时，$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;p)$取最大值. 总结上面讨论，在一切情形下，都有

$$\hat{p}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i .$$

当检验的产品没有取定时，ξ_i也没有取定，它是随机变量，因此p的估计量也应为随机变量，即

$$\hat{p}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i .$$

$\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$是抽取$n$件产品中所含废品的个数，$\hat{p}$恰是抽取的$n$件产品的废品率(频率). 这就是用随机抽取的$n$件产品的废品率去估计整个车间产品的废品率，是合乎情理的.

与讨论超几何分布时废品数的检验(例1.2.3)问题类似，对于二项分布也可以讨论检验问题.

例 2.5.16 (关于二项分布参数p的检验问题) 我们先从一个极其明显的例子谈起：设某厂家声称该厂生产的某种电子元件废品率p不超过0.01，今从中抽取了5件，废品数为2，自然会从直觉上就怀疑厂家讲的话是否属实. 因为若废品率为0.01，任取5件产品，废品数超过1的概率为

$$\sum_{k=2}^{5}\binom{5}{k}0.01^k 0.99^{5-k}=10\times0.01^2\times0.99^3+10\times0.01^3\times0.99^2$$

$$+5\times0.01^4\times0.99+0.01^5\leqslant0.001 ,$$

即当$p=0.01$时，5件随机抽取(有放回)的产品中含有多于1件废品的概率小于千分之一. 由于对任何$n(\geqslant2)$及p，

$$\frac{d}{dp}\left(\sum_{k=0}^{1}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\right)=-n(n-1)p(1-p)^{n-2}\leqslant0 ,$$

因而当$p<0.01$时，5件随机抽取的产品中含有多于1件废品的

概率会更小. 这样的小概率事件是不易发生的，所以我们有理由不相信厂家的说法.那么我们一般应该怎样制定一个检验方案呢?

如果我们要通过抽检 n 个产品来检验原假设

$$H_0: p \leqslant p_0$$

是否成立.令相对立的假设(称为备择假设)为

$$H_1: p > p_0 .$$

给定 α (通常取作0.05 或 0.01),称为显著性水平，可以从下面看出它就是当原假设 $H_0: p \leqslant p_0$ 真时被否定的概率(犯第一类错误的概率)的上确界. 求出使

$$\sum_{k=K_\alpha}^{n} \binom{n}{k} p_0^k (1-p_0)^{n-k} \leqslant \alpha ,$$

$$\sum_{k=K_\alpha-1}^{n} \binom{n}{k} p_0^k (1-p_0)^{n-k} > \alpha ,$$

$$K_\alpha \geqslant np_0$$

成立的 K_α，则由于当$k \geqslant np$ 时 $p^k(1-p)^{n-k}$ 是 p 的增函数，因而对一切 $0 \leqslant p < p_0$，

$$\sum_{k=K_\alpha}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \leqslant \alpha .$$

令 ξ_n 表示 n 件产品中所含的次品数，若$p \leqslant p_0$(即原假设 $H_0: p \leqslant p_0$ 为真)，则

$$P(\xi_n \geqslant K_\alpha) = \sum_{k=K_\alpha}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \leqslant \alpha .$$

随机地选取 n 件产品，若次品数 $\geqslant K_\alpha$ (此情形发生的概率 $\leqslant \alpha$)，

则否定假设 H_0，接受H_1；如果次品数$<K_\alpha$，则接受原假设，即没有理由认为原假设不成立. 称

$$\{K_\alpha, K_\alpha+1, \cdots, n\}$$

为此检验的**判别区域**或**拒绝区域**.

例 2.5.17 从一批电子元件中，有放回地抽取20 件产品进行检验，制定一个显著性水平 $\alpha=0.05$ 的检验方案，检验次品率 p 是否不超过 0.1.

解 设原假设

$$H_0: p \leqslant 0.1,$$

备择假设

$$H_1: p > 0.1.$$

取 $n=20, p_0=0.1$，经计算求得使

$$\sum_{k=K_\alpha}^{20} \binom{20}{k} 0.1^k 0.9^{20-k} \leqslant 0.05$$

的最小的 $K_\alpha=4$，再验证 $4>20\times 0.1$，因而得到拒绝区域为

$$\{4, 5, \cdots, 20\}.$$

于是当抽出 20 件产品后，发现次品数 $\geqslant 4$ 时就拒绝假设 $p\leqslant 0.1$，认为次品率超过 0.1.此时犯错误的概率不超过 0.05. 若次品数少于 4 件，则没有理由否定原假设，认为次品率不超过 0.1.

