$$= 2\Phi(1) - 1$$
$$= 0.6826.$$

(2) $P\{\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma\} = \Phi(2) - \Phi(-2)$
$$= 2\Phi(2) - 1$$
$$= 0.9544.$$

(3) $P\{\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma\}$
$$= \Phi(3) - \Phi(-3)$$
$$= 2\Phi(3) - 1$$
$$= 0.9974.$$

例 4.2.6 的计算结果表明，服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 的随机变量 X 取值于区间 $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$ 之内的概率为 95% 以上，而取值于区间 $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ 之外的概率则不到 1%，见图4.2.1.

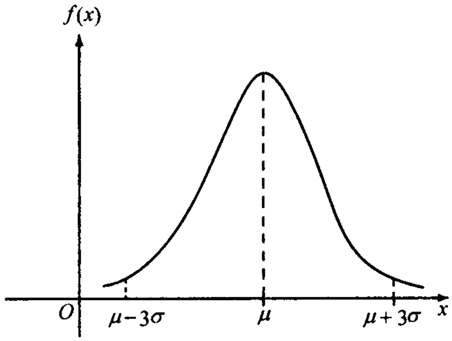

图 4.2.1 正态分布在 $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ 内取值的概率

§4.3 协方差与相关系数

对于二维随机向量 (X, Y)，除了它的分量 X 和 Y 的期望和方差以外，还有一些数字特征，用以刻画 X 与 Y 之间的相关程度，其中最主要的就是本节要讨论的协方差和相关系数.

一、协方差

定义 4.3.1 称 $E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$ 为 X 与 Y 的协方差，记为 $\mathrm{Cov}(X, Y)$，即

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}. \qquad (4.3.1)$$

协方差可以帮助我们了解两个随机变量之间的关系. 若 X 取值比较大时（如 X 大于其期望 $E(X)$），Y 也取值比较大（也大于它的期望 $E(Y)$），这时 $[X - E(X)][Y - E(Y)] > 0$；同时，X 取值比较小时（如 X 小于 $E(X)$），Y 也取值比较小（也小于 $E(Y)$），这时也有 $[X - E(X)][Y - E(Y)] > 0$，这样就有协方差 $\mathrm{Cov}(X, Y) > 0$. 可见正的协方差表示两个随机变量倾向于同时

取较大值或同时取较小值.反过来,若 X 取值比较小时,Y 取值反而比较大,或当 X 取值比较大时,Y 取值反而比较小,则必有 $\mathrm{Cov}(X,Y)<0$,于是负的协方差反映了两个随机变量有相反方向变化的趋势.这里需要说明的是,协方差定义为 $[X-E(X)][Y-E(Y)]$ 的期望,因此,我们上面说的两个随机变量的变化趋势是在平均意义上而言的.

协方差具有以下四条性质:

1. $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(Y,X)$.

这就是说,X 与 Y 的协方差等于 Y 与 X 的协方差,它与 X,Y 的次序无关.

2. 设 a、b、c、d 是常数,则

$$\mathrm{Cov}(aX+b,cY+d)=ac\mathrm{Cov}(X,Y).$$

3. $\mathrm{Cov}(X_1+X_2,Y)=\mathrm{Cov}(X_1,Y)+\mathrm{Cov}(X_2,Y)$.

4. $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$, (4.3.2)

当 X 和 Y 相互独立时,$\mathrm{Cov}(X,Y)=0$.

上述性质的证明都很简单.

使用 $\mathrm{Cov}(X,Y)$,(4.2.9)式可以写成

$$\mathrm{Var}(X+Y)=\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y). \tag{4.3.3}$$

关于协方差,还有以下重要性质.

定理 4.3.1　记 $\mathrm{Var}(X)=\sigma_1^2$,$\mathrm{Var}(Y)=\sigma_2^2$,则

$$[\mathrm{Cov}(X,Y)]^2\leqslant\sigma_1^2\sigma_2^2, \tag{4.3.4}$$

等号成立当且仅当 X 与 Y 之间有线性关系,即存在常数 a 和 b,使 $Y=aX+b$①.

