§3.5 分布函数

对于离散型随机变量，我们用分布列来描述它取值的概率规律；对连续型随机变量，则用它的概率密度函数来描述它取值的概率规律．那么对一般的随机变量，如何描述它取值的概率规律呢？回忆随机变量的定义2.4.2知：若 ξ 是随机变量，则 $\xi \leqslant x$ 为随机事件，它就应该有概率，如果对一切实数 x，$P(\xi \leqslant x)$都知道了，那么对一切有限、无限的开、闭、半开半闭区间的概率也都能由概率的性质计算出来，因而 ξ 取值的概率规律也就完全掌握了．这就引导出下面的定义3.5.1．

1．分布函数

定义3.5.1 若 ξ 为随机变量，称函数

$$F(x)=P(\xi \leqslant x), \quad -\infty<x<\infty$$

为 ξ 的**概率分布函数**（简称**分布函数**）．

随机变量 ξ 的分布函数在 b 点的值 $F(b)$ 表示 ξ 取小于或等于 b 的值的概率．概率分布函数具有以下特征性质．

定理3.5.2 若 $F(x)$ 是随机变量 ξ 的分布函数，则

(i) 若 $a<b$ 则 $F(a) \leqslant F(b)$；（单调增性）

(ii) $\lim\limits_{x \to \infty} F(x)=1$，$\lim\limits_{x \to -\infty} F(x)=0$；

(iii) $\lim\limits_{x \to x_0+} F(x)=F(x_0)$，对一切实数 x_0．（右连续性）反之，若定义在 $(-\infty,\infty)$ 上的实函数满足以上条件，则 $F(x)$ 一定是某一随机变量的分布函数．

证 (i) 若 $a<b$，则 $\{\xi \leqslant a\} \subset \{\xi \leqslant b\}$，由概率的性质可知 $P(\xi \leqslant a) \leqslant P(\xi \leqslant b)$．

(ii) 由(i)可知(ii)中的两个极限存在．因而由概率的下连续性，

$$\lim_{x\to\infty} F(x)=\lim_{n\to\infty} F(n)=\lim_{n\to\infty} P(\xi\leqslant n)$$

$$=P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\xi\leqslant n\}\right)=P(\xi<\infty)=P(\Omega)=1$$

再由概率的上连续性

$$\lim_{x\to-\infty} F(x)=\lim_{n\to\infty} F(-n)=\lim_{n\to\infty} P(\xi\leqslant -n)$$

$$=P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\{\xi\leqslant -n\}\right)=P(\xi=-\infty)=P(\varnothing)=0.$$

(iii)由(i)

$$\lim_{x\to x_0+} F(x)=\lim_{n\to\infty} F\left(x_0+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty} P\left(\xi\leqslant x_0+\frac{1}{n}\right).$$

由于 $\{\xi\leqslant x_0+\frac{1}{n+1}\}\subset\{\xi\leqslant x_0+\frac{1}{n}\}$, $n=1,2,\cdots$, 再由概率的上连续性,

$$\lim_{x\to x_0+} F(x)=P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\{\xi\leqslant x_0+\frac{1}{n}\}\right)=P(\xi\leqslant x_0)$$

$$=F(x_0).$$

定理的第二部分的证明，要用到概率空间的构造及测度论的一些知识，在此从略，有兴趣的读者可参看[15，第二章§3].

为了更清楚地理解：ξ 的分布函数描述了 ξ 取值的概率规律，再举几例说明如下：

(iv)对一切 $a<b$,

$$P(a<\xi\leqslant b)=F(b)-F(a).$$

这一性质由 $\{a<\xi\leqslant b\}=\{\xi\leqslant b\}\setminus\{\xi\leqslant a\}$、$\{\xi\leqslant a\}\subset\{\xi\leqslant b\}$ 及概率的性质而得.

即 $\eta \sim \Gamma(n,\lambda)$.

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^n}{\Gamma(n)}t^{n-1}e^{-\lambda t}, & t\geqslant 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

*2. 期望

对于一般随机变量定义期望，要用到斯蒂尔杰斯 (Stieltjes) 积分，我们简单地介绍如下：

若 $F(x)$ 是 $[a,b]$ 上的单调函数，$g(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的函数，若对 $[a,b]$ 的任一分割 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 及任意 $\xi_k\in(x_{k-1},x_k]$ 当分割的最大子区间的长度 $\lambda\to 0$ 时

$$\sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)[F(x_k)-F(x_{k-1})]\to I,$$

则称 I 为 g 关于 F 在 $(a,b]$ 上的斯蒂尔杰斯积分，记作

$$\int_{(a,b]} g(x)dF(x).$$

如果 $g(x)$，$F(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上有定义，对一切 $a<b$ 上述积分存在且

$$\lim_{\substack{b\to\infty\\ a\to-\infty}}\int_{(a,b]} g(x)dF(x)$$

存在，则称上述极限为 $g(x)$ 关于 $F(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上的斯蒂尔杰斯积分，记作

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF(x).$$

定义 3.5.9 若 ξ 的分布函数为 $F(x)$，且

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| \, dF(x) < \infty$$

则称 $\int_{-\infty}^{\infty} x \, dF(x)$ 为 ξ 的期望，记作 $E\xi$．若 $E\xi$ 存在且

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x - E\xi)^2 \, dF(x) < \infty,$$

则称上式左端为 ξ 的方差，记作 $D\xi$ 或 $\mathrm{Var}\xi$．

习题　3－5

1．设离散型随机变量的分布列为

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0, & 1, & 2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.4 & 0.1 \end{pmatrix},$$

求 ξ 的分布函数 $F(x)$，画出 $F(x)$的图象并求 $P(-2<\xi\leqslant 1)$及 $P(|\xi|<2)$．

2．进行 4 次独立射击，每次射击的命中率为 0.8．以 ξ 表示命中的次数．求 ξ 的分布函数，并求 $P(\xi<3)$，$P(1\leqslant \xi < 4)$，$P(1\leqslant\xi\leqslant 3)$．

3．设 ξ 的密度函数为

$$(1)\ f(x)=\begin{cases} cx^2, & 1\leqslant x\leqslant 2, \\ cx, & 2<x<3, \\ 0, & \text{其它}; \end{cases}$$

$$(2)\ f(x)=ce^{-\lambda|x|}, \quad -\infty<x<\infty, \quad \lambda>0;$$

$$(3)\ f(x)=\begin{cases} c\sin 3x, & \dfrac{\pi}{6}<x\leqslant\dfrac{\pi}{3}, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$