最后，我们再讨论二项分布在统计上的另外一个应用——符号检验法的原理.

例 2.5.18 (符号检验法) 为检验某车间甲、乙两台机床生产的某种产品的一种数量指标有无差异，每小时从甲、乙两台机床各抽取一件产品进行观测，用 x_i、y_i 分别表示第 i 次观测甲、乙两台机床生产的产品的该数量指标. 如果甲、乙两台机床生产的产品的该指标无差异，那么$x_i>y_i$ 和 $x_i<y_i$ 应是机会均等的. 即在

$x_i \neq y_i$的条件下两者出现的机会各为1/2.假定在若干次抽取中除去相等的情形外，有n次$x_i \neq y_i$，那么$x_i < y_i$发生的次数应服从二项分布$B(n, \frac{1}{2})$.我们的问题变成了检验$p=\frac{1}{2}$是否成立的问题. 给定显著性水平α，由于当$x_i < y_i$的次数ξ_n服从$B(n, \frac{1}{2})$时，若求得使

$$\sum_{i=0}^{K}\binom{n}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant \frac{\alpha}{2}$$

的最大的K，令其为K_α，则由于

$$\sum_{i=n-K_\alpha}^{n}\binom{n}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{i=0}^{K_\alpha}\binom{n}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant \frac{\alpha}{2},$$

我们有

$$P\left(\left|\xi_n - \frac{n}{2}\right| \geqslant \frac{n}{2} - K_\alpha\right)$$

$$= P(\xi_n \leqslant K_\alpha) + P(\xi_n \geqslant n - K_\alpha) \leqslant \alpha .$$

因此，若在n次$x_i \neq y_i$的观测中，$x_i < y_i$的次数

$$K \in \{0, 1, \cdots, K_\alpha\} \cup \{n-K_\alpha, n-K_\alpha+1, \cdots n\},$$

则认为这两台机床生产的产品的这项指标有差异，若

$$K \in \{K_\alpha+1, K_\alpha+2, \cdots, n-K_\alpha-1\},$$

则不认为有差异.

在这个例子中，拒绝区域是双边的，原因是在n次观测中“$x_i < y_i$”发生的次数过少或过多都说明两台机床生产的产品的该项指标有差异,我们要检验$p=\frac{1}{2}$是否成立. 这与例2.5.16不同,

称之为双边检验，例 2.5.16 称之为单边检验.

这里所讨论的问题本来是二项分布的检验问题，但由于在统计上应用较多，特别根据上面的讨论，制定出一套称之为符号检验的方案：

检验目的：A、B 两种处理对产品的一个指标的效应是否相同.

检验手续：

(1) 对 A、B 两种处理下产品的这个数量指标进行 N 次观察，得数据对 (x_i, y_i)，$i=1,2,\cdots,N$；

(2) 对 $i=1,2,\cdots,N$，若 $x_i>y_i$，记作“+”，若 $x_i<y_i$，记以“−”，若 $x_i=y_i$. 记为“0”；

(3) 用 n_+ 和 n_- 分别表示 N 次观察中“+”和“−”的个数，且记 $n=n_++n_-$，$s=\min(n_+, n_-)$；

(4) 给定显著性水平 α，令 s_α 为满足 $\sum\limits_{i=0}^{K}\binom{n}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^n\leqslant\frac{\alpha}{2}$ 的最大的 K；

(5) 若 $s\leqslant s_\alpha$，则否定假设，认为 A，B 两种处理的效应不同，若 $s>s_\alpha$，则不否定假设.

书末列有专门的符号检验表(附表 6). 在此只是介绍了符号检验法的原理.

习题 2−5

1. 某射手射击 5 次，每次命中的概率为 0.6，求下列事件的概率：

(1) 5 次中有 3 次中靶；

(2) 5 次中至少有 3 次中靶.

2. 一台设备由三个独立工作的基本元件组成，每个元件在时间 t 以前发生故障的概率为 0.1，如果至少有两个元件发生故障，则整个设备也发生故障. 求该设备在时间 t 以前不发生故障的概率.

3. 教科书出版的印数是 10000 本. 每本装订错误的概率等于 0.0001. 求这批书中 (1) 正好 5 本有装订错误；(2) 至多 5 本有装订错误的概率.

4. 在二项分布中记