1}{2}c_1+c_2 \\ -c_1+c_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2\times 2]{c_2\times 2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

因此,

$$P^{\mathrm{T}}AP = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}, \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

于是, 可逆线性变换 $x = Py$ 即

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 - y_3, \\ x_2 = y_1 + y_2 - y_3, \\ x_3 = \qquad\qquad\ \ y_3 \end{cases}$$

便可将实二次型化为实规范形 $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$.

3) 二次型 f 的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & -4 \\ -2 & -2 & -4 & -2 \end{bmatrix}.$$

对下列矩阵施行初等变换:

$$\begin{bmatrix} A \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & -4 \\ -2 & -2 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{-\frac{1}{2}r_1+r_2 \\ -\frac{1}{2}r_1+r_3 \\ \frac{1}{2}r_1+r_4}]{\substack{-\frac{1}{2}c_1+c_2 \\ -\frac{1}{2}c_1+c_3 \\ \frac{1}{2}c_1+c_4}} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & -3 & -3 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{-r_2+r_3 \\ r_2+r_4}]{\substack{-c_2+c_3 \\ c_2+c_4}} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{-2r_3+r_4 \\ r_1\times\frac{1}{2}}]{\substack{-2c_3+c_4 \\ c_1\times\frac{1}{2}}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

因此,

$$P^{\mathrm{T}}AP = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \qquad P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

于是, 可逆线性变换 $x = Py$ 即

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2, \\ x_2 = \qquad\quad\ y_2 - y_3 + 3y_4, \\ x_3 = \qquad\qquad\quad\ y_3 - 2y_4, \\ x_4 = \qquad\qquad\qquad\quad\ y_4 \end{cases}$$

便可将实二次型化为实规范形 $y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

3. 设四阶实对称矩阵 A 的特征值为 $-2,3,3,0$, 试给出实二次型 $f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax$ 的实规范形.

解: 由于 $A\simeq \operatorname{diag}(3,3,-2,0)\simeq \operatorname{diag}(1,1,-1,0)$, 所以实二次型 $f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax$ 的实规范形为

$$y_1^2+y_2^2-y_3^2.$$

习题6.3(B)

1. 在实数域上, 两个秩数相等的矩阵是否一定合同?

解: 不一定. 例如, $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&2\\3&1\end{bmatrix}$, $R(A)=R(B)=2$, 但因为 A 对称, B 不对称, 而合同的矩阵保持对称性, 所以 A 与 B 不合同.

2. 证明: 两个 n 阶实对称矩阵合同的充分必要条件是它们的秩相同且正惯性指数也相同.

证明: 必要性. 假定实对称矩阵 A,B 合同, 则存在可逆矩阵 P 使得 $P^{\mathrm{T}}AP=B$, 故 $R(A)=R(B)$. 又设 A 合同于实规范形 Λ, 由合同关系的传递性和对称性知, B 也合同于实规范形 Λ, 故 A,B 的正惯性指数也相同.

充分性. 假定实对称矩阵 A,B 的秩相同且正惯性指数也相同, 则负惯性指数也相同, 因此 A,B 合同于同一个实规范形 Λ, 由合同关系的传递性和对称性知, A,B 合同.

3. 证明: 两个 n 阶复对称矩阵合同的充分必要条件是它们的秩相同.

证明: 必要性. 假定复对称矩阵 A,B 合同, 则存在可逆矩阵 P 使得 $P^{\mathrm{T}}AP=B$, 故 $R(A)=R(B)$.

充分性. 假定复对称矩阵 A,B 的秩相同, 则 A,B 合同于同一个复规范形 Λ, 由合同关系的传递性和对称性知, A,B 合同.

4. 对本节习题(A)中第 2 题各二次型, 求出它们的复规范形, 并求出相应的可逆线性变换.

解: 1) 继续对下列矩阵施行初等变换:

$$\begin{bmatrix}A\\E\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\\1&\frac{1}{\sqrt{2}}&-1\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&1\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_2\times \mathrm{i}]{c_2\times \mathrm{i}}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\1&\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}&-1\\0&\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}&1\\0&0&1\end{bmatrix},$$

因此,

$$P^{\mathrm{T}}AP=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{bmatrix},\qquad P=\begin{bmatrix}1&\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}&-1\\0&\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}&1\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

于是, 可逆线性变换 $x=Pz$ 即

$$\begin{cases}x_1=z_1+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}z_2-z_3,\\x_2=\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}z_2+z_3,\\x_3=z_3\end{cases}$$

便可将复二次型化为复规范形 $z_1^2+z_2^2$.

2) 继续对下列矩阵施行初等变换:

$$\begin{bmatrix} A \\ E \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{r_2\times\mathrm{i} \\ r_3\times\mathrm{i}}]{\substack{c_2\times\mathrm{i} \\ c_3\times\mathrm{i}}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ 1 & \mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & \mathrm{i} \end{bmatrix},$$

因此,

$$P^{\mathrm{T}}AP = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & -\mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ 1 & \mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & \mathrm{i} \end{bmatrix}.$$

于是, 可逆线性变换 $x = Pz$ 即

$$\begin{cases} x_1 = z_1 - \mathrm{i}z_2 - \mathrm{i}z_3, \\ x_2 = z_1 + \mathrm{i}z_2 - \mathrm{i}z_3, \\ x_3 = \qquad\qquad\quad \mathrm{i}z_3 \end{cases}$$

便可将复二次型化为复规范形 $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$.

3) 继续对下列矩阵施行初等变换:

$$\begin{bmatrix} A \\ E \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3\times\mathrm{i}]{c_3\times\mathrm{i}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\mathrm{i} & 3 \\ 0 & 0 & \mathrm{i} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

因此,

$$P^{\mathrm{T}}AP = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \qquad P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\mathrm{i} & 3 \\ 0 & 0 & \mathrm{i} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

于是, 可逆线性变换 $x = Pz$ 即

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}z_1 - \frac{1}{2}z_2, \\ x_2 = \qquad\quad z_2 - \mathrm{i}z_3 + 3z_4, \\ x_3 = \qquad\qquad\quad \mathrm{i}z_3 - 2z_4, \\ x_4 = \qquad\qquad\qquad\quad z_4 \end{cases}$$

便可将复二次型化为复规范形 $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$.

6.4 习题6.4

习题6.4(A)

1. 利用定义证明: 若实二次型 $f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j$ 正定, 则 $a_{ii} > 0(i = 1, 2, \cdots, n)$.

证明: 取 $x = e_i$, 则 $f(x) = a_{ii}$, 由 f 正定知 $a_{ii} > 0(i = 1, 2, \cdots, n)$.

2. 判别下列实二次型是否正定:

1) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_2x_3$; 2) $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_2x_3$;

3) $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+4x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_2x_3$;

4) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2-2x_1x_4-2x_2x_3+2x_3x_4$.

解: 1) 非正定, 因为 $a_{33}=-3<0$, 或者因为其矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&2&0\\2&2&1\\0&1&-3\end{bmatrix}$$

的二阶顺序主子式 $|A_2|=\begin{vmatrix}1&2\\2&2\end{vmatrix}=-2<0$.

2) 正定, 因为其矩阵

$$A=\begin{bmatrix}5&-2&0\\-2&3&-1\\0&-1&1\end{bmatrix}$$

的各阶顺序主子式 $|A_1|=5>0$, $|A_2|=\begin{vmatrix}5&-2\\-2&3\end{vmatrix}=11>0$,

$$|A_3|=|A|\xlongequal{r_3+r_2}\begin{vmatrix}5&-2&0\\-2&2&0\\0&-1&1\end{vmatrix}=10-4=6>0.$$

3) 正定, 因为其矩阵

$$A=\begin{bmatrix}3&2&0\\2&4&-2\\0&-2&5\end{bmatrix}$$

的各阶顺序主子式 $|A_1|=3>0$, $|A_2|=\begin{vmatrix}3&2\\2&4\end{vmatrix}=8>0$,

$$|A_3|=|A|\xlongequal[r_1+r_3]{-2r_1+r_2}\begin{vmatrix}3&2&0\\-4&0&-2\\3&0&5\end{vmatrix}=2(-1)^{1+2}(-14)=28>0.$$

4) 非正定, 因为其矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0&-1\\1&1&-1&0\\0&-1&1&1\\-1&0&1&1\end{bmatrix}$$

的二阶顺序主子式 $|A_2|=\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=0$.

3. 设有二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+8x_3^2+ax_1x_2+4x_2x_3$, 试确定实数 a 的取值范围, 使相应的二次型 f 正定.

解: 二次型 f 正定当且仅当其矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&\frac{a}{2}&0\\\frac{a}{2}&2&2\\0&2&8\end{bmatrix}$$

的各阶顺序主子式 $|A_1|=1>0$, $|A_2|=\begin{vmatrix}1&\frac{a}{2}\\\frac{a}{2}&2\end{vmatrix}=2-\frac{a^2}{4}>0$(即 $a^2<8$),

$$|A_3|=|A|=2\begin{vmatrix}1&\frac{a}{2}&0\\\frac{a}{2}&2&2\\0&1&4\end{vmatrix}\xlongequal{-\frac{1}{2}r_3+r_2}2\begin{vmatrix}1&\frac{a}{2}&0\\\frac{a}{2}&\frac{3}{2}&0\\0&1&4\end{vmatrix}=2\cdot4(\frac{3}{2}-\frac{a^2}{4})=12-2a^2>0\ (\text{即 } a^2<6),$$

即等价于 $a^2<6$, 也即当且仅当 a 取值于 $(-\sqrt{6},\sqrt{6})$ 时, 相应的二次型 f 正定.

4. 证明: 实对称矩阵 A 正定的充分必要条件是: 有可逆矩阵 P, 使 $A = P^{\mathrm{T}}P$.

证明: 实对称矩阵 A 正定当且仅当 $A \simeq E$, 即存在可逆矩阵 Q 使得 $Q^{\mathrm{T}}AQ = E$, 也即存在可逆矩阵 Q 使得 $A = (Q^{\mathrm{T}})^{-1}Q^{-1} = (Q^{-1})^{\mathrm{T}}(Q^{-1})$, 故当且仅当存在可逆矩阵 P 使得 $A = P^{\mathrm{T}}P(P = Q^{-1})$.

5. 设 A 是 n 阶正定矩阵, 试证: 对于任意正实数 a, aA 为正定矩阵.

证明: 方法一. 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的全部特征值. 则 $a\lambda_1, a\lambda_2, \cdots, a\lambda_n$ 是 aA 的全部特征值. 由于 A 是正定矩阵, 所以 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \cdots, \lambda_n > 0$. 又由 $a > 0$ 知, $a\lambda_1 > 0, a\lambda_2 > 0, \cdots, a\lambda_n > 0$, 所以, aA 为正定矩阵.

方法二. 由于 A 是正定矩阵, A 的各阶顺序主子式 $|A_1| > 0$, $|A_2| > 0$, $\cdots$, $|A_n| > 0$, 则 aA 的各阶顺序主子式 $|(aA)_1| = a|A_1| > 0$, $|(aA)_2| = a^2|A_2| > 0$, $\cdots$, $|(aA)_n| = a^n|A_n| > 0$, 所以, aA 为正定矩阵.

方法三. 由于 A 是正定矩阵, 对于任意非零实向量 x, 实二次型 $x^{\mathrm{T}}Ax > 0$, 所以实二次型 $x^{\mathrm{T}}(aA)x = a(x^{\mathrm{T}}Ax) > 0$, 所以, aA 为正定矩阵.

6. 证明: 如果 A 是正定矩阵, 则 A^{-1}, A^* 也是正定矩阵.

证明: 1) 方法一. 利用第 4 题的结论, 由于实对称矩阵 A 正定, 存在可逆矩阵 P, 使 $A = P^{\mathrm{T}}P$, 则 $A^{-1} = P^{-1}(P^{\mathrm{T}})^{-1} = ((P^{-1})^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}((P^{-1})^{\mathrm{T}})$. 所以, A^{-1} 也是正定矩阵.

方法二. 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的全部特征值. 由于 A 是正定矩阵, 所以 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \cdots, \lambda_n > 0$. 又由于 A 与 A^{-1} 的特征值互为倒数, 则 $\lambda_1^{-1} > 0, \lambda_2^{-1} > 0, \cdots, \lambda_n^{-1} > 0$ 是 A^{-1} 的全部特征值, 所以, A^{-1} 也是正定矩阵.

2) 由于 A 是正定矩阵, 则 A^{-1} 是正定矩阵且 $|A| > 0$. 而 $A^* = |A|A^{-1}$, 利用第 5 题的结论知, A^* 也是正定矩阵.

7. 证明: n 元实二次型 $f(x)$ 半正定的充分必要条件是其标准形中 n 个平方项的系数全大于或等于零.

证明: 设 n 元实二次型 $f(x)$ 经过可逆线性变换化成标准形 $g(y) = b_1y_1^2 + b_2y_2^2 + \cdots + b_ny_n^2$. 而可逆线性变换保持实二次型的半正定性. 故只需证明 $g(y)$ 半正定当且仅当 $b_1 \geq 0, b_2 \geq 0, \cdots, b_n \geq 0$.

若 $b_1 \geq 0, b_2 \geq 0, \cdots, b_n \geq 0$, 显然对于任何 n 维实向量, $g(y) \geq 0$, 即 $g(y)$ 半正定. 若 $g(y)$ 半正定, 则对于任何 n 维实向量, $g(y) \geq 0$. 取 $y = e_i$, 则 $g(y) = b_i \geq 0(i = 1, 2, \cdots, n)$.

8. 证明: 实二次型 $f(x) = x^{\mathrm{T}}Ax$ 半正定的充分必要条件是 A 的特征值全大于或等于零.

证明: 设 n 元实二次型 $f(x)$ 经过正交变换化成标准形 $g(y) = \lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2 + \cdots + \lambda_ny_n^2$, 其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为 A 的全部特征值.

若 $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \cdots, \lambda_n \geq 0$, 显然对于任何 n 维实向量, $g(y) \geq 0$, 即 $g(y)$ 半正定, 而正交变换保持实二次型的半正定性, 所以 $f(x)$ 半正定. 若 $f(x)$ 半正定, 则其标准形中 n 个平方项的系数全大于或等

于零, 所以 $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \cdots, \lambda_n \geq 0$.

9. 证明: n 元实二次型 $f(x)$ 半负定的充分必要条件是其标准形中 n 个平方项的系数全小于或等于零.

证明: 由定义知, n 元实二次型 $f(x)$ 半负定当且仅当 $-f(x) = x^{\mathrm{T}}(-A)x$ 半正定, 等价于 $-f(x)$ 的标准形中 n 个平方项的系数全大于或等于零, 也即 $f(x)$ 的标准形中 n 个平方项的系数全小于或等于零.

10. 证明: 实二次型 $f(x) = x^{\mathrm{T}}Ax$ 半负定的充分必要条件是 A 的特征值全小于或等于零.

证明: 由定义知, n 元实二次型 $f(x)$ 半负定当且仅当 $-f(x) = x^{\mathrm{T}}(-A)x$ 半正定, 等价于 $-A$ 的特征值全大于或等于零, 也即 A 的特征值全小于或等于零.

11. 设有实二次型 $f(x) = x^{\mathrm{T}}Ax$. 如果 A 有两个特征根 λ_1, λ_2, 使 $\lambda_1 < 0$ 且 $\lambda_2 > 0$, 证明: $f(x)$ 必是不定二次型.

证明: 设 n 元实二次型 $f(x)$ 经过正交变换化成标准形 $g(y) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$, 其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为 A 的全部特征值. 取 $y = e_1$, $g(e_1) = \lambda_1 < 0$. 取 $y = e_2$, $g(e_2) = \lambda_2 > 0$. 因此, $g(y)$ 是不定二次型. 而正交变换保持实二次型的不定性, 所以, $f(x)$ 是不定二次型.

习题6.4(B)

1. 设 A 是 n 阶正定矩阵, B 是 n 阶半正定矩阵. 证明 $A+B$ 是 n 阶正定矩阵.

证明: 由于 A 是 n 阶正定矩阵, B 是 n 阶半正定矩阵, 所以对于任何 n 维非零实向量, 实二次型 $x^{\mathrm{T}}Ax > 0$, $x^{\mathrm{T}}Bx \geq 0$, 则实二次型 $x^{\mathrm{T}}(A+B)x = x^{\mathrm{T}}Ax + x^{\mathrm{T}}Bx > 0$, 所以 $A+B$ 是 n 阶正定矩阵.

2. 设 A 是正定矩阵, 证明: $|A+E| > 1$.

证明: 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的全部特征值. 因为 A 是正定矩阵, 则 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \cdots, \lambda_n > 0$, 且存在正交矩阵 Q 使得 $Q^{\mathrm{T}}AQ = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) := \Lambda$. 此时 $Q^{-1}(A+E)Q = Q^{-1}AQ + E = Q^{\mathrm{T}}AQ + E = \Lambda + E$, 因此, $|A+E| = |\Lambda + E| = (\lambda_1+1)(\lambda_2+1)\cdots(\lambda_n+1) > 1$.

3. 设 A, B 分别是 m 阶与 n 阶的正定矩阵. 证明 $C = \begin{bmatrix} A & \\ & B \end{bmatrix}$ 是 $m+n$ 阶的正定矩阵.

证明: 对于 $m+n$ 维实向量 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_m, x_{m+1}, \cdots, x_{m+n})^{\mathrm{T}}$, 记 $y = (x_1, x_2, \cdots, x_m)^{\mathrm{T}}$, $z = (x_{m+1}, x_{m+2}, \cdots, x_{m+n})^{\mathrm{T}}$. 则 $m+n$ 元实二次型

$$f(x) = x^{\mathrm{T}}Cx = (y^{\mathrm{T}}, z^{\mathrm{T}}) \begin{bmatrix} A & \\ & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = y^{\mathrm{T}}Ay + z^{\mathrm{T}}Bz.$$

对于任何非零 $m+n$ 维实向量 x, 此时 y, z 中至少有一个为非零实向量, 又由于 A, B 分别是 m 阶与 n 阶的正定矩阵, 所以实二次型 $y^{\mathrm{T}}Ay$, $z^{\mathrm{T}}Bz$ 中至少有一个大于零, 另一个大于或等于零, 因此, 由上式知 $f(x) > 0$, 所以 C 是 $m+n$ 阶的正定矩阵.

4. 已知 n 阶实对称矩阵 $A = (a_{ij})$ 是正定的, $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是任意 n 个非零实数, 证明矩阵 $B = (a_{ij}b_ib_j)$ 也是正定的.

证明: 方法一. 由于 A 是正定的, 所以 A 的各阶顺序主子式 $|A_k|>0(k=1,2,\cdots,n)$. 考虑 B 的 k 阶顺序主子式

$$|B_k|=\begin{vmatrix} a_{11}b_1b_1 & a_{12}b_1b_2 & \cdots & a_{1k}b_1b_k \\ a_{21}b_2b_1 & a_{22}b_2b_2 & \cdots & a_{2k}b_2b_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1}b_kb_1 & a_{k2}b_kb_2 & \cdots & a_{kk}b_kb_k \end{vmatrix}=b_1b_2\cdots b_k\begin{vmatrix} a_{11}b_1 & a_{12}b_2 & \cdots & a_{1k}b_k \\ a_{21}b_1 & a_{22}b_2 & \cdots & a_{2k}b_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1}b_1 & a_{k2}b_2 & \cdots & a_{kk}b_k \end{vmatrix}$$

$$=b_1^2b_2^2\cdots b_k^2\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}=b_1^2b_2^2\cdots b_k^2|A_k|,$$

由于 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是非零实数, 所以, $|B_k|>0(k=1,2,\cdots,n)$, 因此, B 也是正定的.

方法二. 由于 $B=CAC$, 其中 $C=\mathrm{diag}(b_1,b_2,\cdots,b_n)$, 而 A 是正定的, 所以存在可逆矩阵 P 使得 $A=P^{\mathrm{T}}P$. 由于 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是非零实数, 所以 $|C|=b_1b_2\cdots b_n\neq 0$, C 是可逆矩阵, 进而 PC 可逆. 则 $B=CP^{\mathrm{T}}PC=C^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}PC=(PC)^{\mathrm{T}}(PC)$, 因此, B 也是正定的.

5. 利用定理 4.5 证明: n 元实二次型 $f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax$ 正定的充分必要条件是 A 的所有主子式的值全大于零.

证明: 充分性. 若 A 的所有主子式的值全大于零, 则 A 的所有顺序主子式的值全大于零, 由定理 4.5 知, 实二次型 $f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax$ 正定.

必要性. 假定实二次型 $f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax$ 正定.则 A 正定.

方法一. 任意给定 A 的一主子式, 它一定是某个对 A 经过有限次换法初等合同变换化成的与 A 合同的矩阵 B 的顺序主子式, 由于合同变换保持实对称矩阵的正定性, 所以 B 正定, 其顺序主子式的值大于零, 进而 A 的该主子式的值大于零. 由任意性知, A 的所有主子式的值全大于零.

方法二. 任意给定 A 的一 k 阶主子式, 记为

$$|B_k|=\begin{vmatrix} a_{i_1,i_1} & a_{i_1,i_2} & \cdots & a_{i_1,i_k} \\ a_{i_2,i_1} & a_{i_2,i_2} & \cdots & a_{i_2,i_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_k,i_1} & a_{i_k,i_2} & \cdots & a_{i_k,i_k} \end{vmatrix}\quad(1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n),$$

则 k 元二次型 $g(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_k})=f(0,\cdots,0,x_{i_1},0,\cdots,0,x_{i_2},0,\cdots,0,x_{i_k},0,\cdots,0)$ 是以 B_k 为对称矩阵的正定二次型, B_k 正定, $|B_k|>0$.