证　对任意实数 t,有

$$E\{(t[X-E(X)]+[Y-E(Y)])^2\}=t^2\sigma_1^2+2t\mathrm{Cov}(X,Y)+\sigma_2^2\geqslant0,$$

将 $t^2\sigma_1^2+2t\mathrm{Cov}(X,Y)+\sigma_2^2$ 视为关于 t 的二次函数,取值非负,必有判别式

$$4[\mathrm{Cov}(X,Y)]^2-4\sigma_1^2\sigma_2^2\leqslant0,$$

即(4.3.4)式成立.

现设(4.3.4)式等号成立,则

$$E\{(t[X-E(X)]+[Y-E(Y)])^2\}=(\sigma_1t\pm\sigma_2)^2,$$

① 严格地讲,应该是存在常数 a 和 b,使得 $Y=aX+b$ 成立的概率等于 1.

其中±号视 $\mathrm{Cov}(X,Y)>0$ 或 <0 而定. 不妨设 $\mathrm{Cov}(X,Y)>0$，则上式右端为 $(\sigma_1 t+\sigma_2)^2$. 当 $t=t_0=-\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}(\sigma_1>0,\sigma_2>0)$ 时，有

$$E\{(t_0[X-E(X)]+[Y-E(Y)])^2\}=0.$$

由于 $(t_0[X-E(X)]+[Y-E(Y)])^2\geqslant 0$，其期望为零，则

$$t_0[X-E(X)]+[Y-E(Y)]=0,$$

因此 X 与 Y 之间有线性关系.

反之，若 X 与 Y 之间有线性关系 $Y=aX+b$，则 $\sigma_2^2=\mathrm{Var}(Y)=\mathrm{Var}(aX+b)=a^2\sigma_1^2$，$E(Y)=aE(X)+b$，$Y-E(Y)=a[X-E(X)]$，

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E\{a[X-E(X)]^2\}=a\sigma_1^2,$$

$$[\mathrm{Cov}(X,Y)]^2=a^2\sigma_1^4=\sigma_1^2\sigma_2^2.$$

定理证毕.

有了定理 4.3.1 的结论，我们就可以引进另一个度量随机变量关系的数字特征——相关系数.

二、相关系数

定义 4.3.2 若 $\mathrm{Var}(X)>0$，$\mathrm{Var}(Y)>0$，则称 $\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}}$ 为 X 与 Y 的相关系数，记为 ρ_{XY}，即

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}}. \tag{4.3.5}$$

相关系数 ρ_{XY} 与协方差 $\mathrm{Cov}(X,Y)$ 之间相差一个倍数，相关系数是标准尺度下的协方差. 协方差依赖于 X 与 Y 的度量单位，如果将 X 与 Y 都除以各自的标准差 $\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$ 与 $\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}$，则协方差就是相关系数. 这样能更好地反映 X 与 Y 之间的关系，而不受所用的度量单位的影响.

当 X 和 Y 相互独立时，$\mathrm{Cov}(X,Y)=0$，于是 $\rho_{XY}=0$. 但是，当 $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$，即 $\rho_{XY}=0$ 时，并不能保证 X 和 Y 相互独立.

例 4.3.1 设二维连续型随机向量 (X,Y) 服从单位圆域 $x^2+y^2\leqslant 1$ 上的均匀分布，即概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & \text{当 } x^2+y^2\leqslant 1 \text{ 时},\\[2ex] 0, & \text{当 } x^2+y^2>1 \text{ 时},\end{cases}$$

求 ρ_{XY}.

解　先计算 $E(X)$,由(4.1.14)式有

$$E(X) = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{x}{\pi}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = 0,$$

上式中括号内的积分的被积函数为奇函数,于是它在关于原点对称的区间上的积分等于零.再由(4.1.14)式计算

$$\mathrm{Var}(X) = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{x^2}{\pi}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x^2\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \frac{1}{4}.$$

由 X 与 Y 的对称性,知 $E(Y)=0,\mathrm{Var}(Y)=\frac{1}{4}$.于是

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{xy}{\pi}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} xy\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = 0.$$

从而 $\rho_{XY}=0$.

由例 3.6.2 知,X 和 Y 不相互独立.因此,由 $\rho_{XY}=0$,不一定有 X 和 Y 相互独立.

例 4.3.2　设二维随机向量 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$,求 ρ_{XY}.