7 第七章

7.1 习题7.1

习题7.1(A)

1. 判断下列集合对于指明的数域和指定的运算是否构成线性空间:

1) 集合: n 阶实矩阵的全体; 数域: 实数域; 运算: 矩阵的加法及数乘.

2) 集合: 3 阶实对称矩阵的全体; 数域: 实数域; 运算: 矩阵的加法及数乘.

3) 集合: n 阶可逆实矩阵的全体; 数域: 实数域; 运算: 矩阵的加法及数乘.

4) 集合: 实数域上的所有 5 次多项式; 数域: 实数域; 运算: 多项式的加法及数乘.

5) 集合: 常数项为零并且次数低于 5 次的实系数多项式的全体; 数域: 实数域; 运算: 多项式的加法及数乘.

6) 集合: 全体整数; 数域: 实数域; 运算: 数的加法及数乘.

7) 集合: $[a,b]$ 上实函数的全体; 数域: 实数域; 运算: 函数的加法及数与函数的乘法.

8) 集合: n 阶复矩阵 A 对应于某一特征值 λ 的特征向量的全体; 数域: 复数域; 运算: 数组向量的加法及数乘.

9) 集合: n 维零列(数组)向量以及 n 阶复矩阵 A 对应于某一特征值 λ 的特征向量全体所成的集合; 数域: 复数域; 运算: 数组向量的加法及数乘.

10) 集合: n 维零列(数组)向量以及 n 阶复矩阵 A 的特征向量的全体所成的集合; 数域: 复数域; 运算: 数组向量的加法及数乘.

11) 集合: 数域 F 上的 n 维列(数组)向量全体所成集合 F^n; 数域: F; 运算: n 维数组向量加法及如下的数乘运算 $k\alpha = \mathbf{0}$, $k \in F, \alpha \in F^n$.

12) 集合、数域及加法运算同上题, 数乘运算定义为 $k\alpha = \alpha$, $k \in F, \alpha \in F^n$.

解: 1) 是; 2) 是; 3) 不是, 因为加法运算不封闭, 数乘运算不封闭, 没有零元素; 4) 不是, 因为加法运算不封闭, 数乘运算不封闭, 没有零元素; 5) 是; 6) 不是, 因为数乘运算不封闭; 7) 是; 8) 不是, 因为数乘运算不封闭, 没有零元素; 9)是; 10) 当矩阵 A 只有一个特征值(n 重)时, 是线性空间; 否则, 不是, 因为加法运算不封闭(对应于不同特征值的特征向量, 基于它们的线性无关性, 其和一定不是特征向量, 也不是零元素); 11) 不是, 当 $\alpha \neq \mathbf{0}$ 时, 不满足 $1\alpha = \alpha$; 12) 不是, 当 $\alpha \neq \mathbf{0}$ 时, 不满足 $(k+\ell)\alpha = k\alpha + \ell\alpha$.

2. 检验下列各题中线性空间 V 的子集 V_1 是否构成 V 的子空间:

1) $V = \mathbf{C}^3, V_1 = \{(a_1, a_2, a_3) \,|\, a_1 + a_2 = 0\}$;

2) $V = \mathbf{R}^3, V_1 = \{(a_1, a_2, a_3) \,|\, a_1^2 = a_2\}$;

3) $V=\mathbf{R}[x]_n, V_1$ 是 V 中所有常数项为零的多项式的集合;

4) $V=\mathbf{R}[x]_5, V_1=\mathbf{R}[x]_3$;

5) $V=F^{2\times 2}, V_1$ 是 V 中右上角元素为 1 的二阶矩阵全体的集合;

6) $V=F^{n\times n}, V_1$ 是 V 中主对角元素全为 0 的矩阵全体的集合;

7) $V=\mathbf{R}^n, V_1$ 是 V 中所有第一个分量大于或等于第二个分量的向量所成的集合.

解: 1) 当 $(a_1,a_2,a_3),(b_1,b_2,b_3)\in V_1, k\in\mathbf{C}$ 时, 因为 $a_1+a_2=0, b_1+b_2=0$, 所以, $(a_1+b_1)+(a_2+b_2)=0$, $ka_1+ka_2=0$, 因此, $(a_1,a_2,a_3)+(b_1,b_2,b_3)=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)\in V_1$, $k(a_1,a_2,a_3)=(ka_1,ka_2,ka_3)\in V_1$, 即 V_1 对加法和数乘运算封闭, 所以是线性子空间.

2) 当 $(a_1,a_2,a_3),(b_1,b_2,b_3)\in V_1$ 时, 因为 $a_1^2=a_2, b_1^2=b_2$, 所以, $(a_1+b_1)^2=a_2+b_2$ 当且仅当 $a_1b_1=0$, 因此, V_1 对加法运算不封闭, 所以不是线性子空间.

3) 当 $f,g\in V_1, k\in\mathbf{R}$ 时, 因为 f,g 是常数项为零的多项式, 所以, $f+g, kf$ 也是常数项为零的多项式, 即 $f+g, kf\in V_1$, V_1 对加法和数乘运算封闭, 所以是线性子空间.

4) 当 $f,g\in V_1, k\in\mathbf{R}$ 时, 因为 f,g 是次数小于 3 的实系数多项式, 所以, $f+g, kf$ 也是次数小于 3 的实系数多项式, 即 $f+g, kf\in V_1$, V_1 对加法和数乘运算封闭, 所以是线性子空间.

5) 当 $A,B\in V_1$ 时, 因为 $A+B$ 是右上角元素为 2 的二阶矩阵, V_1 对加法运算不封闭, 所以不是线性子空间.

6) 当 $A,B\in V_1, k\in F$ 时, 因为 A,B 是主对角元素全为 0 的矩阵, 所以 $A+B, kA$ 也是主对角元素全为 0 的矩阵, 即 $A+B, kA\in V_1$, V_1 对加法和数乘运算封闭, 所以是线性子空间.

7) 当 $(a_1,a_2,a_3)^{\mathrm{T}}\in V_1, k\in\mathbf{R}$ 时, 因为 $a_1\geq a_2$, 所以, $ka_1\geq ka_2$ 当且仅当 $k\geq 0$, 因此, V_1 对数乘运算不封闭, 所以不是线性子空间.

3. 证明: 实数域上齐次线性方程组 $Ax=\mathbf{0}$ 的所有解向量的集合 V, 对于通常的向量加法及数乘运算构成实数域 $\mathbf{R}$ 上的线性空间(称为线性方程组 $Ax=\mathbf{0}$ 的解空间); 并且, V 是线性空间 $\mathbf{R}^n$ 的子空间.

证明: 显然, $\mathbf{0}$ 是齐次线性方程组 $Ax=\mathbf{0}$ 的解, 所以 $\mathbf{0}\in V$, V 非空. 对于 $\alpha,\beta\in V, k\in\mathbf{R}$, 因为 α,β 是齐次线性方程组 $Ax=\mathbf{0}$ 的解, 所以, $\alpha+\beta, k\alpha$ 也是 是齐次线性方程组 $Ax=\mathbf{0}$ 的解, 故 $\alpha+\beta, k\alpha\in V$, 即 V 对加法和数乘运算封闭, 因此, V 是线性空间 $\mathbf{R}^n$ 的子空间.

4. 利用子空间判别定理证明下列集合对于指明的数域和指定的运算构成线性空间.

1) 集合: n 阶实反称矩阵的全体; 数域: 实数域; 运算: 矩阵的加法及数乘.

2) 集合: $\{(a,0,b)\,|\,a,b\in\mathbf{R}\}$; 数域: 实数域 $\mathbf{R}$; 运算: 数组向量的加法及数乘.

3) 集合: 迹为零的 3 阶实矩阵的全体; 数域: 实数域; 运算: 矩阵的加法及数乘.

4) 集合: $\{(a_1,a_2,a_3)^{\mathrm{T}}\,|\,a_1+a_2+a_3=0, a_1,a_2,a_3\in\mathbf{R}\}$; 数域: 实数域; 运算: 数组向量的加法及数乘.

5) 集合: $[a,b]$ 上连续函数的全体; 数域: 实数域; 运算: 函数的加法及数与函数的乘法.

解: 1) 注意到 $\mathbf{R}^{n\times n}$ 是实数域上的线性空间. 显然, $O\in V$, 所以 V 非空. 对于 $A,B\in V,k\in\mathbf{R}$, 因为 $A^{\mathrm{T}}=-A,B^{\mathrm{T}}=-B$, 所以 $(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}=-A-B=-(A+B)$, $(kA)^{\mathrm{T}}=kA^{\mathrm{T}}=k(-A)=-(kA)$, 故 $A+B,kA\in V$, 即 V 对加法和数乘运算封闭, 因此, V 是线性空间 $\mathbf{R}^{n\times n}$ 的子空间, 所以是线性空间.

2) 注意到 $\mathbf{R}^3$ 是实数域上的线性空间. 显然, $(0,0,0)\in V$, 所以 V 非空. 对于 $(a_1,0,b_1),(a_2,0,b_2)\in V,k\in\mathbf{R}$, 因为 $(a_1,0,b_1)+(a_2,0,b_2)=(a_1+a_2,0,b_1+b_2)$, $k(a_1,0,a_2)=(ka_1,0,ka_2)$, $a_1+a_2,b_1+b_2,ka_1,ka_2\in\mathbf{R}$, 所以 $(a_1,0,b_1)+(a_2,0,b_2),k(a_1,0,b_1)\in V$, 即 V 对加法和数乘运算封闭, 因此, V 是线性空间 $\mathbf{R}^3$ 的子空间, 所以是线性空间.

3) 注意到 $\mathbf{R}^{3\times3}$ 是实数域上的线性空间. 显然, $O\in V$, 所以 V 非空. 对于 $A,B\in V,k\in\mathbf{R}$, 因为 $\mathrm{tr}A=0$, $\mathrm{tr}B=0$, 所以 $\mathrm{tr}(A+B)=\mathrm{tr}A+\mathrm{tr}B=0$, $\mathrm{tr}(kA)=k\mathrm{tr}A=0$, 故 $A+B,kA\in V$, 即 V 对加法和数乘运算封闭, 因此, V 是线性空间 $\mathbf{R}^{3\times3}$ 的子空间, 所以是线性空间.

4) 注意到 $\mathbf{R}^3$ 是实数域上的线性空间. 显然, $\mathbf{0}\in V$, 所以 V 非空. 对于 $\alpha=(a_1,a_2,a_3)^{\mathrm{T}}$, $\beta=(b_1,b_2,b_3)^{\mathrm{T}}\in V$, $k\in\mathbf{R}$, 因为 $a_1+a_2+a_3=0,b_1+b_2+b_3=0$, 所以 $(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+(a_3+b_3)=0$, $ka_1+ka_2+ka_3=0$, $a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3,ka_1,ka_2,ka_3\in\mathbf{R}$, 故 $\alpha+\beta=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)^{\mathrm{T}},k\alpha=(ka_1,ka_2,ka_3)^{\mathrm{T}}\in V$, 即 V 对加法和数乘运算封闭, 因此, V 是线性空间 $\mathbf{R}^3$ 的子空间, 所以是线性空间.

5) 注意到 $[a,b]$ 上实函数全体 H 是实数域上的线性空间. 显然, $0\in V$, 所以 V 非空. 对于 $f,\,g\in V$, $k\in\mathbf{R}$, 因为 f,g 是 $[a,b]$ 上连续函数, 所以 $f+g$, kf 也是 $[a,b]$ 上连续函数, 故 $f+g,kf\in V$, 即 V 对加法和数乘运算封闭, 因此, V 是线性空间 H 的子空间, 所以是线性空间.

5. 设线性空间 V 中向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 可以由向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表示. 试证

$$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\subseteq L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t).$$

证明: 对于任意 $\alpha\in L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$, 存在 $k_1,k_2,\cdots,k_s\in F$, 使得 $\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$, 即 α 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示, 而向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 可以由向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表示, 所以 α 可由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表示, 则 $\alpha\in L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$, 由 α 的任意性知, $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\subseteq L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$.

习题7.1(B)

1. 判断下列集合对于指明的数域和指定的运算是否构成线性空间:

1) 集合: 3 行 2 列复矩阵的全体; 数域: 实数域; 运算: 矩阵的加法及矩阵的数乘.

2) 集合: $\{a+b\sqrt{7}\,|\,a,b\in\mathbf{Q}\}$; 数域: 有理数域 $\mathbf{Q}$; 运算: 数的加法及乘法.

解: 1) 注意到 $\mathbf{C}^{3\times2}$ 是复数域 $\mathbf{C}$ 上的线性空间, 而实数域 $\mathbf{R}\subset\mathbf{C}$, 显然, $\mathbf{C}^{3\times2}$ 是实数域 $\mathbf{R}$ 上的线

性空间.

2) 注意到 $\mathbf{R}$ 是有理数域上的线性空间. 显然, $0 \in V$, 所以 V 非空. 对于 $a_1+b_1\sqrt{7}, a_2+b_2\sqrt{7} \in V, k \in \mathbf{Q}$, 因为 $a_1, b_1, a_2, b_2, k \in \mathbf{Q}$, 所以 $a_1+a_2, b_1+b_2, ka_1, ka_2 \in \mathbf{Q}$, 故 $(a_1+b_1\sqrt{7})+(a_2+b_2\sqrt{7}) = (a_1+a_2)+(b_1+b_2)\sqrt{7}$, $k(a_1+b_1\sqrt{7}) = ka_1+kb_1\sqrt{7} \in V$, 即 V 对加法和数乘运算封闭, 因此, V 是线性空间 $\mathbf{R}$ 的子空间, 所以是线性空间.

2. 判明下列集合 V 是不是线性空间 $\mathbf{R}[x]_3$ 的子空间:

1) $V = \{ax^2+3 \,|\, a \in \mathbf{R}\}$; 2) $V = \{ax^2+b+3 \,|\, a, b \in \mathbf{R}\}$.

解: 1) 不是, 因为对加法运算不封闭, 而且 $\mathbf{0} \notin V$.

2) 是. 显然 V 非空. 对于 $a_1x^2+b_1+3, a_2x^2+b_2+3 \in V, k \in \mathbf{R}$, 因为 $a_1+a_2, b_1+b_2+3, ka_1, kb_1+3k-3 \in \mathbf{R}$, 所以 $(a_1x^2+b_1+3)+(a_2x^2+b_2+3) = (a_1+a_2)x^2+(b_1+b_2+3)+3 \in V$, $k(a_1x^2+b_1+3) = (ka_1)x^2+(kb_1+3k-3)+3 \in V$, 即 V 对加法和数乘运算封闭, 因此, V 是线性空间 $\mathbf{R}[x]_3$ 的子空间.

3. 设线性空间 V 中向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 与向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 等价. 试证:

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) = L(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t).$$

证明: 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 可以由向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性表示, 故由 (A) 的第 5 题知, $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) \subseteq L(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t)$. 而向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 也可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表示, 同样由 (A) 的第 5 题知, $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) \supseteq L(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t)$. 所以, $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) = L(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t)$.

4. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s; \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 都是线性空间 V 中向量, 试证

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) + L(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t) = L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t).$$

证明: 对于任意 $\alpha \in L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) + L(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t)$, 存在 $\beta \in L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$, $\gamma \in L(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t)$, 使得 $\alpha = \beta + \gamma$, 而由 $\beta \in L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$, 存在 $k_1, k_2, \cdots, k_s \in F$ 使得 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s$, 由 $\gamma \in L(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t)$, 存在 $\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_t \in F$ 使得 $\gamma = \ell_1\beta_1 + \ell_2\beta_2 + \cdots + \ell_t\beta_t$, 所以,

$$\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s + \ell_1\beta_1 + \ell_2\beta_2 + \cdots + \ell_t\beta_t \in L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t),$$

因此, 由 α 的任意性知, $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) + L(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t) \subseteq L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t)$.

对于任意 $\alpha \in L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t)$, 存在 $k_1, k_2, \cdots, k_s, \ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_t \in F$ 使得 $\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s + \ell_1\beta_1 + \ell_2\beta_2 + \cdots + \ell_t\beta_t$, 而 $\beta := k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s \in L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$, $\gamma := \ell_1\beta_1 + \ell_2\beta_2 + \cdots + \ell_t\beta_t \in L(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t)$, 所以, $\alpha = \beta + \gamma \in L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) + L(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t)$, 由 α 的任意性知, $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t) \subseteq L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) + L(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t)$.

因此, $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)+L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$.

7.2 习题7.2

习题7.2(A)

1. 设 V 是数域 F 上的线性空间, $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一个基. 证明:

1) 对数域 F 中任意非零的数 k, 向量组 $k\varepsilon_1,k\varepsilon_2,\cdots,k\varepsilon_n$ 是 V 的一个基; 2) $\varepsilon_1,2\varepsilon_2,\cdots,n\varepsilon_n$ 是 V 的一个基; 3) 对于 F 中任何一组全不为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$, 向量组 $k_1\varepsilon_1,k_2\varepsilon_2,\cdots,k_n\varepsilon_n$ 是 V 的一个基.

证明: 1) 若存在数域 F 上的一组数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 使得 $\lambda_1(k\varepsilon_1)+\lambda_2(k\varepsilon_2)+\cdots+\lambda_n(k\varepsilon_n)=\mathbf{0}$, 即 $(\lambda_1k)\varepsilon_1+(\lambda_2k)\varepsilon_2+\cdots+(\lambda_nk)\varepsilon_n=\mathbf{0}$, 由于 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一个基, 是线性无关的, 因此, $\lambda_1k=\lambda_2k=\cdots=\lambda_nk=0$, 再由 $k\neq 0$, 推出 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$, 因此, $k\varepsilon_1,k\varepsilon_2,\cdots,k\varepsilon_n$ 是线性无关的.

对于 V 中任意向量 α, 由于 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一个基, 所以存在数域 F 上的一组数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,$ λ_n 使得 $\alpha=\lambda_1\varepsilon_1+\lambda_2\varepsilon_2+\cdots+\lambda_n\varepsilon_n$, 立即有 $\alpha=\frac{\lambda_1}{k}(k\varepsilon_1)+\frac{\lambda_2}{k}(k\varepsilon_2)+\cdots+\frac{\lambda_n}{k}(k\varepsilon_n)$, 即 α 可以由 $k\varepsilon_1,k\varepsilon_2,\cdots,$ $k\varepsilon_n$ 线性表示. 综合以上知, $k\varepsilon_1,k\varepsilon_2,\cdots,k\varepsilon_n$ 是 V 的一个基.

2) 若存在数域 F 上的一组数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 使得 $\lambda_1\varepsilon_1+\lambda_2(2\varepsilon_2)+\cdots+\lambda_n(n\varepsilon_n)=\mathbf{0}$, 即 $\lambda_1\varepsilon_1+(2\lambda_2)\varepsilon_2+\cdots+(n\lambda_n)\varepsilon_n=\mathbf{0}$, 由于 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一个基, 是线性无关的, 因此, $\lambda_1=2\lambda_2=\cdots=n\lambda_n=0$, 推出 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$, 因此, $\varepsilon_1,2\varepsilon_2,\cdots,n\varepsilon_n$ 是线性无关的.

对于 V 中任意向量 α, 由于 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一个基, 所以存在数域 F 上的一组数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,$ λ_n 使得 $\alpha=\lambda_1\varepsilon_1+\lambda_2\varepsilon_2+\cdots+\lambda_n\varepsilon_n$, 立即有 $\alpha=\lambda_1\varepsilon_1+\frac{\lambda_2}{2}(2\varepsilon_2)+\cdots+\frac{\lambda_n}{n}(n\varepsilon_n)$, 即 α 可以由 $k\varepsilon_1,2\varepsilon_2,\cdots,n\varepsilon_n$ 线性表示. 综合以上知, $\varepsilon_1,2\varepsilon_2,\cdots,n\varepsilon_n$ 是 V 的一个基.

3) 若存在数域 F 上的一组数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 使得 $\lambda_1(k_1\varepsilon_1)+\lambda_2(k_2\varepsilon_2)+\cdots+\lambda_n(k_n\varepsilon_n)=\mathbf{0}$, 即 $(\lambda_1k_1)\varepsilon_1+(\lambda_2k_2)\varepsilon_2+\cdots+(\lambda_nk_n)\varepsilon_n=\mathbf{0}$, 由于 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一个基, 是线性无关的, 因此, $\lambda_1k_1=\lambda_2k_2=\cdots=\lambda_nk_n=0$, 再由 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 全不为零, 推出 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$, 因此, $k\varepsilon_1,k\varepsilon_2,\cdots,k\varepsilon_n$ 是线性无关的.

对于 V 中任意向量 α, 由于 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一个基, 所以存在数域 F 上的一组数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,$ λ_n 使得 $\alpha=\lambda_1\varepsilon_1+\lambda_2\varepsilon_2+\cdots+\lambda_n\varepsilon_n$, 立即有 $\alpha=\frac{\lambda_1}{k_1}(k_1\varepsilon_1)+\frac{\lambda_2}{k_2}(k_2\varepsilon_2)+\cdots+\frac{\lambda_n}{k_n}(k_n\varepsilon_n)$, 即 α 可以由 $k_1\varepsilon_1,k_2\varepsilon_2,\cdots,k_n\varepsilon_n$ 线性表示. 综合以上知, $k_1\varepsilon_1,k_2\varepsilon_2,\cdots,k_n\varepsilon_n$ 是 V 的一个基.

2. 对于习题 7.1(A) 第 1 题中 2), 5) 9) 各线性空间, 求出维数和一个基.

解: 2) V 中向量的一般表达式为

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}, \qquad a,b,c,d,e,f\in\mathbf{R}.$$

有 6 个自由度, 故在 V 中取

$$E_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad E_2=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad E_3=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix},$$
$$E_4=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad E_5=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix},\quad E_6=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

满足 i) E_1,E_2,E_3,E_4,E_5,E_6 线性无关; ii) 对于 V 中任一矩阵

$$A=\begin{bmatrix}a&b&c\\b&d&e\\c&e&f\end{bmatrix},\text{ 有 } A=aE_1+bE_2+cE_3+dE_4+eE_5+fE_6.$$

可见, E_1,E_2,E_3,E_4,E_5,E_6 是 V 的一个基, $\dim V=6$.

5) V 中向量的一般表达式为 $ax+bx^2+cx^3+dx^4, a,b,c,d\in\mathbf{R}$. 有 6 个自由度, 故在 V 中取 $f_1(x)=x, f_2(x)=x^2, f_3(x)=x^3, f_4(x)=x^4$, 满足 i) f_1,f_2,f_3,f_4 线性无关; ii) 对于 V 中任一向量

$$f(x)=ax+bx^2+cx^3+dx^4,\text{ 有 } f(x)=af_1(x)+bf_2(x)+cf_3(x)+df_4(x).$$

可见, f_1,f_2,f_3,f_4 是 V 的一个基, $\dim V=4$.

9) V 中向量即是齐次线性方程组 $(\lambda E-A)x=\mathbf{0}$ 的解向量, 也即 V 即是该方程组的解空间, 该方程组的基础解系即是 V 的一个基, 所以, V 的维数等于 $n-r$, 其中 r 为 $\lambda E-A$ 的秩.

3. 求出下列线性空间的维数并给出两个基, 要求两基中不含有相同向量:

1) 数域 F 上所有 3 阶上三角形矩阵的集合, 对于通常的矩阵加法及数乘运算所成的数域 F 上的线性空间; 2) 数域 F 上所有 n 阶对角矩阵的集合, 对于通常的矩阵加法及数乘运算所成的数域 F 上的线性空间; 3) 集合 $V=\{(a,0,b)\,|\,a,b\in F\}$ 对于通常的数组向量加法及数乘运算所成的数域 F 上的线性空间.

解: 1) V 中向量的一般表达式为

$$\begin{bmatrix}a&b&c\\0&d&e\\0&0&f\end{bmatrix},\qquad a,b,c,d,e,f\in\mathbf{R}.$$

有 6 个自由度, 故在 V 中取

$$E_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad E_2=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad E_3=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix},$$
$$E_4=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad E_5=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},\quad E_6=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

满足 i) E_1,E_2,E_3,E_4,E_5,E_6 线性无关; ii) 对于 V 中任一矩阵

$$A=\begin{bmatrix}a&b&c\\0&d&e\\0&0&f\end{bmatrix},\text{ 有 } A=aE_1+bE_2+cE_3+dE_4+eE_5+fE_6.$$

可见, E_1,E_2,E_3,E_4,E_5,E_6 是 V 的一个基, $\dim V=6$. 由第 1 题, 另一个基可取为 $2E_1,2E_2,2E_3,2E_4$, $2E_5$, $2E_6$.

2) V 中向量的一般表达式为

$$\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}, \qquad a_1, a_2, \cdots, a_n \in F.$$

有 n 个自由度, 故在 V 中取

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \quad \cdots \quad E_n = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix},$$

满足 i) $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 线性无关; ii) 对于 V 中任一矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}, \text{ 有 } A = a_1E_1 + a_2E_2 + \cdots + a_nE_n.$$

可见, $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 是 V 的一个基, $\dim V = n$. 由第 1 题, 另一个基可取为 $2E_1, 3E_2, \cdots, (n+1)E_n$.

3) V 中向量的一般表达式为 $(a, 0, b), a, b \in F$. 有 2 个自由度, 故在 V 中取 $\varepsilon_1 = (1, 0, 0), \varepsilon_2 = (0, 0, 1)$, 满足 i) $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 线性无关; ii) 对于 V 中任一向量 $\alpha = (a, 0, b)$, 有 $\alpha = a\varepsilon_1 + b\varepsilon_2$, 可见, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 是 V 的一个基, $\dim V = 2$. 另一个基可取为 $(1, 0, 2), (0, 0, 2)$.

4. 求出下列线性空间的维数和一个基:

1) 所有 2 阶实反称矩阵的集合 V 对于通常的矩阵加法与数乘运算所成的实数域 $\mathbf{R}$ 上的线性空间; 2) 数域 F 上所有 n 阶上三角形矩阵的集合 V 对于通常的矩阵加法与数乘运算所成的数域 F 上的线性空间; 3) 数域 F 上所有 n 阶对角矩阵的集合对于通常的矩阵加法与数乘运算所成的数域 F 上的线性空间; 4) 集合

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & 0 \end{bmatrix} \middle| a, b \in \mathbf{R} \right\}$$

对于通常的矩阵加法与数乘运算所成的实数域 $\mathbf{R}$ 上的线性空间.

解: 1) V 中向量的一般表达式为

$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}, \qquad a \in \mathbf{R}.$$

有 1 个自由度, 故在 V 中取

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

满足 i) E_1 线性无关; ii) 对于 V 中任一矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}, \text{ 有 } A = aE_1.$$

可见, E_1 是 V 的一个基, $\dim V = 1$.

2) V 中向量的一般表达式为

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad a_{ij} \in F(1 \leq i \leq j \leq n).$$

有 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 个自由度, 故在 V 中取

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \quad \cdots \quad E_{nn} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{bmatrix},$$

满足 i) $E_{11}, E_{12}, \cdots, E_{nn}$ 线性无关; ii) 对于 V 中任一矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}, \text{ 有 } A = a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} + \cdots + a_{nn}E_{nn}.$$

可见, $E_{11}, E_{12}, \cdots, E_{nn}$ 是 V 的一个基, $\dim V = \frac{1}{2}n(n+1)$.

3) V 中向量的一般表达式为

$$\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}, \qquad a_1, a_2, \cdots, a_n \in F.$$

有 n 个自由度, 故在 V 中取

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \quad \cdots \quad E_n = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix},$$

满足 i) $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 线性无关; ii) 对于 V 中任一矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}, \text{ 有 } A = a_1E_1 + a_2E_2 + \cdots + a_nE_n.$$

可见, $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 是 V 的一个基, $\dim V = n$.

4) V 中向量的一般表达式为

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & 0 \end{bmatrix} \qquad a, b \in \mathbf{R}.$$

有 2 个自由度, 故在 V 中取

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

满足 i) E_1, E_2 线性无关; ii) 对于 V 中任一矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & 0 \end{bmatrix}, \text{ 有 } A = aE_1 + bE_2.$$

可见, E_1, E_2 是 V 的一个基, $\dim V = 2$.

5. 设 V 是一个线性空间, V_1 是由 V 中向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 生成的子空间, 证明: 1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的极大无关组是 V_1 的基; 2) V_1 的维数等于向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的秩.

证明: 设 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的一个极大无关组. 则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 等价. 由于 $V_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$, 则对于 V_1 中任意向量 α, 都可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示, 而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 可以由 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 线性表示, 所以, α 可以由 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 线性表示, 而 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 是线性无关的, 所以 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 是 V_1 的一个基.

2) V_1 的维数等于基的向量个数, 也就等于$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的极大无关组向量个数, 即等于向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的秩.

6. 求 $\mathbf{R}^4$ 中由向量组

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}2\\0\\1\\2\end{bmatrix},\quad \alpha_2=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\3\end{bmatrix},\quad \alpha_3=\begin{bmatrix}0\\2\\1\\8\end{bmatrix},\quad \alpha_4=\begin{bmatrix}5\\-1\\2\\1\end{bmatrix}$$

生成的子空间的维数和一个基.

解: 对 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 施行初等行变换

$$\begin{bmatrix}2&-1&0&5\\0&1&2&-1\\1&0&1&2\\2&3&8&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}1&0&1&2\\0&1&2&-1\\2&-1&0&5\\2&3&8&1\end{bmatrix}\xrightarrow[-2r_1+r_4]{-2r_1+r_3}\begin{bmatrix}1&0&1&2\\0&1&2&-1\\0&-1&-2&1\\0&3&6&-3\end{bmatrix}\xrightarrow[-3r_2+r_4]{r_2+r_3}\begin{bmatrix}1&0&1&2\\0&1&2&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

从上式可以看出, 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩为 2, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 中任意两个都是向量组的极大无关组, 由第 5 题知, 任意两个都是 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 的基, $\dim L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=2$.

习题7.2(B)

1. 求出下列线性空间的维数和一个基:

1) 复数域 $\mathbf{C}$ 上所有 3 维行向量的集合 $V=\{(a_1,a_2,a_3)\,|\,a_1,a_2,a_3\in\mathbf{C}\}$ 对于通常的数组向量加法与数乘运算所成的实数域 $\mathbf{R}$ 上的线性空间; 2) 实数域上所有迹为 0 的三阶对角矩阵的集合, 对于通常的矩阵加法与数乘运算所成的实数域上的线性空间.

解: 1) V 中向量的一般表达式为

$$(b_1+c_1\mathrm{i},b_2+c_2\mathrm{i},b_3+c_3\mathrm{i}),\qquad b_1,c_1,b_2,c_2,b_3,c_3\in\mathbf{R}.$$

有 6 个自由度, 故在 V 中取

$$\varepsilon_1=(1,0,0),\ \varepsilon_2=(\mathrm{i},0,0),\ \varepsilon_3=(0,1,0),\ \varepsilon_4=(0,\mathrm{i},0),\ \varepsilon_5=(0,0,1),\ \varepsilon_6=(0,0,\mathrm{i}),$$

满足 i) $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_6$ 线性无关; ii) 对于 V 中任一向量

$$\alpha=(b_1+c_1\mathrm{i},b_2+c_2\mathrm{i},b_3+c_3\mathrm{i}),\ 有\ \alpha=b_1\varepsilon_1+c_1\varepsilon_2+b_2\varepsilon_3+c_2\varepsilon_4+b_3\varepsilon_5+c_3\varepsilon_6.$$

可见, $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_6$ 是 V 的一个基, $\dim V=6$.

2) V 中向量的一般表达式为

$$\begin{bmatrix} a & & \\ & b & \\ & & -a-b \end{bmatrix} \qquad a, b \in \mathbf{R}.$$

有 2 个自由度, 故在 V 中取

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{bmatrix}, \qquad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{bmatrix},$$

满足 i) E_1, E_2 线性无关; ii) 对于 V 中任一矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a & & \\ & b & \\ & & -a-b \end{bmatrix}, \text{ 有 } A = aE_1 + bE_2.$$

可见, E_1, E_2 是 V 的一个基, $\dim V = 2$.

2. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 n 维线性空间 V 中 n 个向量. 如果 V 中任何向量都可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表示, 证明 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 V 的一个基.

证明: 只需证明 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关.

方法一. 反证法. 假设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性相关. 设 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的一个极大无关组($r < n$). 因为 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 等价, 则 V 中任何向量都可由 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 线性表示, 而 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 线性无关, 故是 V 的一个基, V 的维数为 $r < n$, 与 V 为 n 维线性空间矛盾. 所以, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关.

方法二. 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是 V 的一个基, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 可以由 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 线性表示, 又 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表示, 所以二者等价, 等价向量组的秩相同, 所以, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的秩为 n, 因此, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关.

故 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 V 的一个基.

3. 设 V 是 n 维线性空间, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_r (1 \le r < n)$ 是 V 中一组线性无关的向量. 证明必有 V 中向量 $\varepsilon_{r+1}, \cdots, \varepsilon_n$, 使 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 成为 V 的一个基.

证明: 首先证明当 $r < n$ 时, 必存在 $\varepsilon_{r+1} \in V$, 使得 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_r, \varepsilon_{r+1}$ 线性无关. 若不成立, 即任意 $\alpha \in V$, 都有 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_r, \alpha$ 线性相关, 而 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_r$ 线性无关, 故 α 可以由 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_r$ 线性表示, 再由 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_r$ 线性无关, 得出 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_r$ 是 V 的一个基, V 的维数为 $r < n$, 与 V 为 n 维线性空间矛盾. 因此, 存在 $\varepsilon_{r+1} \in V$, 使得 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_r, \varepsilon_{r+1}$ 线性无关. 若 $r+1 < n$. 同理存在 $\varepsilon_{r+2} \in V$, 使得 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{r+1}, \varepsilon_{r+2}$ 线性无关. 如此继续下去, 必有 V 中向量 $\varepsilon_{r+1}, \cdots, \varepsilon_n$, 使 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 线性无关, 故成为 V 的一个基.

4. 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是 n 维线性空间 V 的一个基. 对任何 $m (1 \le m < n)$, 若令

$$V_1 = L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m), \qquad V_2 = L(\varepsilon_{m+1}, \varepsilon_{m+2}, \cdots, \varepsilon_n),$$

证明 $V = V_1 \bigoplus V_2$.

证明: 先证明 $V=V_1+V_2$. 显然, $V\supseteq V_1+V_2$. 对任意 $\alpha\in V$, 由于 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一个基, 所以存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$, 使得 $\alpha=k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\cdots+k_m\varepsilon_m+k_{m+1}\varepsilon_{m+1}+\cdots+k_n\varepsilon_n$, 而 $\beta=k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\cdots+k_m\varepsilon_m\in V_1$, $\gamma=k_{m+1}\varepsilon_{m+1}+\cdots+k_n\varepsilon_n\in V_2$, 所以, $\alpha=\beta+\gamma\in V_1+V_2$. 由 α 的任意性推出, $V\subseteq V_1+V_2$. 因此, $V=V_1+V_2$.

对于零向量, 假定存在 $\beta\in V_1,\gamma\in V_2$, 使得 $\mathbf{0}=\beta+\gamma$, 则存在数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$, 使得 $\beta=k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\cdots+k_m\varepsilon_m$, 存在数 $k_{m+1},k_{m+2},\cdots,k_n$, 使得 $\gamma=k_{m+1}\varepsilon_{m+1}+k_{m+2}\varepsilon_{m+2}+\cdots+k_n\varepsilon_n$, 因此, $\mathbf{0}=k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\cdots+k_m\varepsilon_m+k_{m+1}\varepsilon_{m+1}+k_{m+2}\varepsilon_{m+2}+\cdots+k_n\varepsilon_n$, 而 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一个基, 是线性无关的, 所以推出 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$, 因而 $\beta=\mathbf{0},\gamma=\mathbf{0}$. 因此零向量的表示法唯一, 和为直和, 即 $V=V_1\bigoplus V_2$.

5. 设 V_1 是线性空间 $\mathbf{R}^4$ 的一个子空间, 它是由 $(1,0,1,0)^{\mathrm{T}},(1,2,0,1)^{\mathrm{T}},(0,2,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 生成的子空间. 试求出 $\mathbf{R}^4$ 的另一子空间 V_2 的一个基, 使 $V_1+V_2=\mathbf{R}^4$.

解: 对下列矩阵 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 施行初等行变换

$$\begin{bmatrix}1&1&0\\0&2&2\\1&0&-1\\0&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_2\times\frac{1}{2}]{-r_1+r_3}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&-1&-1\\0&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow[-r_2+r_4]{r_2+r_3}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

因此矩阵和向量组的秩为 2, 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的极大无关组取为 α_1,α_2, 是 V_1 的一个基, 此时, $V_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=L(\alpha_1,\alpha_2)$. 令

$$\tilde{\alpha}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix},\qquad \tilde{\alpha}_4=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

则 $\alpha_1,\alpha_2,\tilde{\alpha}_3,\tilde{\alpha}_4$ 线性无关, 成为 $\mathbf{R}^4$ 的一个基. 此时, 取 $\mathbf{R}^4$ 的另一子空间 $V_2=L(\tilde{\alpha}_3,\tilde{\alpha}_4)$, 由于 $\tilde{\alpha}_3,\tilde{\alpha}_4$ 线性无关, 故是 V_2 的一个基, 而且由上一题知, $V_1\bigoplus V_2=\mathbf{R}^4$.

7.3 习题7.3

习题7.3(A)

1. 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是线性空间 V 的基, $\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n'$ 是 V 中向量, 且

$$(\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n')=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A,$$

证明: $\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n'$ 为基的充分必要条件是矩阵 A 可逆.

证明: 注意到矩阵 A 中的列向量依次是 $\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n'$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的坐标. $\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n'$ 为基当且仅当 $\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n'$ 线性无关, 也就等价于 $\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n'$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的坐标线性无关, 即 A 的列向量组线性无关, 因此等价于 $R(A)=n$, 也即 A 可逆.

2. 已知线性空间 $\mathbf{R}^3$ 的两个基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 及 $\varepsilon_1',\varepsilon_2',\varepsilon_3'$ 如下:

$$\varepsilon_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\ \varepsilon_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\ \varepsilon_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix};\qquad \varepsilon_1'=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\ \varepsilon_2'=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\ \varepsilon_3'=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

分别求 $\mathbf{R}^3$ 中向量 $\alpha=(a_1,a_2,a_3)^{\mathrm{T}}$ 在这两个基下的坐标.

解: 由于 $\alpha=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+a_3\varepsilon_3$, 所以 α 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 的坐标为 $(a_1,a_2,a_3)^{\mathrm{T}}$. 设 α 在基 $\varepsilon_1',\varepsilon_2',\varepsilon_3'$ 的坐标为 $(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$. 则 $\alpha=x_1\varepsilon_1'+x_2\varepsilon_2'+x_3\varepsilon_3'$, 即

$$\begin{bmatrix}x_1+x_2+x_3\\x_2+x_3\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix},\quad \text{解得}\quad \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1-a_2\\a_2-a_3\\a_3\end{bmatrix}.$$

3. 试求线性空间 $\mathbf{R}^3$ 中由基

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}-3\\1\\-2\end{bmatrix},\ \alpha_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix},\ \alpha_3=\begin{bmatrix}2\\3\\-1\end{bmatrix}\quad \text{到基}\quad \beta_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\ \beta_2=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\ \beta_3=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}$$

的过渡矩阵(变换矩阵). 提示; 利用基本向量组所成的基.

解: 线性空间 $\mathbf{R}^3$ 中基本向量组所成的基为

$$\varepsilon_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\ \varepsilon_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\ \varepsilon_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

则

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)A,\qquad (\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)B,$$

其中

$$A=\begin{bmatrix}-3&1&2\\1&-1&3\\-2&1&-1\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&2&0\\1&3&1\end{bmatrix}.$$

所以

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)(A^{-1}B)=:(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)C.$$

为求 A^{-1}, 进行如下计算

$$(A,E)=\begin{bmatrix}-3&1&2&1&0&0\\1&-1&3&0&1&0\\-2&1&-1&0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{bmatrix}1&-1&3&0&1&0\\-3&1&2&1&0&0\\-2&1&-1&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[2r_1+r_3]{3r_1+r_2}\begin{bmatrix}1&-1&3&0&1&0\\0&-2&11&1&3&0\\0&-1&5&0&2&1\end{bmatrix}\xrightarrow[-2r_3+r_2]{-r_3+r_1}\begin{bmatrix}1&0&-2&0&-1&-1\\0&0&1&1&-1&-2\\0&-1&5&0&2&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-5r_2+r_3]{2r_2+r_1}\begin{bmatrix}1&0&0&2&-3&-5\\0&0&1&1&-1&-2\\0&-1&0&-5&7&11\end{bmatrix}\xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_3]{r_3\times(-1)}\begin{bmatrix}1&0&0&2&-3&-5\\0&1&0&5&-7&-11\\0&0&1&1&-1&-2\end{bmatrix},$$

则得

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}2&-3&-5\\5&-7&-11\\1&-1&-2\end{bmatrix},$$

因此, 由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵为

$$C=A^{-1}B=\begin{bmatrix}2&-3&-5\\5&-7&-11\\1&-1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&2\\1&2&0\\1&3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6&-19&-1\\-13&-42&-1\\-2&-7&0\end{bmatrix}.$$

4. 在线性空间 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 中, 证明

$$A_1=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix},\ A_2=\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix},\ A_3=\begin{bmatrix}1&-1\\1&-1\end{bmatrix},\ A_4=\begin{bmatrix}-1&1\\1&-1\end{bmatrix}$$

构成基. 并求 $B=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$ 在该基下的坐标.