解　由例 3.4.4 可知 $E(X)=\mu_1,E(Y)=\mu_2,\mathrm{Var}(X)=\sigma_1^2,\mathrm{Var}(Y)=\sigma_2^2$.协方差

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_1)(y-\mu_2)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

这里 $f(x,y)$是(X,Y)的概率密度函数.类似于(3.3.3)式的证明,先对 y 积分,作变量代换,令 $v=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)$,则

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}(y-\mu_2)f(x,y)\mathrm{d}y &= \frac{\sigma_2}{2\pi\sigma_1}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(v\sqrt{1-\rho^2}+\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2}}\mathrm{d}v\\ &= \frac{\sigma_2\rho}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}}(x-\mu_1)\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}.\end{aligned}$$

再对 x 积分,作变量代换 $u=\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}$,得到

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{\sigma_1\sigma_2\rho}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u^2\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u.$$

使用分部积分法,有

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \sigma_1\sigma_2\rho,$$

于是

$$\rho_{XY} = \rho. \tag{4.3.6}$$

这样,结合例 3.6.3,对于二维正态随机向量(X,Y),X 和 Y 相互独立的充分必要条件是$\rho_{XY}=0$.

由定理 4.3.1 直接得到相关系数的如下重要性质.

定理 4.3.2

$$|\rho_{XY}|\leqslant 1, \tag{4.3.7}$$

当且仅当 X 与 Y 之间有线性关系时等号成立.

定义 4.3.3 若 X 与 Y 的相关系数$\rho_{XY}=0$,则称 X 与 Y 互不相关.

相关系数 ρ_{XY} 刻画了 X 与 Y 之间线性关系的程度.若$|\rho_{XY}|=1$,X 和 Y 之间有线性关系 $Y=aX+b$.还可以从理论上保证,当 $0<|\rho_{XY}|<1$ 时,若$|\rho_{XY}|$较大,表明 X 与 Y 之间线性关系的联系较好,$|\rho_{XY}|$越接近于 1,这种联系越好;若$|\rho_{XY}|$较小,表明 X 与 Y 之间线性关系的联系较差,$|\rho_{XY}|$越接近于 0,这种联系越差.特别,若 $\rho_{XY}=0$,X 与 Y 之间不存在线性关系.

当 $\rho_{XY}=0$ 时,X 与 Y 互不相关只是指 X 与 Y 之间没有线性关系,但这时 X 与 Y 之间可能有某种别的函数关系,因此,不能保证 X 和 Y 相互独立.当然,对二维正态随机向量(X,Y)来说,X 与 Y 互不相关同 X 和 Y 相互独立是等价的,见例 4.3.2 后的说明.

关于 ρ_{XY} 的符号:当 $\rho_{XY}>0$ 时,称 X 与 Y 为正相关;反之,当 $\rho_{XY}<0$ 时,称 X 与 Y 为负相关.因为相关系数和协方差具有相同的符号,因此,前面关于协方差的符号意义的讨论可以移到这里.即正相关表示两个随机变量有同时增加或同时减少的变化趋势,而负相关表示两个随机变量有相反的变化趋势.

§4.4 矩与协方差矩阵

一、矩

随机变量的另一个数字特征是矩,包括原点矩和中心矩,它们在数理统计中有重要的应用.

定义 4.4.1 对随机变量 X,若 $E(X^k)$存在,则称它为 X 的 k 阶原点矩.

若 $E\{[X-E(X)]^k\}$存在，则称它为 X 的 k 阶中心矩. 这里 $k=1,2,\cdots$.

易知 X 的期望 $E(X)$ 是 X 的一阶原点矩，方差 $\mathrm{Var}(X)$ 是 X 的二阶中心矩. 在数理统计中，高于四阶的矩应用较少.

二、协方差矩阵

下面介绍 n 维随机向量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的协方差矩阵，先从二维情况讲起.

对二维随机向量 (X_1,X_2)，记

$$c_{11} = E\{[X_1 - E(X_1)]^2\} = \mathrm{Var}(X_1),$$

$$c_{12} = E\{[X_1 - E(X_1)][X_2 - E(X_2)]\} = \mathrm{Cov}(X_1,X_2),$$

$$c_{21} = E\{[X_2 - E(X_2)][X_1 - E(X_1)]\} = \mathrm{Cov}(X_2,X_1),$$

$$c_{22} = E\{[X_2 - E(X_2)]^2\} = \mathrm{Var}(X_2),$$

并排成矩阵

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

称这个矩阵为 (X_1,X_2) 的协方差矩阵. 一般地有如下定义.

定义 4.4.2　对 n 维随机向量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，记

$$c_{ij} = E\{[X_i - E(X_i)][X_j - E(X_j)]\} = \mathrm{Cov}(X_i,X_j),$$

$$i,j = 1,2,\cdots,n,$$

称矩阵

$$C = (c_{ij})_{n\times n} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \tag{4.4.1}$$

为 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的协方差矩阵.

显然，协方差矩阵是一个对称矩阵.

由于 n 维随机向量的分布在很多情况下不知道，或是过于复杂而不便使用，这时可使用其协方差矩阵，能在一定程度上解决问题. 特别地，协方差矩阵

在二维正态随机向量和 n 维正态随机向量中具有决定性作用.

例 4.4.1 二维正态随机向量 (X_1,X_2),其概率密度函数

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

$$-\infty<x_1<\infty,\quad -\infty<x_2<\infty.$$

由于

$$c_{12}=c_{21}=\operatorname{Cov}(X_1,X_2)=\rho_{XY}\sqrt{\operatorname{Var}(X_1)\operatorname{Var}(X_2)}=\rho\sigma_1\sigma_2,$$

因此协方差矩阵

$$C=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix},$$

C 的行列式 $|C|=\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)$,$C$ 的逆矩阵

$$C^{-1}=\frac{1}{|C|}\begin{pmatrix}\sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2\\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2\end{pmatrix}.$$

引入向量

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\mu}=\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E(X_1)\\ E(X_2)\end{pmatrix},$$

则

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'C^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})$$
$$=\frac{1}{1-\rho^2}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right],$$

从而 $f(x_1,x_2)$ 可以写为

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{2}{2}}|C|^{\frac{1}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'C^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})},\tag{4.4.2}$$

二维正态随机向量 (X_1,X_2) 的概率密度函数 $f(x_1,x_2)$ 的表示式(4.4.2)具有易于推广的特点.

定义 4.4.3 设 n 维随机向量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的概率密度函数

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\mid C\mid^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'C^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})},\tag{4.4.3}$$

其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$, $-\infty<x_i<\infty$, $i=1,2,\cdots,n$, $\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)'$, C 是 $n\times n$ 对称正定矩阵,则称 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是 n 维正态随机向量,或称 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 服从 n 维正态分布,记为 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)\sim N_n(\boldsymbol{\mu},C)$.

n 维正态随机向量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 具有以下四条重要性质:

1. $\mu_i=E(X_i)$, $i=1,2,\cdots,n$.　　(4.4.4)

2. C 是 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的协方差矩阵.

3. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立与 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 两两互不相关等价.

4. 设 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$ 是 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的线性函数,则 $(Y_1,Y_2,\cdots,Y_m)$ 服从 m 维正态分布. 特别地, $X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i^2)$, 这里 $\sigma_i^2=\mathrm{Cov}(X_i,X_i)=\mathrm{Var}(X_i)$, $i=1,2,\cdots,n$.

上述性质的证明从略.

在§3.8中曾提过 n 维正态分布,其概率密度函数表示式(3.8.12)中,协方差矩阵是用 V 表示的. n 维正态分布在数理统计和随机过程中有着重要的用途. 这是因为,第一,在现实世界中,许多自然现象的总体模型可以用正态分布描述. 第二,当总体模型不是正态分布时,所涉及到的许多统计量的分布可以用正态分布近似. 第三,正态分布在数学上易于处理,并能获得好结果. 而对于其它分布,情况往往不是这样.

习　题　四

4.1　甲、乙两台机床生产同一种零件,在一天内生产的次品数分别记为 X、Y. 已知 X、Y 的概率分布如下表所示:

X	0	1	2	3
p	0.4	0.3	0.2	0.1

Y	0	1	2	3
p	0.3	0.5	0.2	0

如果两台机床的产量相同,问哪台机床生产的零件的质量较好?

4.2　某人每次射击命中目标的概率为 p,现连续向目标射击,直到第一次命中目标为止,求射击次数的期望.

4.3　在射击比赛中,每人射击 4 次,每次一发子弹. 规定 4 弹全未中得 0 分,只中 1 弹得 15 分,中 2 弹得 30 分,中 3 弹得 55 分,中 4 弹得 100 分. 某人每次射击的命中率为 0.6, 此人期望能得多少分.