解: 已知下列矩阵构成 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 的一个基

$$E_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\ E_2=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\ E_3=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\ E_4=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}.$$

而且

$$(A_1,A_2,A_3,A_4)=(E_1,E_2,E_3,E_4)A,$$

其中

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1&-1\\1&1&-1&1\\1&-1&1&1\\1&-1&-1&-1\end{bmatrix}.$$

则

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1&-1\\1&1&-1&1\\1&-1&1&1\\1&-1&-1&-1\end{vmatrix}\overset{\substack{r_1+r_2\\ r_1+r_3}}{\underset{r_1+r_4}{=\!=\!=}}\begin{vmatrix}1&1&1&-1\\2&2&0&0\\2&0&2&0\\2&0&0&-2\end{vmatrix}=8\begin{vmatrix}1&1&1&-1\\1&1&0&0\\1&0&1&0\\1&0&0&-1\end{vmatrix}$$

$$\overset{-r_4+r_1}{=\!=\!=}8\begin{vmatrix}0&1&1&0\\1&1&0&0\\1&0&1&0\\1&0&0&-1\end{vmatrix}=-8\begin{vmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{vmatrix}\overset{-r_3+r_1}{=\!=\!=}-8\begin{vmatrix}-1&1&0\\1&1&0\\1&0&1\end{vmatrix}=-8(-2)=16\neq 0,$$

所以, A 可逆, 因此, A_1,A_2,A_3,A_4 构成一个基. 为求 A^{-1},

$$(A,E)=\begin{bmatrix}1&1&1&-1&1&0&0&0\\1&1&-1&1&0&1&0&0\\1&-1&1&1&0&0&1&0\\1&-1&-1&-1&0&0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[-r_1+r_4]{\substack{-r_1+r_2\\-r_1+r_3}}\begin{bmatrix}1&1&1&-1&1&0&0&0\\0&0&-2&2&-1&1&0&0\\0&-2&0&2&-1&0&1&0\\0&-2&-2&0&-1&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-r_2+r_3]{r_2\leftrightarrow r_4}\begin{bmatrix}1&1&1&-1&1&0&0&0\\0&-2&-2&0&-1&0&0&1\\0&0&2&2&0&0&1&-1\\0&0&-2&2&-1&1&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3+r_4]{r_3+r_2}\begin{bmatrix}1&1&1&-1&1&0&0&0\\0&-2&0&2&-1&0&1&0\\0&0&2&2&0&0&1&-1\\0&0&0&4&-1&1&1&-1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4\times\frac14]{\substack{r_2\times(-\frac12)\\ r_3\times\frac12}}\begin{bmatrix}1&1&1&-1&1&0&0&0\\0&1&0&-1&\frac12&0&-\frac12&0\\0&0&1&1&0&0&\frac12&-\frac12\\0&0&0&1&-\frac14&\frac14&\frac14&-\frac14\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4+r_3]{\substack{r_4+r_1\\-r_4+r_2}}\begin{bmatrix}1&1&1&0&\frac34&\frac14&\frac14&-\frac14\\0&1&0&0&\frac14&\frac14&-\frac14&-\frac14\\0&0&1&0&\frac14&-\frac14&\frac14&-\frac14\\0&0&0&1&-\frac14&\frac14&\frac14&-\frac14\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-r_3+r_1]{-r_2+r_1}\begin{bmatrix}1&0&0&0&\frac14&\frac14&\frac14&\frac14\\0&1&0&0&\frac14&\frac14&-\frac14&-\frac14\\0&0&1&0&\frac14&-\frac14&\frac14&-\frac14\\0&0&0&1&-\frac14&\frac14&\frac14&-\frac14\end{bmatrix},$$

则得

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac14&\frac14&\frac14&\frac14\\\frac14&\frac14&-\frac14&-\frac14\\\frac14&-\frac14&\frac14&-\frac14\\-\frac14&\frac14&\frac14&-\frac14\end{bmatrix},$$

B 在基 E_1, E_2, E_3, E_4 下的坐标为 $(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}$, 因此, B 在基 A_1, A_2, A_3, A_4 下的坐标为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

5. 设 F 为某数域. 对于线性空间 $F^{2\times 2}$ 中, 证明

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

是一个基, 并求 $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ 在该基下的坐标.

解: 已知下列矩阵构成 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 的一个基

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

而且

$$(A_1, A_2, A_3, A_4) = (E_1, E_2, E_3, E_4)A,$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

则

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

所以, A 可逆, 因此, A_1, A_2, A_3, A_4 构成一个基. 为求 A^{-1},

$$(A, E) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-r_3+r_4]{-r_3+r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4\times\frac{1}{2}]{r_2\leftrightarrow r_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_4+r_3]{-r_4+r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix},$$

则得

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix},$$

B 在基 E_1, E_2, E_3, E_4 下的坐标为 $(b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22})^{\mathrm{T}}$, 因此, B 在基 A_1, A_2, A_3, A_4 下的坐标为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{21} \\ b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{21} \\ b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ -\frac{1}{2}b_{12} - \frac{1}{2}b_{21} + b_{22} \\ \frac{1}{2}b_{12} + \frac{1}{2}b_{21} \\ \frac{1}{2}b_{12} - \frac{1}{2}b_{21} \end{bmatrix}.$$

6. 对于线性空间 $\mathbf{R}[x]_3$, 1) 证明: $1, 1+x, (1+x)^2$ 是一个基; 2) 求由基 $1, 1+x, (1+x)^2$ 到基 $1, x, x^2$ 的过渡矩阵; 3) 求 $a_2x^2 + a_1x + a_0$ 在基 $1, 1+x, (1+x)^2$ 下的坐标.

解: 1) 已知 $\mathbf{R}[x]_3$ 的一个基为 $1, x, x^2$, 而且

$$(1, 1+x, (1+x)^2) = (1, x, x^2)A,$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

由于 $|A| = 1 \neq 0$, 所以, $1, 1+x, (1+x)^2$ 线性无关, 因此是 3 维线性空间 $\mathbf{R}[x]_3$ 的一个基.

2) 同时, 由于

$$(1, x, x^2) = (1, 1+x, (1+x)^2)A^{-1},$$

所以, 由基 $1, 1+x, (1+x)^2$ 到基 $1, x, x^2$ 的过渡矩阵为 A^{-1}, 为求 A^{-1},

$$(A, E) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-r_2+r_1]{\substack{-r_3+r_1 \\ -2r_3+r_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

则得由基 $1, 1+x, (1+x)^2$ 到基 $1, x, x^2$ 的过渡矩阵

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3) $a_2x^2+a_1x+a_0$ 在基 $1, x, x^2$ 下的坐标为 $(a_0, a_1, a_2)^{\mathrm{T}}$, 因此, $a_2x^2+a_1x+a_0$ 在基 $1, 1+x, (1+x)^2$ 下的坐标为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 - a_1 + a_2 \\ a_1 - 2a_2 \\ a_2 \end{bmatrix}.$$

习题7.3(B)

1. 设 V 是数域 F 上的线性空间, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 是 V 中向量, $A_{m\times s}, B_{s\times t}$ 均为数域 F 上的矩阵, 证明 $[(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)A]B = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)(AB)$.

证明: 记 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)A = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s)$, $(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s)B = (\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_t)$, $C_{m\times t} = AB$, $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)C = (\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \cdots, \tilde{\gamma}_t)$. 则对于 $1 \le i \le t$, 有

$$\gamma_i = \sum_{k=1}^{s} b_{ki}\beta_k = \sum_{k=1}^{s} b_{ki}\sum_{j=1}^{m} a_{jk}\alpha_j = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{s} a_{jk}b_{ki}\right)\alpha_j = \sum_{j=1}^{m} c_{ji}\alpha_j = \tilde{\gamma}_i,$$

所以, $[(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)A]B = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)(AB)$.

2. 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是数域 F 上的线性空间 V 的基, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s \in V$, 且有

$$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)A,$$

其中 A 是数域 F 上的 $n \times s$ 矩阵, 证明: 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的秩等于矩阵 A 的秩.

证明: 注意到矩阵 A 中的列向量依次是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 下的坐标 $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \cdots, \hat{\alpha}_s$. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的秩为 r, 其一个极大无关组为 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$, 此时, 坐标组的相应部分组 $\hat{\alpha}_{i_1}, \hat{\alpha}_{i_2}, \cdots, \hat{\alpha}_{i_r}$ 也线性无关, 而且由于向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 可以由 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 线性表示, 即对

于任意 $1 \le j \le s$, 存在数域 F 上的数 $k_1, k_2, \cdots, k_r$ 使得 $\alpha_j = k_1\alpha_{i_1} + k_2\alpha_{i_2} + \cdots + k_r\alpha_{i_r}$, 此时, 相应的坐标也有 $\hat{\alpha}_j = k_1\hat{\alpha}_{i_1} + k_2\hat{\alpha}_{i_2} + \cdots + k_r\hat{\alpha}_{i_r}$, 即坐标组可以由坐标组的线性无关部分组 $\hat{\alpha}_{i_1}, \hat{\alpha}_{i_2}, \cdots, \hat{\alpha}_{i_r}$ 线性表示, 因此, $\hat{\alpha}_{i_1}, \hat{\alpha}_{i_2}, \cdots, \hat{\alpha}_{i_r}$ 是坐标组的极大无关组, 也即 A 的列向量组的极大无关组, 所以 A 的列秩为 r, 因此矩阵 A 的秩为 r, 即向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的秩等于矩阵 A 的秩.

8 第八章

8.1 习题8.1

习题8.1(A)

本习题各题中的 F 均为数域.

1. 判明下述规则 σ,τ 是否成为各自线性空间 V 的变换:

1) $V=F^{2\times 2}$, 对于任意的 $A\in V$, 若 $A=\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}$, 则 $\sigma(A)=\begin{bmatrix} a & b\\ c & 0\end{bmatrix}$, $\tau(A)=\begin{bmatrix} a\\ c\end{bmatrix}$;

2) $V=\mathbf{R}[x]_3$, 对于任意的 $f(x)\in V$, 若 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$, 则 $\sigma[f(x)]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$, $\tau[f(x)]=xf(x)$;

3) $V=\mathbf{R}^2$, 对于任意的 $\alpha\in V$, 若 $\alpha=(a,b)^{\mathrm{T}}$, 则 $\sigma(\alpha)=(a+1,b+1)^{\mathrm{T}}$, $\tau(\alpha)=(\mathrm{i}a,\mathrm{i}b)^{\mathrm{T}}$.

解: 1) σ 是 V 的变换, 而 τ 不是, 因为 $\tau(A)\notin V$; 2) σ 是 V 的变换, 而 τ 不是, 因为对有些 $f(x)\in V$, $\tau[f(x)]$ 可以不在 V 中; 3) σ 是 V 的变换, 而 τ 不是, 因为 $\tau(\alpha)\notin V$.

2. 设数域 F 上线性空间 F^3的变换 σ,τ 为: 对 $\alpha=(a_1,a_2,a_3)^{\mathrm{T}}\in F^3$, 有

$$\sigma(\alpha)=\begin{bmatrix} a_1\\ a_2\\ a_1+a_2\end{bmatrix},\qquad \tau(\alpha)=\begin{bmatrix} a_1+a_2-a_3\\ 0\\ a_3-a_1-a_2\end{bmatrix},$$

试求 $\sigma+\tau,\sigma\tau$.

解: 对任意 $\alpha=(a_1,a_2,a_3)^{\mathrm{T}}\in F^3$, 有

$$(\sigma+\tau)(\alpha)=\sigma(\alpha)+\tau(\alpha)=\begin{bmatrix} a_1\\ a_2\\ a_1+a_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_1+a_2-a_3\\ 0\\ a_3-a_1-a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2a_1+a_2-a_3\\ a_2\\ a_3\end{bmatrix},$$

$$(\sigma\tau)(\alpha)=\sigma(\tau(\alpha))=\sigma\left(\begin{bmatrix} a_1+a_2-a_3\\ 0\\ a_3-a_1-a_2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} a_1+a_2-a_3\\ 0\\ a_1+a_2-a_3\end{bmatrix}.$$

3. 设线性空间 $V=\mathbf{R}^2$. 定义 V 的变换 σ,τ: 对于 V 的向量 $\alpha=(x,y)$, 规定 $\sigma(\alpha)=(2y,-x),\tau(\alpha)=(-y,\frac{x}{2})$. 试验证变换 σ 可逆且变换 τ 是 σ 的逆变换.

解: 对于 V 的任意向量 $\alpha=(x,y)$, 有

$$(\sigma\tau)(\alpha)=\sigma(\tau(\alpha))=\sigma((-y,\frac{x}{2}))=(2\cdot\frac{x}{2},-(-y))=(x,y)=\alpha=1^*(\alpha);$$

$$(\tau\sigma)(\alpha)=\tau(\sigma(\alpha))=\tau((2y,-x))=(-(-x),\frac{2y}{2})=(x,y)=\alpha=1^*(\alpha).$$

所以, $\sigma\tau=\tau\sigma=1^*$, 因此, 变换 σ 可逆且变换 τ 是 σ 的逆变换.

4. 设 V 是数域 F 上的线性空间, σ 是 V 的变换. 证明: σ 为线性变换的充分必要条件是对任意的 $\alpha,\beta\in V$ 及任意的 $k,\ell\in F$, 总有 $\sigma(k\alpha+\ell\beta)=k\sigma(\alpha)+\ell\sigma(\beta)$.

证明: 必要性. 若 σ 为线性变换, 则对任意的 $\alpha,\beta\in V$ 及任意的 $k,\ell\in F$, 有 $\sigma(k\alpha+\ell\beta)=\sigma(k\alpha)+\sigma(\ell\beta)=k\sigma(\alpha)+\ell\sigma(\beta)$.

充分性. 若对任意的 $\alpha,\beta\in V$ 及任意的 $k,\ell\in F$, 总有 $\sigma(k\alpha+\ell\beta)=k\sigma(\alpha)+\ell\sigma(\beta)$. 则对任意的 $\alpha,\beta\in V$, 取 $k=\ell=1$, 有 $\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(1\alpha+1\beta)=1\sigma(\alpha)+1\sigma(\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$; 对任意的 $\alpha\in V$ 及任意的 $k\in F$, 取 $\ell=0$, 有 $\sigma(k\alpha)=\sigma(k\alpha+\mathbf{0})=\sigma(k\alpha+0\beta)=k\sigma(\alpha)+0\sigma(\beta)=k\sigma(\alpha)+\mathbf{0}=k\sigma(\alpha)$. 因此, σ 为线性变换.

5. 判断下面变换中哪些是线性变换:

1) 在线性空间 $\mathbf{R}^3$ 上, 定义变换 σ: 对 $\alpha=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}\in\mathbf{R}^3$, $\sigma(\alpha)=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\0\end{bmatrix}$;

2) 在线性空间 F^3 上, 定义变换 σ: 对 $\alpha=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}\in F^3$, $\sigma(\alpha)=\begin{bmatrix}a_1^2\\a_2+a_3\\a_3\end{bmatrix}$;

3) 在线性空间 F^4 上, 定义变换 σ: 对 $\alpha=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{bmatrix}\in F^4$, $\sigma(\alpha)=\begin{bmatrix}a_1+a_2\\a_2+a_3\\a_3+a_4\\a_4\end{bmatrix}$;

4) 在线性空间 V 上, 定义变换 σ: $\sigma(\alpha)=\alpha_0,\ \alpha\in V$, 其中 α_0 为 V 中一个固定的向量;

5) 在线性空间 $\mathbf{R}^{n\times n}$ 上, 合同变换 σ: $\sigma(A)=P^{\mathrm{T}}AP,\ A\in\mathbf{R}^{n\times n}$, 其中 P 为一个固定的 n 阶实可逆矩阵;

6) 在线性空间 $\mathbf{R}[x]_n$ 上, 定义变换 σ: $\sigma[f(x)]=f(x)+1,\ f(x)\in\mathbf{R}[x]_n$;

7) 在线性空间 $\mathbf{R}^{n\times n}$ 上, 定义变换 σ: $\sigma(A)=A^{\mathrm{T}},\ A\in\mathbf{R}^{n\times n}$.

解: 1) 对于任意的 $\alpha=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix},\beta=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}\in\mathbf{R}^3$, $k\in\mathbf{R}$, 则

$$\sigma(\alpha+\beta)=\sigma\left(\begin{bmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\a_3+b_3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\0\end{bmatrix}=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta),$$

$$\sigma(k\alpha)=\sigma\left(\begin{bmatrix}ka_1\\ka_2\\ka_3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}ka_1\\ka_2\\0\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\0\end{bmatrix}=k\sigma(\alpha).$$

因此, σ 是线性变换.

2) σ 不是线性变换, 因为 $\sigma(\alpha+\beta)\neq\sigma(\alpha)+\sigma(\beta),\sigma(k\alpha)\neq k\sigma(\alpha)$.

3) 对于任意的 $\alpha=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{bmatrix},\beta=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\b_4\end{bmatrix}\in F^4$, $k\in\mathbf{R}$, 则

$$\sigma(\alpha+\beta)=\sigma\left(\begin{bmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\a_3+b_3\\a_4+b_4\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}a_1+b_1+a_2+b_2\\a_2+b_2+a_3+b_3\\a_3+b_3+a_4+b_4\\a_4+b_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1+a_2\\a_2+a_3\\a_3+a_4\\a_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_1+b_2\\b_2+b_3\\b_3+b_4\\b_4\end{bmatrix}=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta),$$

$$\sigma(k\alpha)=\sigma\left(\begin{bmatrix}ka_1\\ka_2\\ka_3\\ka_4\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}ka_1+ka_2\\ka_2+ka_3\\ka_3+ka_4\\ka_4\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}a_1+a_2\\a_2+a_3\\a_3+a_4\\a_4\end{bmatrix}=k\sigma(\alpha).$$

因此, σ 是线性变换.

4) 当 $\alpha_0 \neq \mathbf{0}$ 时, 因为 $\sigma(\alpha+\beta) \neq \sigma(\alpha)+\sigma(\beta), \sigma(k\alpha) \neq k\sigma(\alpha)(k \neq 1)$. 当 $\alpha_0 = \mathbf{0}$ 时, σ 是线性变换. 因为对于任意的 $\alpha, \beta \in V$, $k \in F$, 有 $\sigma(\alpha+\beta) = \mathbf{0} = \mathbf{0}+\mathbf{0} = \sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$, $\sigma(k\alpha) = \mathbf{0} = k\mathbf{0} = k\sigma(\alpha)$.

5) 对于任意的 $A, B \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $k \in \mathbf{R}$, 则 $\sigma(A+B) = P^{\mathrm{T}}(A+B)P = P^{\mathrm{T}}AP + P^{\mathrm{T}}BP = \sigma(A)+\sigma(B)$, $\sigma(kA) = P^{\mathrm{T}}(kA)P = kP^{\mathrm{T}}AP = k\sigma(A)$. 因此, σ 是线性变换.

6) σ 不是线性变换, 因为 $\sigma[f(x)+g(x)] = f(x)+g(x)+1 \neq \sigma[f(x)]+\sigma[g(x)] = f(x)+1+g(x)+1$, $\sigma[kf(x)] = kf(x)+1 \neq k\sigma[f(x)] = kf(x)+k(k \neq 1)$.

7) 对于任意的 $A, B \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $k \in \mathbf{R}$, 则 $\sigma(A+B) = (A+B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}} = \sigma(A)+\sigma(B)$, $\sigma(kA) = (kA)^{\mathrm{T}} = kA^{\mathrm{T}} = k\sigma(A)$. 因此, σ 是线性变换.

6. 设 σ 是线性空间 V 的线性变换, 证明: 若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 与 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 是 V 中等价的向量组, 则 $\sigma(\alpha_1), \sigma(\alpha_2), \cdots, \sigma(\alpha_s)$ 与 $\sigma(\beta_1), \sigma(\beta_2), \cdots, \sigma(\beta_t)$ 也是等价的向量组.

证明: 由于 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 与 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 是 V 中等价的向量组, 即可以相互线性表示, 故存在 F 中的数 $k_{mi}(m = 1, 2, \cdots, t; i = 1, 2, \cdots, s), \ell_{nj}(n = 1, 2, \cdots, s; j = 1, 2, \cdots, t)$ 使得

$$\alpha_i = k_{1i}\beta_1 + k_{2i}\beta_2 + \cdots + k_{ti}\beta_t, \quad i = 1, 2, \cdots, s;$$

$$\beta_j = \ell_{1j}\alpha_1 + \ell_{2j}\alpha_2 + \cdots + \ell_{sj}\alpha_s, \quad j = 1, 2, \cdots, t.$$

由于 σ 是线性空间 V 的线性变换, 故

$$\sigma(\alpha_i) = k_{1i}\sigma(\beta_1) + k_{2i}\sigma(\beta_2) + \cdots + k_{ti}\sigma(\beta_t), \quad i = 1, 2, \cdots, s;$$

$$\sigma(\beta_j) = \ell_{1j}\sigma(\alpha_1) + \ell_{2j}\sigma(\alpha_2) + \cdots + \ell_{sj}\sigma(\alpha_s), \quad j = 1, 2, \cdots, t.$$

因此, $\sigma(\alpha_1), \sigma(\alpha_2), \cdots, \sigma(\alpha_s)$ 与 $\sigma(\beta_1), \sigma(\beta_2), \cdots, \sigma(\beta_t)$ 也可以相互线性表示, 即也是等价的向量组.

习题8.1(B)

1. 设 V 是数域 F 上的线性空间. 证明 V 的变换具有以下各运算规律: 若 σ, τ, ρ 是 V 的变换, k, ℓ 是 F 中的数, 则

1) $\sigma+\tau = \tau+\sigma$; 2) $(\sigma+\tau)+\rho = \sigma+(\tau+\rho)$; 3) $(\sigma\tau)\rho = \sigma(\tau\rho)$; 4) $(\sigma+\tau)\rho = \sigma\rho+\tau\rho$;

5) $(k\ell)\sigma = k(\ell\sigma)$; 6) $(k+\ell)\sigma = k\sigma+\ell\sigma$; 7) $k(\sigma+\tau) = k\sigma+k\tau$; 8) $1^*\sigma = \sigma 1^* = \sigma$.