4.4　某产品的次品率为 0.1,检验员每天检验 4 次,每次随机地取 10 件产品进行检

验,如发现其中的次品数多于 1,就去调整设备.用 X 表示一天中调整设备的次数,求 $E(X)$.设各产品是否为次品是相互独立的.

4.5 设随机变量 X 的概率分布为

$$P\{X=(-1)^{k+1}\frac{3^k}{k}\}=\frac{2}{3^k},\quad k=1,2,\cdots,$$

说明 X 的期望不存在.

4.6 设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & \text{当 } |x|<1 \text{ 时},\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

求 $E(X)$.

4.7 气体分子的速度服从麦克斯威尔分布,概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}Ax^2e^{-x^2/a^2}, & \text{当 } x\geqslant 0 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } x<0 \text{ 时},\end{cases}$$

其中 $a>0$ 是常数.确定系数 A 并计算气体分子速度的期望.

4.8 设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)},\quad -\infty<x<\infty,$$

说明 $E(X)$不存在.

4.9 设某汽车站每天 8 点至 9 点,9 点至 10 点都恰有一辆汽车到站,但到站时间是随机的,并且两辆汽车的到站时间是相互独立的,其规律为

到站时间	8:10	8:30	8:50
	9:10	9:30	9:50
概　率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

(1) 若一旅客 8 点到达汽车站,求他候车时间的期望.

(2) 若一旅客 8:20 到达汽车站,求他候车时间的期望.

4.10 对习题 4.1 中的随机变量 X,计算 $E(X^2)$和 $E(5X^2+4)$.

4.11 设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & \text{当 } x>0 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } x\leqslant 0 \text{ 时},\end{cases}$$

求(1) $Y=2X$ 的期望. (2) $Y=e^{-2X}$的期望.

4.12 对球的直径做近似测量,设其值均匀分布在区间(a,b)内,求球体积的均值.

4.13　设二维随机向量(X,Y)的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}12y^2, & \text{当 } 0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1 \text{ 时},\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

求$E(X)$、$E(Y)$、$E(XY)$和$E(X^2+Y^2)$.

4.14　设随机变量X和Y相互独立,概率密度函数分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}2x, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 1 \text{ 时},\\ 0, & \text{其它},\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}e^{5-y}, & \text{当 } y>5 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } y\leqslant 5 \text{ 时},\end{cases}$$

求$E(XY)$.

4.15　将编号为1到n的n个球随机地放进编号为1到n的n只盒子中去,一只盒子装一个球.若一个球装入与球同号的盒子中,称为一个配对,记总的配对数为X,求$E(X)$.

4.16　现有n把钥匙,看上去样子相同,其中只有一把能打开门上的锁.用它们去试开门上的锁,设取到每把钥匙是等可能的,并且每把钥匙试开一次后除去,求试开次数的期望.

4.17　在习题4.2中,若直到命中目标n次为止,求射击次数的期望.

4.18　求习题4.1中随机变量X、Y的方差.

4.19　求习题4.6中随机变量X的方差.

4.20　求习题4.7中气体分子速度的方差.

4.21　求例4.2.5中每天剩油量$X-Y$的期望和方差.

4.22　设随机变量X取值于区间(a,b)内,证明:$a\leqslant E(X)\leqslant b$,$\mathrm{Var}(X)\leqslant\frac{(b-a)^2}{4}$.

4.23　设随机变量X和Y相互独立,证明

$$\mathrm{Var}(XY)=\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)+[E(X)]^2\mathrm{Var}(Y)+[E(Y)]^2\mathrm{Var}(X).$$

4.24　设随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立,且$E(X_i)=\mu$,$\mathrm{Var}(X_i)=\sigma^2$,　$i=1,2,\cdots,n$,　求$Z=\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$的期望和方差.

4.25　设二维随机向量(X,Y)的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{8}(x+y), & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 2,\ 0\leqslant y\leqslant 2 \text{ 时},\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

求ρ_{XY}.

4.26　设$\mathrm{Var}(X)=25$,$\mathrm{Var}(Y)=36$,$\rho_{XY}=0.4$,求$\mathrm{Var}(X+Y)$和$\mathrm{Var}(X-Y)$.

4.27　设X服从$(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$上的均匀分布,$Y=\cos X$,求$\rho_{XY}$.