证明: 对于线性空间 V 的任意向量 α, 总有

1) $(\sigma+\tau)(\alpha) = \sigma(\alpha)+\tau(\alpha) = \tau(\alpha)+\sigma(\alpha) = (\tau+\sigma)(\alpha)$, 所以, $\sigma+\tau = \tau+\sigma$;

2) $((\sigma+\tau)+\rho)(\alpha) = (\sigma+\tau)(\alpha)+\rho(\alpha) = (\sigma(\alpha)+\tau(\alpha))+\rho(\alpha) = \sigma(\alpha)+(\tau(\alpha)+\rho(\alpha)) = \sigma(\alpha)+(\tau+\rho)(\alpha) = (\sigma+(\tau+\rho))(\alpha)$, 所以, $(\sigma+\tau)+\rho = \sigma+(\tau+\rho)$;

3) $((\sigma\tau)\rho)(\alpha) = (\sigma\tau)(\rho(\alpha)) = \sigma(\tau(\rho(\alpha))) = \sigma((\tau\rho)(\alpha)) = (\sigma(\tau\rho))(\alpha)$, 所以, $(\sigma\tau)\rho = \sigma(\tau\rho)$;

4) $((\sigma+\tau)\rho)(\alpha) = (\sigma+\tau)(\rho(\alpha)) = \sigma(\rho(\alpha))+\tau(\rho(\alpha)) = (\sigma\rho)(\alpha)+(\tau\rho)(\alpha) = (\sigma\rho+\tau\rho)(\alpha)$, 所以, $(\sigma+\tau)\rho = \sigma\rho+\tau\rho$;

5) $((k\ell)\sigma)(\alpha)=(k\ell)\sigma(\alpha)=k(\ell\sigma(\alpha))=k(\ell\sigma)(\alpha)=(k(\ell\sigma))(\alpha)$, 所以, $(k\ell)\sigma=k(\ell\sigma)$;

6) $((k+\ell)\sigma)(\alpha)=(k+\ell)\sigma(\alpha)=k\sigma(\alpha)+\ell\sigma(\alpha)=(k\sigma)(\alpha)+(\ell\sigma)(\alpha)=(k\sigma+\ell\sigma)(\alpha)$, 所以, $(k+\ell)\sigma=k\sigma+\ell\sigma$;

7) $(k(\sigma+\tau))(\alpha)=k(\sigma+\tau)(\alpha)=k(\sigma(\alpha)+\tau(\alpha))=k\sigma(\alpha)+k\tau(\alpha)=(k\sigma)(\alpha)+(k\tau)(\alpha)=(k\sigma+k\tau)(\alpha)$, 所以, $k(\sigma+\tau)=k\sigma+k\tau$;

8) $(1^*\sigma)(\alpha)=1^*(\sigma(\alpha))=\sigma(\alpha)$, $(\sigma 1^*)(\alpha)=\sigma(1^*(\alpha))=\sigma(\alpha)$, 所以, $1^*\sigma=\sigma 1^*=\sigma$.

2. 设 σ 是线性空间 V 的可逆(线性)变换, 证明 σ 的逆变换唯一.

证明: 设 $\sigma\tau_1=\tau_1\sigma=1^*$, $\sigma\tau_2=\tau_2\sigma=1^*$. 则对于线性空间 V 的任意向量 α, 总有 $\tau_1(\alpha)=1^*(\tau_1(\alpha))=(\tau_2\sigma)(\tau_1(\alpha))=\tau_2(\sigma(\tau_1(\alpha)))=\tau_2(1^*(\alpha))=\tau_2(\alpha)$, 所以, $\tau_1=\tau_2$. 故 σ 的逆变换唯一.

2. 设 V 是区间 $[a,b]$ 上全体实连续函数的集合对于函数加法与数乘所成的实数域 $\mathbf{R}$ 上的线性空间. 定义变换 σ: 对于 $f(x)\in V$,

$$\sigma(f(x))=\int_a^x f(t)\sin t\mathrm{d}t.$$

证明 σ 是 V 的线性变换.

证明: 对于任意 $f(x),g(x)\in V$, $k\in\mathbf{R}$, 有

$$\sigma(f(x)+g(x))=\int_a^x(f(t)+g(t))\sin t\mathrm{d}t=\int_a^x f(t)\sin t\mathrm{d}t+\int_a^x g(t)\sin t\mathrm{d}t=\sigma(f(x))+\sigma(g(x)),$$

$$\sigma(kf(x))=\int_a^x kf(t)\sin t\mathrm{d}t=k\int_a^x f(t)\sin t\mathrm{d}t=k\sigma(f(x)),$$

因此, σ 是 V 的线性变换.

3. 设 σ,τ 都是线性空间 V 的可逆变换. 证明: $\sigma\tau$ 也是 V 的可逆变换, 并且 $(\sigma\tau)^{-1}=\tau^{-1}\sigma^{-1}$.

证明: 对于线性空间 V 的任意向量 α, 总有 $((\sigma\tau)(\tau^{-1}\sigma^{-1}))(\alpha)=\sigma(\tau(\tau^{-1}(\sigma^{-1}(\alpha))))=\sigma(\sigma^{-1}(\alpha))=\alpha=1^*(\alpha)$, $((\tau^{-1}\sigma^{-1})(\sigma\tau))(\alpha)=\tau^{-1}(\sigma^{-1}(\sigma(\tau(\alpha))))=\tau^{-1}(\tau(\alpha))=\alpha=1^*(\alpha)$, 所以, $(\sigma\tau)(\tau^{-1}\sigma^{-1})=(\tau^{-1}\sigma^{-1})(\sigma\tau)=1^*$, 故 $\sigma\tau$ 也是 V 的可逆变换, 并且 $(\sigma\tau)^{-1}=\tau^{-1}\sigma^{-1}$.

4. 证明: 对线性空间上任意线性变换 σ,τ,ρ, 总有 $\sigma(\tau+\rho)=\sigma\tau+\sigma\rho$.

证明: 对于线性空间上任意向量 α, 总有 $(\sigma(\tau+\rho))(\alpha)=\sigma((\tau+\rho)(\alpha))=\sigma(\tau(\alpha)+\rho(\alpha))=\sigma(\tau(\alpha))+\sigma(\rho(\alpha))=(\sigma\tau)(\alpha)+(\sigma\rho)(\alpha)=(\sigma\tau+\sigma\rho)(\alpha)$, 所以, $\sigma(\tau+\rho)=\sigma\tau+\sigma\rho$.

5. 举例说明线性空间上线性变换的乘法不满足交换律. 即, 对于线性空间 V 的线性变换 σ,τ, 未必总有 $\sigma\tau=\tau\sigma$.

解: 在线性空间 $\mathbf{R}^3$ 上, 定义变换 σ,τ: 对 $\alpha=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}\in\mathbf{R}^3$, $\sigma(\alpha)=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\0\end{bmatrix}$, $\tau(\alpha)=\begin{bmatrix}a_1+a_3\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$.

由 (A) 的第 5 题的 1) 知, σ 是线性变换. 对于任意的 $\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^3$, $k \in \mathbf{R}$, 则

$$\tau(\alpha+\beta) = \tau\left(\begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1+b_1+a_3+b_3 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+a_3 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1+b_3 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \tau(\alpha)+\tau(\beta),$$

$$\tau(k\alpha) = \tau\left(\begin{bmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ ka_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ka_1+ka_3 \\ ka_2 \\ ka_3 \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} a_1+a_3 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = k\tau(\alpha).$$

因此, τ 是线性变换. 取 $\alpha_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. 则

$$(\sigma\tau)(\alpha_0) = \sigma(\tau(\alpha_0)) = \sigma\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$(\tau\sigma)(\alpha_0) = \tau(\sigma(\alpha_0)) = \tau\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

所以, $(\sigma\tau)(\alpha_0) \neq (\tau\sigma)(\alpha_0)$, 故 $\sigma\tau \neq \tau\sigma$

6. 上题告诉我们, 对于线性空间, 线性变换的乘法不具备交换律. 但是如果有特定的线性变换 σ, τ, 满足 $\sigma\tau = \tau\sigma$, 则称 σ, τ 是可换的. 今设 P 是线性空间 $\mathbf{R}^{n\times n}$ 中的一个确定矩阵, 定义 $\mathbf{R}^{n\times n}$ 的变换如下: 对于 $\mathbf{R}^{n\times n}$ 中的任意矩阵 A, $\sigma(A) = PA$, $\tau(A) = AP$. 试证: 1) σ, τ 都是线性变换; 2) σ, τ 是可换的.

证明: 1) 对于任意 $A, B \in \mathbf{R}^{n\times n}, k \in \mathbf{R}$, $\sigma(A+B) = P(A+B) = PA+PB = \sigma(A)+\sigma(B)$, $\sigma(kA) = P(kA) = k(PA) = k\sigma(A)$, $\tau(A+B) = (A+B)P = AP+BP = \tau(A)+\tau(B)$, $\tau(kA) = (kA)P = k(AP) = k\tau(A)$, 所以, σ, τ 都是线性变换.

2) 对于任意 $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $(\sigma\tau)(A) = \sigma(\tau(A)) = \sigma(AP) = P(AP) = (PA)P = \tau(PA) = \tau(\sigma(A))$, 所以, $\sigma\tau = \tau\sigma$, 即 σ, τ 是可换的.

7. 证明: 线性空间的可逆线性变换必定把线性无关向量组化为线性无关向量组.

证明: 反证法. 假设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关, 而 $\sigma(\alpha_1), \sigma(\alpha_2), \cdots, \sigma(\alpha_s)$ 线性相关. 注意到 σ^{-1} 也是线性变换. 则用 σ^{-1} 作用后一向量组, 得出 $\sigma^{-1}(\sigma(\alpha_1)), \sigma^{-1}(\sigma(\alpha_2)), \cdots, \sigma^{-1}(\sigma(\alpha_s))$ 线性相关, 即 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关, 推出矛盾. 因此, 线性空间的可逆线性变换必定把线性无关向量组化为线性无关向量组.

8. 设 σ 是线性空间 V 的可逆线性变换, α 是 V 中非零向量, 证明 $\sigma(\alpha) \neq \mathbf{0}$.

证明: 反证法. 假设 $\sigma(\alpha) = \mathbf{0}$. 注意到 σ^{-1} 也是线性变换, 两边用 σ^{-1} 作用之, 得到 $\alpha = 1^*(\alpha) = \sigma^{-1}(\sigma(\alpha)) = \sigma^{-1}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, 推出矛盾. 所以 $\sigma(\alpha) \neq \mathbf{0}$.

9. 设 V 是数域 F 上线性空间, σ 是 V 的线性变换. 证明: σ 的值域(像集)

$$\sigma(V) = \{\alpha | \alpha = \sigma(\alpha_1), \alpha_1 \in V\}$$

是 V 的子空间.

证明: 由于 $\mathbf{0}\in V, \mathbf{0}=\sigma(\mathbf{0})$, $\mathbf{0}\in\sigma(V)$, 所以 $\sigma(V)$ 非空. 对于任意 $\alpha,\beta\in\sigma(V)$, 存在 $\alpha_1,\beta_1\in V$, 使得 $\alpha=\sigma(\alpha_1)$, $\beta=\sigma(\beta_1)$, 由于 σ 是线性空间 V 的线性变换, 则 $\alpha+\beta=\sigma(\alpha_1)+\sigma(\beta_1)=\sigma(\alpha_1+\beta_1)$, $\alpha_1+\beta_1\in V$, 所以 $\alpha+\beta\in\sigma(V)$; 对于任意 $k\in F$, 则 $k\alpha=k\sigma(\alpha_1)=\sigma(k\alpha_1)$, $k\alpha_1\in V$, 所以 $k\alpha\in\sigma(V)$. 因此 $\sigma(V)$ 对于加法和数乘运算封闭, 所以它是 V 的子空间.

10. 对于数域 F 上线性空间 V 的线性变换 σ, 集合

$$\sigma_{-1}\{\mathbf{0}\}=\{\alpha|\sigma(\alpha)=\mathbf{0},\alpha\in V\}$$

称为线性变换 σ 的核. 证明它是 V 的子空间.

证明: 由于 $\mathbf{0}\in V, \mathbf{0}=\sigma(\mathbf{0})$, $\mathbf{0}\in\sigma_{-1}\{\mathbf{0}\}$, 所以 $\sigma_{-1}\{\mathbf{0}\}$ 非空. 对于任意 $\alpha,\beta\in\sigma_{-1}\{\mathbf{0}\}$, 由于 σ 是线性空间 V 的线性变换, 则 $\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)=\mathbf{0}+\mathbf{0}=\mathbf{0}$, $\alpha+\beta\in V$, 所以 $\alpha+\beta\in\sigma_{-1}\{\mathbf{0}\}$; 对于任意 $k\in F$, 则 $\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha)=k\mathbf{0}=\mathbf{0}$, $k\alpha\in V$, 所以 $k\alpha\in\sigma_{-1}\{\mathbf{0}\}$. 因此 $\sigma_{-1}\{\mathbf{0}\}$ 对于加法和数乘运算封闭, 所以它是 V 的子空间.

8.2 习题8.2

习题8.2(A)

本习题各题中的 F 均为数域.

1. 设线性空间 F^3 的线性变换 σ 为: 对于 $\alpha=(a_1,a_2,a_3)^{\mathrm{T}}$, 则 $\sigma(\alpha)=\begin{bmatrix}2a_1-a_2\\a_2-a_3\\a_2+a_3\end{bmatrix}$. 求 σ 在基 $\varepsilon_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \varepsilon_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \varepsilon_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ 及基 $\eta_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \eta_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \eta_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ 下的矩阵.

解: 由于

$$\sigma(\varepsilon_1)=\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}=2\varepsilon_1,\quad \sigma(\varepsilon_2)=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}=-\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3,\quad \sigma(\varepsilon_3)=\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}=-\varepsilon_2+\varepsilon_3,$$

所以, σ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵

$$A=\begin{bmatrix}2&-1&0\\0&1&-1\\0&1&1\end{bmatrix}.$$

由于

$$\sigma(\eta_1)=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\eta_1+\eta_3,\quad \sigma(\eta_2)=\begin{bmatrix}-1\\0\\2\end{bmatrix}=-\eta_1+\eta_2+\eta_3,\quad \sigma(\eta_3)=\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}=-\eta_2+2\eta_3,$$

所以, σ 在基 η_1,η_2,η_3 下的矩阵

$$B=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\1&1&2\end{bmatrix}.$$

或者, 由于基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 到基 η_1, η_2, η_3 的过渡矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

为求其逆, 进行下面的计算

$$(P, E) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-r_2+r_3]{-r_1+r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

可得

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

所以, σ 在基 η_1, η_2, η_3 下的矩阵

$$\begin{aligned} B = P^{-1}AP &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2. 设线性空间 F^3 的线性变换 τ 为: 对于 $\alpha = (a_1, a_2, a_3)^{\mathrm{T}}$, 则 $\tau(\alpha) = (3a_1, -a_2, 2a_3)^{\mathrm{T}}$. 1) 证明 τ 为可逆线性变换; 2) 求 τ 在基 $\eta_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\eta_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\eta_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 下的矩阵; 3) 求线性变换 $\tau^3(\tau^3 = \tau\tau\tau)$ 在基 $\varepsilon_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\varepsilon_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\varepsilon_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 下的矩阵.

1) 证明: 由于

$$\tau(\varepsilon_1) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 3\varepsilon_1, \quad \tau(\varepsilon_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = -\varepsilon_2, \quad \tau(\varepsilon_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\varepsilon_3,$$

所以, τ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

显然, $|A| = -6 \neq 0$, A 可逆, 所以, τ 为可逆线性变换.

2) 解: 由于基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 到基 η_1, η_2, η_3 的过渡矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

为求其逆, 进行下面的计算

$$(P, E) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_1 \times (-1)]{\substack{-r_3+r_2 \\ -r_2+r_1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

可得

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

所以, σ 在基 η_1,η_2,η_3 下的矩阵

$$B=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-1&1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}-3&-1&-2\\0&-1&-2\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-4&-3\\0&-1&-3\\0&0&2\end{bmatrix}.$$

3) 解: 由于 τ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵为 A, 所以 τ^3 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵为 A^3, 即

$$A^3=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{bmatrix}^3=\begin{bmatrix}27&0&0\\0&-1&0\\0&0&8\end{bmatrix}.$$

3. 对于第 1,2 题中的线性变换 σ,τ 求 $\sigma\tau$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵. 并且对于 F^3 中任意向量 $\alpha=(a_1,a_2,a_3)^{\mathrm T}$, 求 $(\sigma\tau)(\alpha)$.

解: 由于 σ,τ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵分别为如下的 A,B:

$$A=\begin{bmatrix}2&-1&0\\0&1&-1\\0&1&1\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{bmatrix},$$

所以, $\sigma\tau$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵为 $C=AB$, 即

$$C=AB=\begin{bmatrix}2&-1&0\\0&1&-1\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&1&0\\0&-1&-2\\0&-1&2\end{bmatrix}.$$

而 $\alpha=(a_1,a_2,a_3)^{\mathrm T}$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的坐标为 $(a_1,a_2,a_3)^{\mathrm T}$, 故 $(\sigma\tau)(\alpha)$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的坐标为

$$C\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&1&0\\0&-1&-2\\0&-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6a_1+a_2\\-a_2-2a_3\\-a_2+2a_3\end{bmatrix},$$

因此, $(\sigma\tau)(\alpha)=(6a_1+a_2,-a_2-2a_3,-a_2+2a_3)^{\mathrm T}$.

4. 设 $V=\mathbf{R}^{2\times 2}$, σ 是 V 的线性变换, 对于任意的 $M\in V$, 若 $M=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$, 则 $\sigma(M)=\begin{bmatrix}b&a+b\\c&c+d\end{bmatrix}$. 1) 证明 σ 是可逆线性变换; 2) 求出 σ^{-1}, 即对上面的矩阵 M, 求出 $\sigma^{-1}(M)$.

1) 证明: 取基 $\varepsilon_1=E_{11},\varepsilon_2=E_{12},\varepsilon_3=E_{21},\varepsilon_4=E_{22}$. 由于

$$\sigma(\varepsilon_1)=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}=\varepsilon_2,\quad \sigma(\varepsilon_2)=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}=\varepsilon_1+\varepsilon_2,$$
$$\sigma(\varepsilon_3)=\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}=\varepsilon_3+\varepsilon_4,\quad \sigma(\varepsilon_4)=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}=\varepsilon_4,$$

所以, σ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 下的矩阵

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix},$$

显然, $|A|=-1\neq 0$, A 可逆, 所以, σ 为可逆线性变换.

2) 解: σ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 下的矩阵为 A, 所以, σ^{-1} 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 下的矩阵为 A^{-1}. 为求 A^{-1}, 进行下面的计算

$$(A,E)=\begin{bmatrix}0&1&0&0&1&0&0&0\\1&1&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&1&0\\0&0&1&1&0&0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_1\leftrightarrow r_2]{\substack{-r_1+r_2\\-r_3+r_4}}\begin{bmatrix}1&0&0&0&-1&1&0&0\\0&1&0&0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&-1&1\end{bmatrix},$$

可得

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

而 $M=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 下的坐标为 $(a,b,c,d)^{\mathrm{T}}$, 故 $\sigma^{-1}(M)$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 下的坐标为

$$A^{-1}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -a+b \\ a \\ c \\ -c+d \end{bmatrix},$$

因此,

$$\sigma^{-1}(M)=(-a+b)\varepsilon_1+a\varepsilon_2+c\varepsilon_3+(-c+d)\varepsilon_4=\begin{bmatrix} -a+b & a \\ c & -c+d \end{bmatrix}.$$

习题8.2(B)

1. 证明: 线性变换 σ 可逆的充要条件是 σ 把基化为基(即若 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 为基, 则 $\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots,$ $\sigma(\varepsilon_n)$ 仍为基).

证明: 由于线性变换 σ 可逆当且仅当 σ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵 A 可逆, 此时我们有 $\sigma(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A$, 故由线性空间的性质知, A 可逆等价于 $\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots,\sigma(\varepsilon_n)$ 线性无关, 即 $\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots,\sigma(\varepsilon_n)$ 为基, 因此, 线性变换 σ 可逆当且仅当 σ 把基化为基.

2. 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 是实数域 $\mathbf{R}$ 上的线性空间 V 的一个基, 线性变换 σ 使 $\sigma(\varepsilon_1)=\varepsilon_3$, $\sigma(\varepsilon_2)=\varepsilon_2$, $\sigma(\varepsilon_3)=\varepsilon_1$, 求 σ 的所有特征值及全部特征向量.

解: 由条件知, σ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

从而 A 的特征多项式为

$$\psi(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2-1)=(\lambda+1)(\lambda-1)^2.$$

因此, σ 的所有特征值为 $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=1$(二重).

对于特征值 $\lambda_1=-1$, 求 A 对应于该特征值的全部特征向量, 解齐次线性方程组: $(\lambda_1E-A)=\mathbf{0}$. 由于

$$\lambda_1E-A=\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\xrightarrow[r_2\times(-\frac{1}{2})]{\substack{-r_1+r_3\\ r_1\times(-1)}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

所以, $R(\lambda_1E-A)=2$, 基础解系含 $3-2=1$ 个向量, 取 $x_3=-1$, 解得 $x_1=1,x_2=0$. 解得基础解系 $(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$. 故 A 对应于特征值 $\lambda_1=-1$的全部特征向量为 $k_1(1,0,-1)^{\mathrm{T}}=(k_1,0,-k_1)^{\mathrm{T}}$, 其中 k_1 为任意非零实数. 进而, σ 对应于特征值 $\lambda_1=-1$的全部特征向量为 $k_1\varepsilon_1-k_1\varepsilon_3=k_1(\varepsilon_1-\varepsilon_3)$, 其中 k_1 为任意非零实数.

对于特征值 $\lambda_2=1$, 求 A 对应于该特征值的全部特征向量, 解齐次线性方程组: $(\lambda_2E-A)=\mathbf{0}$. 由于

$$\lambda_2E-A=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1+r_3}\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

所以, $R(\lambda_2E-A)=1$, 基础解系含 $3-1=2$ 个向量, 取 $\begin{bmatrix}x_2\\x_3\end{bmatrix}$ 分别 $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$, 分别解得 $x_1=0, x_1=1$. 得到基础解系 $(0,1,0)^{\mathrm{T}}$, $(1,0,1)^{\mathrm{T}}$. 故 A 对应于特征值 $\lambda_2=1$的全部特征向量为 $k_2(0,1,0)^{\mathrm{T}}+k_3(1,0,1)^{\mathrm{T}}=(k_3,k_2,k_3)^{\mathrm{T}}$, 其中 k_2,k_3 为不同时为零的任意实数. 进而, σ 对应于特征值 $\lambda_2=1$的全部特征向量为 $k_3\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+k_3\varepsilon_3$, 其中 k_2,k_3 为不同时为零的任意实数.

3. 对上题中的线性变换 σ, 试求 V 的另一个基 η_1,η_2,η_3, 使 σ 在基 η_1,η_2,η_3 下的矩阵为对角矩阵.

解: 设 σ 在基 η_1,η_2,η_3 下的矩阵为对角矩阵 Λ, 从基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 到基 η_1,η_2,η_3 的过渡矩阵为 P. 由于 σ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵为 A, 则 $\Lambda=P^{-1}AP$, 即在相似因子 P 作用下, 矩阵 A 可以相似对角化为矩阵 Λ. 为此, 取 P 为 3 个线性无关特征向量构成的矩阵:

$$P=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix},$$

此时, $AP=P\Lambda$, 其中 $\Lambda=\mathrm{diag}(-1,1,1)$, 而且

$$(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)P=(\varepsilon_1-\varepsilon_3,\varepsilon_2,\varepsilon_1+\varepsilon_3),$$

故 σ 在基 $\eta_1=\varepsilon_1-\varepsilon_3,\eta_2=\varepsilon_2,\eta_3=\varepsilon_1+\varepsilon_3$ 下的矩阵为 $\Lambda=\mathrm{diag}(-1,1,1)$.

4. 设 V 是数域 F 上的 n 维线性空间, σ 是 V 的线性变换. 如果有 $\lambda_0\in F$ 及 $\alpha\in V(\alpha\neq\mathbf{0})$, 使 $\sigma(\alpha)=\lambda_0\alpha$, 证明: λ_0 为 σ 的特征值, α 是 σ 对应于特征值 λ_0 的特征向量.

证明: 任取 V 的一个基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$. 设线性变换 σ 在该基下的矩阵为 A. 若 $\lambda_0\in F$ 及 $\alpha\in V(\alpha\neq\mathbf{0})$, 使 $\sigma(\alpha)=\lambda_0\alpha$, 记 α 在该基下的坐标为 x, 则 x 不为 n 维零向量(否则, 推出 $\alpha=\mathbf{0}$, 矛盾). 此时, $\sigma(\alpha)$ 在该基下的坐标为 Ax. 又由于 $\lambda_0\alpha$ 在该基下的坐标为 λ_0x, 而 $\sigma(\alpha)=\lambda_0\alpha$, 所以得出 $\sigma(\alpha)$ 在该基下的坐标又为 λ_0x, 而一个向量在同一基下坐标唯一, 因此, $Ax=\lambda_0x$, 故 λ_0 是 A 的特征值, x 为 A 对应于特征值 λ_0 的特征向量, 进而, λ_0 为 σ 的特征值, α 是 σ 对应于特征值 λ_0 的特征向量.

8.3 习题8.3

1. 证明: 线性空间 V 的任一子空间 V_1 都是数乘变换 k^* 的不变子空间.

证明: 对于任意 $\alpha\in V_1$, 由于 V_1 是子空间, 所以 $k\alpha\in V_1$, 故 $k^*(\alpha)=k\alpha\in V_1$, 因此, V_1 都是数乘变换 k^* 的不变子空间.

2. 设 σ 是线性空间 V 的线性变换, $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一个基. 证明 $\sigma(V)=L(\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots,\sigma(\varepsilon_n))$.

证明: 对于任意 $\alpha\in\sigma(V)$, 存在 $\alpha_1\in V$ 使得 $\alpha=\sigma(\alpha_1)$. 对于 $\alpha_1\in V$, 由 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一

个基, 则存在数域中的数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$, 使得 $\alpha_1 = k_1\varepsilon_1 + k_2\varepsilon_2 + \cdots + k_n\varepsilon_n$, 进而, 由 σ 是线性空间 V 的线性变换知, $\sigma(\alpha_1) = k_1\sigma(\varepsilon_1) + k_2\sigma(\varepsilon_2) + \cdots + k_n\sigma(\varepsilon_n)$, 即 $\alpha = k_1\sigma(\varepsilon_1) + k_2\sigma(\varepsilon_2) + \cdots + k_n\sigma(\varepsilon_n)$, 故有 $\alpha \in L(\sigma(\varepsilon_1), \sigma(\varepsilon_2), \cdots, \sigma(\varepsilon_n))$, 由此及 α 的任意性知, $\sigma(V) \subseteq L(\sigma(\varepsilon_1), \sigma(\varepsilon_2), \cdots, \sigma(\varepsilon_n))$.

对于任意 $\alpha \in L(\sigma(\varepsilon_1), \sigma(\varepsilon_2), \cdots, \sigma(\varepsilon_n))$, 存在数域中的数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$, 使得 $\alpha = k_1\sigma(\varepsilon_1) + k_2\sigma(\varepsilon_2) + \cdots + k_n\sigma(\varepsilon_n)$, 由 σ 是线性空间 V 的线性变换知, $\alpha = \sigma(k_1\varepsilon_1 + k_2\varepsilon_2 + \cdots + k_n\varepsilon_n)$, 记 $\alpha_1 = k_1\varepsilon_1 + k_2\varepsilon_2 + \cdots + k_n\varepsilon_n$, 则 $\alpha_1 \in V$, $\alpha = \sigma(\alpha_1) \in \sigma(V)$, 由此及 α 的任意性知, $\sigma(V) \supseteq L(\sigma(\varepsilon_1), \sigma(\varepsilon_2), \cdots, \sigma(\varepsilon_n))$.

由以上两方面的事实得出 $\sigma(V) = L(\sigma(\varepsilon_1), \sigma(\varepsilon_2), \cdots, \sigma(\varepsilon_n))$.

3. 设线性空间 $V = \mathbf{R}^{2\times 2}$, 线性变换 σ: 对于 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V$, 则 $\sigma(A) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix}$, 试求 $\sigma(V)$. 提示: 利用上题结果.

解: 取 $V = \mathbf{R}^{2\times 2}$ 的一个基

$$\varepsilon_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

则

$$\sigma(\varepsilon_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \varepsilon_1,\ \sigma(\varepsilon_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \varepsilon_2,\ \sigma(\varepsilon_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \varepsilon_3,\ \sigma(\varepsilon_4) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O.$$

于是 $\sigma(V) = L(\sigma(\varepsilon_1), \sigma(\varepsilon_2), \sigma(\varepsilon_3), \sigma(\varepsilon_4))$, 即

$$\sigma(V) = L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, O) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \,\middle|\, a, b, c \in \mathbf{R} \right\}.$$

4. 设线性空间 $V = \mathbf{R}[x]_3$, 线性变换 σ 即求导变换. 1) 试证 V 的子空间 $V_1 = \mathbf{R}[x]_2$ 是 σ 的不变子空间, 而子空间 $V_2 = \{ax^2 + b \,|\, a, b \in \mathbf{R}\}$ 则不是 σ 的不变子空间; 2) 求出 $\sigma(V)$ 及 $\sigma_{-1}\{\mathbf{0}\}$.

1) 证明: 对于任意 $f(x) = a_0 + a_1x \in V_1$, $\sigma(f(x)) = f'(x) = a_1 \in \mathbf{R}[x]_2 = V_1$, 故 V_1 是 σ 的不变子空间. 对于 $f(x) = ax^2 + b \in V_2$, 当 $a \neq 0$ 时, $\sigma(f(x)) = f'(x) = 2ax \notin V_2$, 故 V_2 不是 σ 的不变子空间.

2) 解: 对于任意 $g(x) \in \sigma(V)$, 存在 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in V$ 使得 $g(x) = \sigma(f(x))$, 故 $g(x) = f'(x) = a_1 + 2a_2x \in \mathbf{R}[x]_2 = V_1$, 因此 $\sigma(V) \subseteq V_1$. 对于任意 $g(x) = a_0 + a_1x \in V_1$, 记 $f(x) = a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 \in \mathbf{R}[x]_3 = V$, 则 $g(x) = f'(x) = \sigma(f(x)) \in \sigma(V)$, 所以, $V_1 \subseteq \sigma(V)$. 由此得出, $\sigma(V) = V_1 = \mathbf{R}[x]_2$.

对于任意 $f(x) \in \sigma_{-1}\{\mathbf{0}\}$, $\sigma(f(x)) = f'(x) = 0$, 所以 $f(x) \equiv c \in \mathbf{R}$, 故 $\sigma_{-1}\{\mathbf{0}\} \subseteq \mathbf{R}$. 对于任意 $c \in \mathbf{R}$, $\sigma(c) = c' = 0$, 所以 $c \in \sigma_{-1}\{\mathbf{0}\}$, 因此, $\sigma_{-1}\{\mathbf{0}\} \supseteq \mathbf{R}$. 由此得出, $\sigma_{-1}\{\mathbf{0}\} = \mathbf{R}$.

5. 设 σ 是 n 维线性空间 V 的可逆线性变换, 证明: $\sigma(V) = V, \sigma_{-1}\{\mathbf{0}\} = \{\mathbf{0}\}$.

证明: 显然 $\sigma(V) \subseteq V$. 对于任意 $\alpha \in V$, 因为 $\sigma\sigma^{-1} = 1^*$, 所以, $\alpha = 1^*(\alpha) = (\sigma\sigma^{-1})(\alpha) = \sigma(\sigma^{-1}(\alpha))$, 而由 σ^{-1} 是 V 的线性变换知, $\sigma^{-1}(\alpha) \in V$, 因此, $\alpha \in \sigma(V)$, 因而, $V \subseteq \sigma(V)$. 故 $\sigma(V) = V$.

对于任意 $\alpha \in \sigma_{-1}\{\mathbf{0}\}$, $\sigma(\alpha) = \mathbf{0}$, 又因为 $\sigma^{-1}\sigma = 1^*$, 所以, $\alpha = 1^*(\alpha) = (\sigma^{-1}\sigma)(\alpha) = \sigma^{-1}(\sigma(\alpha)) = \sigma^{-1}(\mathbf{0})$, 而由 σ^{-1} 是 V 的线性变换知, $\sigma^{-1}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, 因此, $\alpha = \mathbf{0}$, 因而, $\sigma_{-1}\{\mathbf{0}\} = \{\mathbf{0}\}$.

9 第九章

9.1 习题9.1

习题9.1(A)

1. 设 V 是实数域 $\mathbf{R}$ 上的 n 维线性空间, $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一个基, 对于 V 中向量 $\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n$, $\beta = y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2 + \cdots + y_n\varepsilon_n$, 定义内积为 $(\alpha,\beta) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + \cdots + nx_ny_n$, 证明 V 在此内积下构成一个欧氏空间.

证明: 首先, 对于任意 $\alpha,\beta \in V$, (α,β) 是由 α,β 确定的一个实数. 其次, 证明内积满足欧氏空间定义中的四个条件: 对于任意 $\alpha,\beta,\gamma \in V$, 任意实数 k, 有

(1) $(\alpha,\beta) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + \cdots + nx_ny_n = y_1x_1 + 2y_2x_2 + \cdots + ny_nx_n = (\beta,\alpha)$;

(2) $(k\alpha,\beta) = kx_1y_1 + 2kx_2y_2 + \cdots + nkx_ny_n = k(x_1y_1 + 2x_2y_2 + \cdots + nx_ny_n) = k(\alpha,\beta)$;

(3) $(\alpha+\beta,\gamma) = (x_1+y_1)z_1 + 2(x_2+y_2)z_2 + \cdots + n(x_n+y_n)z_n = x_1z_1 + 2x_2z_2 + \cdots + nx_nz_n + y_1z_1 + 2y_2z_2 + \cdots + ny_nz_n = (\alpha,\gamma) + (\beta,\gamma)$;

(4) 当 $\alpha \neq \mathbf{0}$ 时, $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 不全为零, $(\alpha,\alpha) = x_1^2 + 2x_2^2 + \cdots + nx_n^2 > 0$.

于是, V 对于所给出的内积运算构成一个欧氏空间.

2. 设 V 是实数域 $\mathbf{R}$ 上的 n 维线性空间, $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的基, A 是一个 n 阶正定矩阵. 定义 V 的内积如下: 对于 V 中向量 α,β, 如果它们在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的坐标分别为 x,y, 则 $(\alpha,\beta) = x^{\mathrm{T}}Ay$. 证明 V 是一个欧氏空间.

证明: 首先, 对于任意 $\alpha,\beta \in V$, (α,β) 是由 α,β 确定的一个实数. 其次, 证明内积满足欧氏空间定义中的四个条件: 对于任意 $\alpha,\beta,\gamma \in V$, 任意实数 k, 有

(1) $(\alpha,\beta) = x^{\mathrm{T}}Ay = (x^{\mathrm{T}}Ay)^{\mathrm{T}} = y^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}x = y^{\mathrm{T}}Ax = (\beta,\alpha)$;

(2) $(k\alpha,\beta) = (kx)^{\mathrm{T}}Ay = k(x^{\mathrm{T}}Ay) = k(\alpha,\beta)$;

(3) $(\alpha+\beta,\gamma) = (x+y)^{\mathrm{T}}Az = (x^{\mathrm{T}}+y^{\mathrm{T}})Az = x^{\mathrm{T}}Az + y^{\mathrm{T}}Az = (\alpha,\gamma) + (\beta,\gamma)$;

(4) 由 A 是正定矩阵知 $x^{\mathrm{T}}Ax$ 是正定二次型. 所以, 当 $\alpha \neq \mathbf{0}$ 时, $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 不全为零, $(\alpha,\alpha) = x^{\mathrm{T}}Ax > 0$.

于是, V 对于所给出的内积运算构成一个欧氏空间.

3. 设 V 是区间 $[a,b]$ 上全体连续函数的集合. 证明: 对于任意的 $f(x),g(x) \in V$, 有

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right).$$

证明: 由于集合 V 对于相应的内积运算构成欧氏空间, 故由 Cauchy-Schwarz 不等式知, 对于任

意 $f,g\in V$, 有 $|(f,g)|\leq ||f||\cdot||g||$, 即有 $(f,g)^2\leq ||f||^2\cdot||g||^2=(f,f)(g,g)$, 也即下式成立

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\leq\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right).$$

4. 证明: 在欧氏空间中, 如果向量 α 与向量 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 都正交, 则 α 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 的任一线性组合也正交.

证明: 对于任意实数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$, $(\alpha,k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_s\beta_s)=k_1(\alpha,\beta_1)+k_2(\alpha,\beta_2)+\cdots+k_s(\alpha,\beta_s)=0$, 故 α 与 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_s\beta_s$ 正交, 即 α 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 的任一线性组合正交.

5. 在欧氏空间 $\mathbf{R}^4$(内积为实数组向量的通常内积)中, 已知

$$\beta_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix},\qquad\beta_2=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix},\qquad\beta_3=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix},$$

试求出与 β_1,β_2,β_3 都正交的单位向量.

解: 设与 β_1,β_2,β_3 都正交的向量 $\alpha=(x_1,x_2,x_3,x_3)^{\mathrm{T}}$. 由正交的条件得到齐次方程组

$$\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

将其系数矩阵施行初等行变换

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{r_2+r_3\\ \frac{1}{2}r_3+r_1}]{\substack{-r_1+r_2\\ -r_1+r_3}}\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&0&-1&-1\\0&-2&0&-2\end{bmatrix}\xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_3]{\substack{r_2\times(-1)\\ r_3\times(-\frac{1}{2})}}\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{bmatrix},$$

所以 $R(A)=3$, 基础解系含 $4-3=1$ 个向量, 取 $x_4=1$, 解得 $x_1=1,x_2=-1,x_3=-1$; 或者取 $x_4=-1$, 解得 $x_1=-1,x_2=1,x_3=1$. 所以与 β_1,β_2,β_3 都正交的向量 $\alpha=(1,-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$, 或 $(-1,1,1,-1)^{\mathrm{T}}$. 将其单位化, 得到与 β_1,β_2,β_3 都正交的单位向量 $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^{\mathrm{T}}$, 或 $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2})^{\mathrm{T}}$.

6. 求上题中向量 β_1,β_2,β_3 的长度及它们两两之间的夹角.

解: 由于 $||\beta_1||=\sqrt{2},||\beta_2||=||\beta_3||=2$, $(\beta_1,\beta_2)=2,(\beta_1,\beta_3)=(\beta_2,\beta_3)=0$, 所以, β_1 与 β_3 正交, 夹角为 $\frac{\pi}{2}$; β_2 与 β_3 正交, 夹角为 $\frac{\pi}{2}$. β_1 与 β_2 的夹角为

$$\arccos\frac{(\beta_1,\beta_2)}{||\beta_1||\cdot||\beta_2||}=\arccos\frac{2}{\sqrt{2}\cdot 2}=\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}.$$

习题9.1(B)

1. 对于实数域 $\mathbf{R}$ 上的线性空间 $\mathbf{R}^{m\times n}$, 规定内积如下: 对于 $\mathbf{R}^{m\times n}$ 中任意元素 $A=(a_{ij}),B=(b_{ij})$, $(A,B)=\mathrm{tr}(B^{\mathrm{T}}A)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m a_{ji}b_{ji}$, 证明 $\mathbf{R}^{m\times n}$ 对此内积构成欧氏空间.

证明: 首先, 对于任意 $A,B\in\mathbf{R}^{m\times n}$, (A,B) 是由 A,B 确定的一个实数. 其次, 证明内积满足欧氏空间定义中的四个条件: 对于任意 $A,B,C\in\mathbf{R}^{m\times n}$, 任意实数 k, 有

(1) $(A,B)=\mathrm{tr}(B^{\mathrm{T}}A)=\mathrm{tr}((B^{\mathrm{T}}A)^{\mathrm{T}})=\mathrm{tr}(A^{\mathrm{T}}B)=(B,A)$;

(2) $(kA,B)=\mathrm{tr}(B^{\mathrm{T}}(kA))=\mathrm{tr}(kB^{\mathrm{T}}A)=k\mathrm{tr}(B^{\mathrm{T}}A)=k(B,A)$;

(3) $(A+B,C)=\mathrm{tr}(C^{\mathrm{T}}(A+B))=\mathrm{tr}(C^{\mathrm{T}}A+C^{\mathrm{T}}B)=\mathrm{tr}(C^{\mathrm{T}}A)+\mathrm{tr}(C^{\mathrm{T}}B)=(A,C)+(B,C)$;

(4) 当 $A\neq O$ 时, 元素 $a_{ij}(1\leq i\leq m,1\leq j\leq n)$ 不全为零, $(A,A)=\mathrm{tr}(A^{\mathrm{T}}A)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ji}^{2}>0$.

于是, $\mathbf{R}^{m\times n}$ 对于所给出的内积运算构成一个欧氏空间.

2. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 n 维欧氏空间 V 的一个基, 如果 V 中向量 β 使 $(\beta,\alpha_i)=0$, $i=1,2,\cdots,n$, 证明 $\beta=\mathbf{0}$.

证明: 由于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 n 维欧氏空间 V 的一个基, $\beta\in V$, 故 β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示, 即存在实数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 使得 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n$, 则 $(\beta,\beta)=k_1(\beta,\alpha_1)+k_2(\beta,\alpha_2)+\cdots+k_n(\beta,\alpha_n)=0$, 因此, $\beta=\mathbf{0}$.

3. 在欧氏空间 V 中, 定义任意两个向量 α,β 的距离为 $d\{\alpha,\beta\}=||\alpha-\beta||$, 证明: 对于 V 中任意向量 α,β,γ, 有 $d\{\alpha,\gamma\}\leq d\{\alpha,\beta\}+d\{\beta,\gamma\}$.

证明: 由长度的三角不等式得到 $d\{\alpha,\gamma\}=||\alpha-\gamma||=||(\alpha-\beta)+(\beta-\gamma)||\leq||\alpha-\beta||+||\beta-\gamma||=d\{\alpha,\beta\}+d\{\beta,\gamma\}$.

9.2 习题9.2

习题9.2(A)

1. 设欧氏空间 $\mathbf{R}^4$(内积为实数组向量的通常内积)的一个基为

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\qquad \alpha_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix},\qquad \alpha_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix},\qquad \alpha_4=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix},$$

求这个基的度量矩阵 A.

解: 由于

$$a_{11}=(\alpha_1,\alpha_1)=1,\ a_{12}=(\alpha_1,\alpha_2)=1,\ a_{13}=(\alpha_1,\alpha_3)=1,\ a_{14}=(\alpha_1,\alpha_4)=1,$$

$$a_{21}=(\alpha_2,\alpha_1)=1,\ a_{22}=(\alpha_2,\alpha_2)=2,\ a_{23}=(\alpha_2,\alpha_3)=2,\ a_{24}=(\alpha_2,\alpha_4)=2,$$

$$a_{31}=(\alpha_3,\alpha_1)=1,\ a_{32}=(\alpha_3,\alpha_2)=2,\ a_{13}=(\alpha_3,\alpha_3)=3,\ a_{34}=(\alpha_3,\alpha_4)=3,$$

$$a_{41}=(\alpha_4,\alpha_1)=1,\ a_{42}=(\alpha_4,\alpha_2)=2,\ a_{43}=(\alpha_4,\alpha_3)=3,\ a_{44}=(\alpha_4,\alpha_4)=4,$$

所以, 此基的度量矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&2&2\\1&2&3&3\\1&2&3&4\end{bmatrix}.$$

2. 已知在线性空间 $\mathbf{R}^4$ 上定义的内积使 $\mathbf{R}^4$ 成为欧氏空间, 又知 $\varepsilon_1=(1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$, $\varepsilon_2=(0,1,0,0)^{\mathrm{T}}$, $\varepsilon_3=(0,0,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\varepsilon_4=(0,0,0,1)^{\mathrm{T}}$ 的度量矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}2&1&0&-1\\1&2&-1&0\\0&-1&2&1\\-1&0&1&3\end{bmatrix},$$

1) 求基 $\alpha_1=(1,-1,0,0)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_2=(-1,2,0,0)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_3=(0,1,2,1)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_4=(1,0,1,1)^{\mathrm{T}}$ 的度量矩阵 B;

2) 求实数 a, 使向量 $\alpha=(1,a,2,-1)^{\mathrm{T}}$ 与向量 $\beta=(1,-1,2,0)^{\mathrm{T}}$ 正交.

解: 1) 由基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 到基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的过渡矩阵 P:

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)P=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)\begin{bmatrix}1&-1&0&1\\-1&2&1&0\\0&0&2&1\\0&0&1&1\end{bmatrix},$$

则基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的度量矩阵为

$$\begin{aligned}B=P^{\mathrm{T}}AP&=\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\-1&2&0&0\\0&1&2&1\\1&0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&0&-1\\1&2&-1&0\\0&-1&2&1\\-1&0&1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0&1\\-1&2&1&0\\0&0&2&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}1&-1&1&-1\\0&3&-2&1\\0&0&4&5\\1&0&3&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0&1\\-1&2&1&0\\0&0&2&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-3&0&1\\-3&6&0&-1\\0&0&13&9\\1&-1&9&7\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

2) 由于 α,β 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 下的坐标分别为 $(1,a,2,-1)^{\mathrm{T}}$, $(1,-1,2,0)^{\mathrm{T}}$, 此基的度量矩阵为 A, 所以

$$\begin{aligned}0=(\alpha,\beta)&=(1,a,2,-1)A\begin{bmatrix}1\\-1\\2\\0\end{bmatrix}=(1,a,2,-1)\begin{bmatrix}2&1&0&-1\\1&2&-1&0\\0&-1&2&1\\-1&0&1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\\0\end{bmatrix}\\&=(3+a,-1+2a,3-a,-2)\begin{bmatrix}1\\-1\\2\\0\end{bmatrix}=3+a+1-2a+6-2a=10-3a,\end{aligned}$$

所以, $a=\frac{10}{3}$.

3. 设 V 是 3 维欧氏空间, $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 是 V 的标准正交基, 证明

$$\eta_1=\frac{1}{3}(2\varepsilon_1+2\varepsilon_2-\varepsilon_3),\qquad \eta_2=\frac{1}{3}(2\varepsilon_1-\varepsilon_2+2\varepsilon_3),\qquad \eta_3=\frac{1}{3}(\varepsilon_1-2\varepsilon_2-2\varepsilon_3)$$

也是 V 的标准正交基.

证明: 由于

$$(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\end{bmatrix}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)P,$$

显然 P 的列向量组是单位正交组, 即 P 是正交矩阵, 而 P 又是标准正交基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 到基 η_1,η_2,η_3 的过渡矩阵, 所以, 由 P 是正交矩阵知, η_1,η_2,η_3 也是 V 的标准正交基.

4. 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4,\varepsilon_5$ 是 5 维欧氏空间 V 的一个标准正交基, $\alpha_1=\varepsilon_1+\varepsilon_5$, $\alpha_2=\varepsilon_1-\varepsilon_2$, $\alpha_3=2\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$, 求子空间 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 的一个标准正交基.

解: α_1, α_2,α_3 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4,\varepsilon_5$ 下的坐标作为列向量组构成矩阵
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$
显然有一个 3 阶子式不为零, 故其列秩为 3, 即坐标组线性无关, 因此, α_1, α_2,α_3 线性无关, 是子空间 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 的一个基. 下面先将其正交化.

令 $\beta_1=\alpha_1=\varepsilon_1+\varepsilon_5$, 则 $||\beta_1||^2=(\beta_1,\beta_1)=(1,0,0,0,1)(1,0,0,0,1)^{\mathrm{T}}=2$, $||\beta_1||=\sqrt{2}$. 令 $\beta_2=k_1^{(2)}\beta_1+\alpha_2$, 其中
$$k_1^{(2)}=-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}=-\frac{1}{2}(1,-1,0,0,0)(1,0,0,0,1)^{\mathrm{T}}=-\frac{1}{2},$$
故
$$\beta_2=-\frac{1}{2}\beta_1+\alpha_2=-\frac{1}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_5)+(\varepsilon_1-\varepsilon_2)=\frac{1}{2}(\varepsilon_1-2\varepsilon_2-\varepsilon_5),$$
$||\beta_2||^2=(\beta_2,\beta_2)=(\frac{1}{2},-1,0,0,-\frac{1}{2})(\frac{1}{2},-1,0,0,-\frac{1}{2})^{\mathrm{T}}=\frac{3}{2}$, $||\beta_2||=\frac{\sqrt{6}}{2}$. 再令 $\beta_3=k_1^{(3)}\beta_1+k_2^{(3)}\beta_2+\alpha_3$, 其中
$$k_1^{(3)}=-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}=-\frac{1}{2}(2,1,1,0,0)(1,0,0,0,1)^{\mathrm{T}}=-1,$$
$$k_2^{(3)}=-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}=-\frac{2}{3}(2,1,1,0,0)(\frac{1}{2},-1,0,0,-\frac{1}{2})^{\mathrm{T}}=0,$$
故
$$\beta_3=-\beta_1+\alpha_3=-(\varepsilon_1+\varepsilon_5)+(2\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_5,$$
$||\beta_3||^2=(\beta_3,\beta_3)=(1,1,1,0,-1)(1,1,1,0,-1)^{\mathrm{T}}=4$, $||\beta_3||=2$.

将其单位化. 令 $\eta_1=\frac{\beta_1}{||\beta_1||}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_5)$, $\eta_2=\frac{\beta_2}{||\beta_2||}=\frac{\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{1}{2}(\varepsilon_1-2\varepsilon_2-\varepsilon_5)=\frac{\sqrt{6}}{6}(\varepsilon_1-2\varepsilon_2-\varepsilon_5)$, $\eta_3=\frac{\beta_3}{||\beta_3||}=\frac{1}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_5)$. 则 η_1,η_2,η_3 即为子空间 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 的一个标准正交基.

5. 已知 3 维欧氏空间 V 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的度量矩阵为
$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix},$$
求 V 的一个标准正交基. 提示: 将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 正交化, 再单位化.

解: 先将其正交化. 令 $\beta_1=\alpha_1$, 则 $||\beta_1||^2=(\beta_1,\beta_1)=(\alpha_1,\alpha_1)=a_{11}=1$, $||\beta_1||=1$. 令 $\beta_2=k_1^{(2)}\beta_1+\alpha_2$, 其中
$$k_1^{(2)}=-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}=-(\alpha_2,\alpha_1)=-a_{21}=-1,$$
故
$$\beta_2=-\beta_1+\alpha_2=-\alpha_1+\alpha_2,$$

$||\beta_2||^2=(\beta_2,\beta_2)=(-\alpha_1+\alpha_2,-\alpha_1+\alpha_2)=(\alpha_1,\alpha_1)-2(\alpha_1,\alpha_2)+(\alpha_2,\alpha_2)=a_{11}-2a_{12}+a_{22}=1-2+2=1$, $||\beta_2||=1$. 再令 $\beta_3=k_1^{(3)}\beta_1+k_2^{(3)}\beta_2+\alpha_3$, 其中

$$k_1^{(3)}=-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}=-(\alpha_3,\alpha_1)=-a_{31}=0,$$
$$k_2^{(3)}=-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}=-(\alpha_3,-\alpha_1+\alpha_2)=a_{31}-a_{32}=1,$$

故

$$\beta_3=\beta_2+\alpha_3=-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,$$

$||\beta_3||^2=(\beta_3,\beta_3)=(-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_1)+(\alpha_2,\alpha_2)+(\alpha_3,\alpha_3)-2(\alpha_1,\alpha_2)-2(\alpha_1,\alpha_3)+2(\alpha_2,\alpha_3)=a_{11}+a_{22}+a_{33}-2a_{12}-2a_{13}+2a_{23}=1+2+5-2-0-2=4$, $||\beta_3||=2$.

将其单位化. 令 $\varepsilon_1=\frac{\beta_1}{||\beta_1||}=\alpha_1$, $\varepsilon_2=\frac{\beta_2}{||\beta_2||}=-\alpha_1+\alpha_2$, $\varepsilon_3=\frac{\beta_3}{||\beta_3||}=\frac{1}{2}(-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$. 则 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 即为 V 的一个标准正交基.

6. 已知线性空间 $\mathbf{R}[x]_4$ 对于内积 $(f(x),g(x))=\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 构成一个线性空间. 从基 $1,x,x^2,x^3$ 出发, 经正交单位化求一个标准正交基.

解: 先将其正交化. 令 $g_1(x)=f_1(x)=1$, 则 $||g_1||^2=(g_1,g_1)=(f_1,f_1)=\displaystyle\int_{-1}^{1}1^2\mathrm{d}x=2$, $||\beta_1||=\sqrt{2}$. 令 $g_2=k_1^{(2)}g_1+f_2$, 其中

$$k_1^{(2)}=-\frac{(f_2,g_1)}{(g_1,g_1)}=-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x\mathrm{d}x=0,$$

故

$$g_2(x)=f_2(x)=x,$$

$||g_2||^2=(g_2,g_2)=\displaystyle\int_{-1}^{1}x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$, $||g_2||=\frac{\sqrt{6}}{3}$. 再令 $g_3=k_1^{(3)}g_1+k_2^{(3)}g_2+f_3$, 其中

$$k_1^{(3)}=-\frac{(f_3,g_1)}{(g_1,g_1)}=-\frac{1}{2}(f_3,g_1)=-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x^2\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=-\frac{1}{3},$$
$$k_2^{(3)}=-\frac{(f_3,g_2)}{(g_2,g_2)}=-\frac{3}{2}(f_3,g_2)=-\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}x^3\mathrm{d}x=-\frac{3}{2}\cdot 0=0,$$

故

$$g_3(x)=-\frac{1}{3}g_1(x)+f_3(x)=x^2-\frac{1}{3},$$

$||g_3||^2=(g_3,g_3)=\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^2-\frac{1}{3})^2\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}(x^4-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{9})\mathrm{d}x=\frac{2}{5}-\frac{4}{9}+\frac{2}{9}=\frac{8}{45}$, $||g_3||=\frac{2}{15}\sqrt{10}$. 再令 $g_4=k_1^{(4)}g_1+k_2^{(4)}g_2+k_3^{(4)}g_3+f_4$, 其中

$$k_1^{(4)}=-\frac{(f_4,g_1)}{(g_1,g_1)}=-\frac{1}{2}(f_4,g_1)=-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x^3\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\cdot 0=0,$$
$$k_2^{(4)}=-\frac{(f_4,g_2)}{(g_2,g_2)}=-\frac{3}{2}(f_4,g_2)=-\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}x^4\mathrm{d}x=-\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{5}=-\frac{3}{5},$$
$$k_3^{(4)}=-\frac{(f_4,g_3)}{(g_3,g_3)}=-\frac{45}{8}(f_4,g_3)=-\frac{45}{8}\int_{-1}^{1}(x^5-\frac{1}{3}x^3)\mathrm{d}x=-\frac{45}{8}\cdot 0=0,$$

故

$$g_4(x)=-\frac{3}{5}g_2(x)+f_4(x)=x^3-\frac{3}{5}x,$$

$||g_4||^2=(g_4,g_4)=\int_{-1}^{1}(x^3-\frac{3}{5}x)^2\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}(x^6-\frac{6}{5}x^4+\frac{9}{25}x^2)\mathrm{d}x=\frac{2}{7}-\frac{12}{25}+\frac{18}{75}=\frac{8}{175}$, $||g_4||=\frac{2}{35}\sqrt{14}$.

将其单位化. 令 $h_1(x)=\frac{g_1(x)}{||g_1||}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $h_2(x)=\frac{g_2(x)}{||g_2||}=\frac{\sqrt{6}}{2}x$, $h_3(x)=\frac{g_3(x)}{||g_3||}=\frac{3\sqrt{10}}{4}(x^2-\frac{1}{3})=\frac{3\sqrt{10}}{4}x^2-\frac{\sqrt{10}}{4}$, $h_4(x)=\frac{g_4(x)}{||g_4||}=\frac{5\sqrt{14}}{4}(x^3-\frac{3}{5}x)=\frac{5\sqrt{14}}{4}x^3-\frac{3\sqrt{14}}{4}x$, 则 h_1,h_2,h_3,h_4 即为欧氏空间 $\mathbf{R}[x]_4$ 的一个标准正交基.

7. 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 是欧氏空间 V 的一个基, 该基的度量矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&2\\-1&2&-1\\2&-1&6\end{bmatrix}.$$

已知 V 的子空间 V_1 的一个基为 $\alpha_1=\varepsilon_1+\varepsilon_2$, $\alpha_2=\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3$, 1) 证明 α_1,α_2 是 V_1 的一个正交基; 2) 求 V_1 的正交补 $V_1^{\perp}$ 的一个基.

1) 证明: 因为 α_1,α_2 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的坐标为 $(1,1,0)^{\mathrm{T}},(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$, 所以,

$$(\alpha_1,\alpha_2)=(1,1,0)\begin{bmatrix}1&-1&2\\-1&2&-1\\2&-1&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}=(0,1,1)\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}=0.$$

所以, α_1,α_2 正交, α_1,α_2 是 V_1 的一个正交基.

2) 只需再找 V 中向量 α_3 使得 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 成为 V 的一个正交基, 则 α_3 即为 $V_1^{\perp}$ 的一个基.

方法一. 设 $\alpha_3=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+x_3\varepsilon_3$. 由 $(\alpha_1,\alpha_3)=0$, 得到

$$(1,1,0)\begin{bmatrix}1&-1&2\\-1&2&-1\\2&-1&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=(0,1,1)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0;$$

由 $(\alpha_2,\alpha_3)=0$, 得到

$$(1,1,-1)\begin{bmatrix}1&-1&2\\-1&2&-1\\2&-1&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=(-2,2,-5)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0.$$

因此, 得到齐次方程组

$$\begin{bmatrix}0&1&1\\-2&2&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}.$$

系数矩阵施行初等行变换

$$\begin{bmatrix}0&1&1\\-2&2&-5\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{r_2\times(-1)\\ r_1\leftrightarrow r_2}]{-2r_1+r_2}\begin{bmatrix}2&0&7\\0&1&1\end{bmatrix},$$

秩为 2, 基础解系含 $3-2=1$ 个向量, 取 $x_3=-2$, 解得 $x_1=7,x_2=2$, 得到基础解系 $x=(7,2,-2)^{\mathrm{T}}$, 因此, $\alpha_3=7\varepsilon_1+2\varepsilon_2-2\varepsilon_3$ 为 $V_1^{\perp}$ 的一个基.

方法二. 先将 α_1,α_2 扩充为 V 的一个基 α_1,α_2,ξ, 为此取 $\xi=\varepsilon_1$, 因为

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&0\\0&-1&0\end{vmatrix}=-1\neq 0,$$

α_1,α_2,ξ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的坐标组线性无关, 所以 α_1,α_2,ξ 线性无关, 是 V 的一个基. 再将其正交化. 因为 α_1,α_2 已经正交, 令 $\alpha_3=k_1^{(3)}\alpha_1+k_2^{(2)}\alpha_2+\xi$, 其中

$$k_1^{(3)}=-\frac{(\xi,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)},\qquad k_2^{(3)}=-\frac{(\xi,\alpha_2)}{(\alpha_2,\alpha_2)}.$$

而

$$\begin{aligned}
(\alpha_1,\alpha_1)&=(1,1,0)\begin{bmatrix}1&-1&2\\-1&2&-1\\2&-1&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=(0,1,1)\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=1,\\
(\xi,\alpha_1)&=(1,0,0)\begin{bmatrix}1&-1&2\\-1&2&-1\\2&-1&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=(1,-1,2)\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=0,\\
(\alpha_2,\alpha_2)&=(1,1,-1)\begin{bmatrix}1&-1&2\\-1&2&-1\\2&-1&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}=(-2,2,-5)\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}=5,\\
(\xi,\alpha_2)&=(1,0,0)\begin{bmatrix}1&-1&2\\-1&2&-1\\2&-1&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=(1,-1,2)\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}=-2,
\end{aligned}$$

所以, $k_1^{(3)}=0,k_2^{(3)}=-\frac{-2}{5}=\frac{2}{5}$, $\alpha_3=\frac{2}{5}\alpha_2+\xi=\frac{7}{5}\varepsilon_1+\frac{2}{5}\varepsilon_2-\frac{2}{5}\varepsilon_3$, α_3 为 $V_1^{\perp}$ 的一个基.

习题9.2(B)

1. 设 V 是 n 维欧氏空间, 由基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 到基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 的变换矩阵为 P, 已知基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 的度量矩阵为 A, 试证基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 的度量矩阵为 $B=P^{\mathrm{T}}AP$.

证明: 由基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 到基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 的变换矩阵为 P, 即 $(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)P$, 设 P 按列分快为 $P=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$, 则 p_i 为 η_i 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的坐标. 若记基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 的度量矩阵为 $B=(b_{ij})$, 则 $b_{ij}=(\eta_i,\eta_j)=p_i^{\mathrm{T}}Ap_j$, 所以

$$\begin{aligned}
B&=\begin{bmatrix}p_1^{\mathrm{T}}Ap_1&p_1^{\mathrm{T}}Ap_2&\cdots&p_1^{\mathrm{T}}Ap_n\\p_2^{\mathrm{T}}Ap_1&p_2^{\mathrm{T}}Ap_2&\cdots&p_2^{\mathrm{T}}Ap_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\p_n^{\mathrm{T}}Ap_1&p_n^{\mathrm{T}}Ap_2&\cdots&p_n^{\mathrm{T}}Ap_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p_1^{\mathrm{T}}A\\p_2^{\mathrm{T}}A\\\vdots\\p_n^{\mathrm{T}}A\end{bmatrix}(p_1,p_2,\cdots,p_n)\\
&=\begin{bmatrix}p_1^{\mathrm{T}}\\p_2^{\mathrm{T}}\\\vdots\\p_n^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}A(p_1,p_2,\cdots,p_n)=P^{\mathrm{T}}AP.
\end{aligned}$$

2. 已知欧氏空间 $\mathbf{R}^4$(内积为实数组向量的通常内积)的一个基

$$\alpha_1=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}},\qquad\alpha_2=(3,3,1,1)^{\mathrm{T}},\qquad\alpha_3=(3,1,3,1)^{\mathrm{T}},\qquad\alpha_4=(3,-1,4,2)^{\mathrm{T}}.$$

试用 Schmidt 单位正交化方法求 $\mathbf{R}^4$ 的一个标准正交基.

解: 先将其正交化. 令 $\beta_1=\alpha_1$, 则 $||\beta_1||^2=(\beta_1,\beta_1)=(\alpha_1,\alpha_1)=4$, $||\beta_1||=2$. 令 $\beta_2=k_1^{(2)}\beta_1+\alpha_2$, 其中

$$k_1^{(2)}=-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}=-\frac{1}{4}(\alpha_2,\alpha_1)=-\frac{8}{4}=-2,$$

故

$$\beta_2=-2\beta_1+\alpha_2=-2\alpha_1+\alpha_2=(1,1,-1,-1)^{\mathrm{T}},$$

$||\beta_2||^2=(\beta_2,\beta_2)=4$, $||\beta_2||=2$. 再令 $\beta_3=k_1^{(3)}\beta_1+k_2^{(3)}\beta_2+\alpha_3$, 其中

$$k_1^{(3)}=-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}=-\frac{1}{4}\cdot 8=-2,\quad k_2^{(3)}=-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}=-\frac{1}{4}\cdot 0=0,$$

故

$$\beta_3=-2\beta_1+\alpha_3=(1,-1,1,-1)^{\mathrm{T}},$$

$||\beta_3||^2=(\beta_3,\beta_3)=4$, $||\beta_3||=2$. 再令 $\beta_3=k_1^{(4)}\beta_1+k_2^{(4)}\beta_2+k_3^{(4)}\beta_3+\alpha_4$, 其中

$$k_1^{(4)}=-\frac{(\alpha_4,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}=-\frac{1}{4}\cdot 8=-2,\quad k_2^{(4)}=-\frac{(\alpha_4,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}=-\frac{1}{4}\cdot(-4)=1,\quad k_3^{(4)}=-\frac{(\alpha_4,\beta_3)}{(\beta_3,\beta_3)}=-\frac{1}{4}\cdot 6=-\frac{3}{2},$$

故

$$\beta_4=-2\beta_1+\beta_2-\frac{3}{2}\beta_3+\alpha_4=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^{\mathrm{T}}=\frac{1}{2}(1,-1,-1,1)^{\mathrm{T}},$$

$||\beta_4||^2=(\beta_4,\beta_4)=1$, $||\beta_4||=1$.

将 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 单位化. 令 $\varepsilon_1=\frac{\beta_1}{||\beta_1||}=\frac{1}{2}(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\varepsilon_2=\frac{\beta_2}{||\beta_2||}=\frac{1}{2}(1,1,-1,-1)^{\mathrm{T}}$, $\varepsilon_3=\frac{\beta_3}{||\beta_3||}=\frac{1}{2}(1,-1,1,-1)^{\mathrm{T}}$, $\varepsilon_4=\frac{\beta_4}{||\beta_4||}=\frac{1}{2}(1,-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$, 则 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 即为 $\mathbf{R}^4$ 的一个标准正交基.

9.3 习题9.3

习题9.3(A)

1. 设 $\mathbf{R}^2$ 是所有 2 维实向量对于通常的向量加法、数乘和内积运算所成的欧氏空间. 定义 $\mathbf{R}^2$ 的线性变换 σ,τ 如下: 对于 $\mathbf{R}^2$ 中的任意向量 $\alpha=(a_1,a_2)^{\mathrm{T}}$, $\sigma(\alpha)=(a_1,-a_2)^{\mathrm{T}}$, $\tau(\alpha)=(-a_1,a_2)^{\mathrm{T}}$. 1) 判明 σ,τ 是不是正交变换?是不是对称变换? 2) 判明 $\sigma+\tau$ 及 $\sigma\tau$ 都是怎样的线性变换.

解: 1) 方法一. 由于对于 $\mathbf{R}^2$ 中的任意向量 $\alpha=(a_1,a_2)^{\mathrm{T}}$, $\beta=(b_1,b_2)^{\mathrm{T}}$,

$$(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=a_1b_1+(-a_2)(-b_2)=a_1b_1+a_2b_2=(\alpha,\beta),$$

$$(\tau(\alpha),\tau(\beta))=(-a_1)(-b_1)+a_2b_2=a_1b_1+a_2b_2=(\alpha,\beta),$$

$$(\sigma(\alpha),\beta)=a_1b_1+(-a_2)b_2=a_1b_1+a_2(-b_2)=(\alpha,\sigma(\beta)),$$

$$(\tau(\alpha),\beta)=(-a_1)b_1+a_2b_2=a_1(-b_1)+a_2b_2=(\alpha,\tau(\beta)),$$

所以 σ,τ 是正交变换, 也是对称变换.

方法二. 取 $\mathbf{R}^2$ 的标准正交基 $\varepsilon_1=(1,0)^{\mathrm{T}},\varepsilon_2=(0,1)^{\mathrm{T}}$. 则

$$\sigma(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}=:(\varepsilon_1,\varepsilon_2)A,\qquad \tau(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}=:(\varepsilon_1,\varepsilon_2)B,$$

σ,τ 在标准正交基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 下的矩阵 A, B, 既是正交矩阵, 又是对称矩阵, 因此, σ,τ 是正交变换, 也是对称变换.

2) 线性变换 $\sigma+\tau$ 在标准正交基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 下的矩阵为 $A+B=O$, 故 $\sigma+\tau=0^*$, 即 $\sigma+\tau$ 是零变换, 是对称变换, 不是正交变换; 线性变换 $\sigma\tau$ 在标准正交基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 下的矩阵为 $AB=-E$, 故 $\sigma+\tau=(-1)^*$, 即 $\sigma+\tau$ 是负变换, 是正交变换, 也是对称变换.

2. 设 V 是 2 维欧氏空间, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 是 V 的标准正交基, $\eta_1=-\varepsilon_1$, $\eta_2=\varepsilon_1+2\varepsilon_2$. 已知 V 的线性变换 σ 在基 η_1, η_2 下的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

问 σ 是不是对称变换?是不是正交变换?为什么?

解: 由于

$$(\eta_1, \eta_2)=(\varepsilon_1, \varepsilon_2)\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}=:(\varepsilon_1, \varepsilon_2)P,$$

所以

$$P^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \qquad (\varepsilon_1, \varepsilon_2)=(\eta_1, \eta_2)P^{-1}.$$

线性变换 σ 在标准正交基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 下的矩阵为

$$B=PAP^{-1}=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

既是正交矩阵, 又是对称矩阵, 因此, σ 是正交变换, 也是对称变换.

3. 设 σ, τ 是 n 维欧氏空间 V 的正交变换, 证明 σ^{-1} 及 $\sigma\tau$ 都是 V 的正交变换.

证明: 任取 V 的一个标准正交基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$, 设 σ, τ 在该基下的矩阵分别为 A, B, 则由 σ, τ 是正交变换知, A, B 都是正交矩阵. σ^{-1} 及 $\sigma\tau$ 在标准正交基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 下的矩阵分别为 A^{-1}, AB, 由正交矩阵的性质知, A^{-1}, AB 均为正交矩阵, 因此, σ^{-1} 及 $\sigma\tau$ 都是 V 的正交变换.

4. 设 σ 是 n 维欧氏空间 V 的正交变换, τ 是 V 的对称变换, 证明 $\sigma^{-1}\tau\sigma$ 是 V 的对称变换.

证明: 任取 V 的一个标准正交基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$, 设 σ, τ 在该基下的矩阵分别为 A, B, 则 A 是正交矩阵, B 是对称矩阵. 于是 $\sigma^{-1}\tau\sigma$ 在标准正交基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 下的矩阵为 $C=A^{-1}BA=A^{\mathrm{T}}BA$, 由 $C^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}A=A^{\mathrm{T}}BA=C$, C 为实对称矩阵, 所以, $\sigma^{-1}\tau\sigma$ 是 V 的对称变换.

5. 设 V 是 3 维欧氏空间, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 是 V 的一个标准正交基, 线性变换 σ 使

$$\sigma(\varepsilon_1)=2\varepsilon_1+2\varepsilon_2-2\varepsilon_3, \quad \sigma(\varepsilon_2)=2\varepsilon_1+5\varepsilon_2-4\varepsilon_3, \quad \sigma(\varepsilon_3)=-2\varepsilon_1-4\varepsilon_2+5\varepsilon_3.$$

求 V 的另一标准正交基 η_1, η_2, η_3, 使 σ 在基 η_1, η_2, η_3 下的矩阵为对角矩阵.

解: 由于

$$\sigma(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)=(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}=:(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)A,$$

线性变换 σ 在标准正交基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵 A 为实对称矩阵, σ 是对称变换. 对 A 求其全部特征值. 由于

$$\psi(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&2\\-2&\lambda-5&4\\2&4&\lambda-5\end{vmatrix}\overset{r_2+r_3}{\underset{-2r_1+r_2}{=\!=\!=\!=}}\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&2\\2(1-\lambda)&\lambda-1&0\\0&\lambda-1&\lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)^2\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&2\\-2&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}\overset{-c_3+c_2}{=\!=\!=\!=}(\lambda-1)^2\begin{vmatrix}\lambda-2&-4&2\\-2&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-10),$$

故得到特征值 $\lambda_1=1$(二重), $\lambda_2=10$.

对于特征值 $\lambda_1=1$, 齐次线性方程组 $(\lambda_1E-A)x=\mathbf{0}$ 的系数矩阵施行初等行变换

$$\begin{bmatrix}-1&-2&2\\-2&-4&4\\2&4&-4\end{bmatrix}\xrightarrow[r_1\times(-1)]{\substack{-2r_1+r_2\\2r_1+r_3}}\begin{bmatrix}1&2&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

秩为 1, 基础解系含 $3-1=2$ 个向量, 取 $\begin{bmatrix}x_2\\x_3\end{bmatrix}$ 为 $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$, 分别解得 $x_1=-2,x_1=2$, 所以得到基础解系

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix},\qquad \alpha_2=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}.$$

对于特征值 $\lambda_2=10$, 齐次线性方程组 $(\lambda_2E-A)x=\mathbf{0}$ 的系数矩阵施行初等行变换

$$\begin{bmatrix}8&-2&2\\-2&5&4\\2&4&5\end{bmatrix}\xrightarrow[2r_2+r_1]{\substack{-4r_3+r_1\\r_3+r_2}}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&9&9\\2&4&5\end{bmatrix}\xrightarrow[r_1\leftrightarrow r_3]{\substack{r_2\times\frac{1}{9}\\-4r_2+r_3}}\begin{bmatrix}2&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

秩为 2, 基础解系含 $3-2=1$ 个向量, 取 $x_3=-2$, 解得 $x_1=1,x_2=2$, 所以得到基础解系

$$\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix}.$$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性无关的特征向量组, 分别对应于特征值 $1,1,10$. 将其改造为等价的单位正交特征向量组. 注意此时 α_3 与 α_1,α_2 已经正交. 为此, 令 $\beta_1=\alpha_1$, 则 $||\beta_1||^2=(\beta_1,\beta_1)=(\alpha_1,\alpha_1)=5$, $||\beta_1||=\sqrt{5}$. 令 $\beta_2=k_1^{(2)}\beta_1+\alpha_2$, 其中

$$k_1^{(2)}=-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}=-\frac{1}{5}(\alpha_2,\alpha_1)=\frac{4}{5},$$

故

$$\beta_2=\frac{4}{5}\beta_1+\alpha_2=\begin{bmatrix}\frac{2}{5}\\\frac{4}{5}\\1\end{bmatrix},$$

$||\beta_2||^2=(\beta_2,\beta_2)=\frac{9}{5}$, $||\beta_2||=\frac{3}{\sqrt{5}}$. 再令 $\beta_3=\alpha_3$, $||\beta_3||^2=(\beta_3,\beta_3)=9$, $||\beta_3||=3$.

将 β_1,β_2,β_3 单位化. 令

$$\gamma_1=\frac{\beta_1}{||\beta_1||}=\begin{bmatrix}\frac{-2\sqrt{5}}{5}\\\frac{\sqrt{5}}{5}\\0\end{bmatrix},\quad \gamma_2=\frac{\beta_2}{||\beta_2||}=\begin{bmatrix}\frac{2\sqrt{5}}{15}\\\frac{4\sqrt{5}}{15}\\\frac{\sqrt{5}}{3}\end{bmatrix},\quad \gamma_3=\frac{\beta_3}{||\beta_3||}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\end{bmatrix}.$$

故正交矩阵

$$Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{bmatrix}\frac{-2\sqrt{5}}{5}&\frac{2\sqrt{5}}{15}&\frac{1}{3}\\\frac{\sqrt{5}}{5}&\frac{4\sqrt{5}}{15}&\frac{2}{3}\\0&\frac{\sqrt{5}}{3}&-\frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

使得 $Q^{-1}AQ=\mathrm{diag}(1,1,10)=:\Lambda$. 令 $(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)Q$ 即得所求之标准正交基, 即

$$\eta_1=\frac{-2\sqrt{5}}{5}\varepsilon_1+\frac{\sqrt{5}}{5}\varepsilon_2,\quad \eta_2=\frac{2\sqrt{5}}{15}\varepsilon_1+\frac{4\sqrt{5}}{15}\varepsilon_2+\frac{\sqrt{5}}{3}\varepsilon_3,\quad \eta_3=\frac{1}{3}\varepsilon_1+\frac{2}{3}\varepsilon_2-\frac{2}{3}\varepsilon_3$$

线性变换 σ 在标准正交基 η_1,η_2,η_3 下的矩阵为对角矩阵 Λ.

6. 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 是欧氏空间 V 的标准正交基, 试求 V 的一个正交变换 σ, 使

$$\sigma(\varepsilon_1)=\frac{2}{3}\varepsilon_1+\frac{2}{3}\varepsilon_2-\frac{1}{3}\varepsilon_3,\qquad \sigma(\varepsilon_2)=\frac{2}{3}\varepsilon_1-\frac{1}{3}\varepsilon_2+\frac{2}{3}\varepsilon_3.$$

解: $\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2)$ 在标准正交基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的坐标分别为 $(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3})^{\mathrm{T}}$, $(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3})^{\mathrm{T}}$. 设 $\sigma(\varepsilon_3)=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+x_3\varepsilon_3$, 即 $\sigma(\varepsilon_3)$ 在该基下的坐标为 $x=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$. 而正交变换是把标准正交基变为标准正交基, 所以, $\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\sigma(\varepsilon_3)$ 是正交的, 其在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的坐标组也正交. 因此得到齐次线性方程组

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

等价地,

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

对系数矩阵施行初等行变换

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}\xrightarrow[r_1+r_2]{\substack{-r_2+r_1 \\ r_1\times\frac{1}{3}}}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

秩为 2, 基础解系含 $3-2=1$ 个向量, 取 $x_3=-2$, 解得 $x_1=1,x_2=-2$, 所以得到基础解系 $(1,-2,-2)^{\mathrm{T}}$, 因此,

$$x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=k\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

由于 $\sigma(\varepsilon_3)$ 是单位向量, 所以 $1=||\sigma(\varepsilon_3)||^2=x^{\mathrm{T}}x=9k^2$, 从而 $k=-\frac{1}{3},\frac{1}{3}$.

当 $k=-\frac{1}{3}$ 时, $\sigma(\varepsilon_3)=-\frac{1}{3}\varepsilon_1+\frac{2}{3}\varepsilon_2+\frac{2}{3}\varepsilon_3$, 则 σ 为 V 的线性变换, 且 $\sigma(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)A$, 即线性变换 σ 在标准正交基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵

$$A=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

为正交矩阵, 故 σ 是正交变换.

当 $k=\frac{1}{3}$ 时, $\sigma(\varepsilon_3)=\frac{1}{3}\varepsilon_1-\frac{2}{3}\varepsilon_2-\frac{2}{3}\varepsilon_3$, 则 σ 为 V 的线性变换, 且 $\sigma(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)A$, 即线性变换 σ 在标准正交基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵

$$A=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

为正交矩阵, 故 σ 是正交变换.

习题9.3(B)

1. 设 4 维欧氏空间 V 的基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 的度量矩阵为

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

已知 V 中向量 $\alpha_1=\varepsilon_1+\varepsilon_2$, $\alpha_2=\varepsilon_1+\varepsilon_3$, $\alpha_3=\varepsilon_2-\varepsilon_3$, 子空间 $V_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$. 设有 V_1 的线性变换 σ, 使

$$\sigma(\alpha_1)=\left(1+\frac{\sqrt{6}}{3}\right)\alpha_1-\frac{\sqrt{6}}{3}\alpha_2,\quad \sigma(\alpha_2)=-\left(1+\frac{\sqrt{6}}{6}\right)\alpha_1+\left(2-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)\alpha_2,\quad \sigma(\alpha_3)=\frac{\sqrt{6}}{2}\alpha_1+2\alpha_3,$$

试判明 σ 是不是 V_1 的正交变换或对称变换?

解: 对 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 下的坐标组施行初等行变换

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_3]{\substack{-r_1+r_2 \\ r_3+r_2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

秩为 $2<3$, 故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关(容易看出 $\alpha_1=\alpha_2+\alpha_3$), 而前两列有 2 阶子式值不为零, 故 α_1,α_2 线性无关, 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的极大无关组, 所以是 V_1 的一个基.

将 α_1,α_2 改造为等价的单位正交组, 即得到 V_1 的一个标准正交基. 先令 $\beta_1=\alpha_1$, 则

$$(\beta_1,\beta_1)=(\alpha_1,\alpha_1)=(1,1,0,0)A\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}=(1,1,0,0)\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}=(1,1,1,0)\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}=2,$$

进而, $||\beta_1||=\sqrt{2}$. 再令 $\beta_2=k_1^{(2)}\beta_1+\alpha_2$, 其中

$$k_1^{(2)}=-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}=-\frac{1}{2}(\alpha_2,\beta_1),$$

而

$$(\alpha_2,\beta_1)=(\alpha_2,\alpha_1)=(1,0,1,0)A\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}=(1,0,1,0)\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}=(0,2,5,1)\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}=2,$$

故 $k_1^{(2)}=-\frac{1}{2}\cdot 2=-1$, $\beta_2=-\beta_1+\alpha_2=-\alpha_1+\alpha_2=-\varepsilon_2+\varepsilon_3$,

$$(\beta_2,\beta_2)=(0,-1,1,0)A\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\0\end{bmatrix}=(0,-1,1,0)\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\0\end{bmatrix}=(-1,1,4,1)\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\0\end{bmatrix}=3,$$

进而, $||\beta_2||=\sqrt{3}$.

再将 β_1,β_2 单位化. 令

$$\gamma_1=\frac{\beta_1}{||\beta_1||}=\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha_1,\qquad \gamma_2=\frac{\beta_2}{||\beta_2||}=\frac{\sqrt{3}}{3}(-\alpha_1+\alpha_2)=-\frac{\sqrt{3}}{3}\alpha_1+\frac{\sqrt{3}}{3}\alpha_2.$$

故 γ_1,γ_2 是 V_1 的一个标准正交基, 而且

$$(\gamma_1,\gamma_2)=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3}\end{bmatrix}=:(\alpha_1,\alpha_2)P,$$

即从基 α_1,α_2 到基 γ_1,γ_2 的过渡矩阵为 P, 则

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3}\end{bmatrix}.$$

而由

$$\sigma(\alpha_1,\alpha_2)=(\alpha_1,\alpha_2)\left[\begin{array}{cc} 1+\frac{\sqrt{6}}{3} & -1-\frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & 2-\frac{\sqrt{6}}{3} \end{array}\right]=:(\alpha_1,\alpha_2)B$$

知, σ 在基 α_1,α_2 下的矩阵为 B, 因此, σ 在标准正交基 γ_1,γ_2 下的矩阵 C 为

$$\begin{aligned} C=P^{-1}BP &= \left[\begin{array}{cc} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3} \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} 1+\frac{\sqrt{6}}{3} & -1-\frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & 2-\frac{\sqrt{6}}{3} \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{cc} \sqrt{2} & \sqrt{2}-\sqrt{3} \\ -\sqrt{2} & 2\sqrt{3}-\sqrt{2} \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{array}\right]. \end{aligned}$$

由于 C 是实对称矩阵但不是正交矩阵, 因此, σ 是 V_1 的对称变换但不是正交变换.

2. 设 α,β 是 n 维欧氏空间($n\geq 2$)的向量, 且 $||\alpha||=||\beta||\neq 0$, 证明: 存在 V 的正交变换 σ, 使 $\sigma(\alpha)=\beta$.

证明: 由 $||\alpha||=||\beta||\neq 0$, 令 $\varepsilon_1=\frac{\alpha}{||\alpha||}$, $\eta_1=\frac{\beta}{||\beta||}$. 则由扩充方法和 Schmidt 方法可以得到 V 的两个标准正交基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 和 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$. 下面构造变换. 对于 V 中任意向量 ξ, 设 $\xi=k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\cdots+k_n\varepsilon_n$, 令

$$\sigma(\xi):=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_n\eta_n.$$

对于 V 中任意向量 ξ,ζ, 数域上任意数 k, 设 $\xi=k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\cdots+k_n\varepsilon_n$, $\zeta=\ell_1\varepsilon_1+\ell_2\varepsilon_2+\cdots+\ell_n\varepsilon_n$, 我们有

$$\begin{aligned} \sigma(\xi+\zeta) &= \sigma((k_1+\ell_1)\varepsilon_1+(k_2+\ell_2)\varepsilon_2+\cdots+(k_n+\ell_n)\varepsilon_n) \\ &= (k_1+\ell_1)\eta_1+(k_2+\ell_2)\eta_2+\cdots+(k_n+\ell_n)\eta_n \\ &= (k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_n\eta_n)+(\ell_1\eta_1+\ell_2\eta_2+\cdots+\ell_n\eta_n)=\sigma(\xi)+\sigma(\zeta), \\ \sigma(k\xi) &= \sigma((kk_1)\varepsilon_1+(kk_2)\varepsilon_2+\cdots+(kk_n)\varepsilon_n)=(kk_1)\eta_1+(kk_2)\eta_2+\cdots+(kk_n)\eta_n \\ &= k(k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_n\eta_n)=k\sigma(\xi), \end{aligned}$$

所以 σ 是 V 的线性变换, 此时 $\sigma(\varepsilon_i)=\eta_i(i=1,2,\cdots,n)$, 即 σ 将标准正交基化为标准正交基, 因此, σ 是 V 的正交变换. 而由 $\sigma(\varepsilon_1)=\eta_1$ 推出 $\frac{\sigma(\alpha)}{||\alpha||}=\frac{\beta}{||\beta||}$, 再由 $||\alpha||=||\beta||\neq 0$ 知, $\sigma(\alpha)=\beta$. 故结论得证.

3. 设 α_0 是 n 维欧氏空间 V 中一个单位向量, 变换 σ 定义为 $\sigma(\alpha)=\alpha-2(\alpha_0,\alpha)\alpha_0,\alpha\in V$, 证明: 1) σ 是 V 的一个正交变换; 2) σ 在 V 的任一标准正交基下矩阵的行列式值为 -1.

证明: 1) 对于 V 中任意向量 α,β, 数域上任意数 k, 有

$$\sigma(\alpha+\beta)=(\alpha+\beta)-2(\alpha_0,\alpha+\beta)\alpha_0=(\alpha-2(\alpha_0,\alpha)\alpha_0)+(\beta-2(\alpha_0,\beta)\alpha_0)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta),$$

$$\sigma(k\alpha)=k\alpha-2(\alpha_0,k\alpha)\alpha_0=k(\alpha-2(\alpha_0,\alpha)\alpha_0)=k\sigma(\alpha),=$$

所以 σ 是 V 的线性变换, 而对于 V 中任意向量 α,β, 注意到 α_0 是单位向量($(\alpha_0,\alpha_0)=1$), 有

$$\begin{aligned} (\sigma(\alpha),\sigma(\beta)) &= (\alpha-2(\alpha_0,\alpha)\alpha_0,\beta-2(\alpha_0,\beta)\alpha_0) \\ &= (\alpha,\beta)-2(\alpha_0,\alpha)(\alpha_0,\beta)-2(\alpha_0,\beta)(\alpha,\alpha_0)+4(\alpha_0,\alpha)(\alpha_0,\beta)(\alpha_0,\alpha_0) \\ &= (\alpha,\beta), \end{aligned}$$

所以, σ 是 V 的一个正交变换.

2) 将 α_0 扩充为 V 的一个标准正交基 $\alpha_0,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$. 则 $\sigma(\alpha_0)=\alpha_0-2(\alpha_0,\alpha_0)\alpha_0=-\alpha_0$, $\sigma(\varepsilon_i)=\varepsilon_i-2(\alpha_0,\varepsilon_i)\alpha_0=\varepsilon_i(i=2,3,\cdots,n)$, 于是 σ 在标准正交基 $\alpha_0,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵 $A=\mathrm{diag}(-1,1,\cdots,1)$, $|A|=-1$. 对于 V 的任一标准正交基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$, 设从标准正交基 $\alpha_0,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 到标准正交基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 的过渡矩阵为 P, 则 σ 在标准正交基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 下的矩阵 $B=P^{-1}AP$, 因此, $|B|=|A|=-1$.