# 单生(死) $Q$ 矩阵零流出(入)的判别准则

张余辉

北京师范大学

第八届海峡两岸统计与概率研讨会(8.15-16, 2012. 哈尔滨).

此工作与王玲娣合作完成.

# 内容

# 研究背景

- 状态空间 $\mathbb{Z}_+ := \{0, 1, 2, \cdots\}$ 上的马氏链 $(X(t))_{t \geqslant 0}$, 转移概率矩阵 $P(t) = (p_{ij}(t), i, j \in \mathbb{Z}_+)$.
- 转移速率矩阵$Q = (q_{ij})$ 即 $P(t)$ 在时刻 0 的导数:

$$q_{ij} := \lim_{t \to 0} \frac{p_{ij}(t) - \delta_{ij}}{t}, \quad i, j \in \mathbb{Z}_+.$$

-

$$0 \leqslant q_{ij} < \infty, \ i \neq j; \ \sum_{j \neq i} q_{ij} \leqslant -q_{ii} =: q_i \leqslant \infty, \ i \in \mathbb{Z}_+.$$

- 全稳定: 对所有 $i \in \mathbb{Z}_+$ 都有 $q_i < \infty$.
- 保守: 对所有 $i \in \mathbb{Z}_+$ 都有 $q_i = \sum_{j \neq i} q_{ij}$ (等价地, $\sum_{j \in \mathbb{Z}_+} q_{ij} = 0$)

**假定**

$Q$ 矩阵是全稳定的.

- 零流出: 若对某个(等价地, 对所有) $\lambda > 0$, 方程

$$\lambda x_i = \sum_{j=0}^{\infty} q_{ij} x_j, \qquad 0 \leq x_i \leq 1,\ i \in \mathbb{Z}_+$$

只有平凡解(零解).

- 零流入: 若对某个(等价地, 对所有) $\lambda > 0$, 方程

$$\lambda y_i = \sum_j y_j q_{ji}, \qquad y_i \geq 0,\ i \in \mathbb{Z}_+,\ \text{且} \sum_i y_i < \infty$$

只有平凡解.

# 研究背景

唯一性: 给定一个矩阵 $Q$, 是否存在唯一过程 $P(t)$ 使得其转移速率矩阵为 $Q$?

**Theorem (Hou(1974))**

给定 $Q$ 矩阵 $Q=(q_{ij}: i,j\in\mathbb{Z}_+)$, 过程唯一当且仅当以下条件同时成立:

(1) 对某 $\lambda>0$, $\inf_{i\in E^0}\sum_{j\in\mathbb{Z}_+}P_{ij}^{\min}(\lambda)>0$, 其中 (非保守点集) $E^0:=\{i\in\mathbb{Z}_+: q_i-\sum_{j\neq i}q_{ij}>0\}$, $P^{\min}(\lambda)$ 是最小 $Q$ 过程 $P^{\min}(t)$ 的 Laplace 变换;

(2) $Q$ 矩阵零流出;

(3) $Q$ 矩阵保守或者 $Q$ 矩阵非保守但零流入.

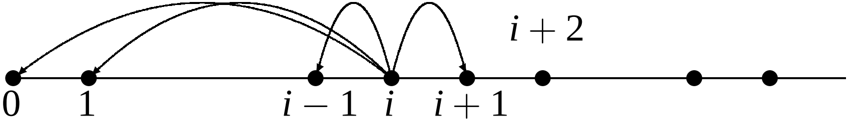
# 研究背景

- 单生 $Q$ 矩阵: 对所有 $i,j \in \mathbb{Z}_+, j \geqslant i+2$ 都有 $q_{ij} = 0$, 且

$$\begin{aligned} N :&= \sup\{i+1 : q_{i,i+1} = 0, i \in \mathbb{Z}_+\} \\ &= \inf\{i : \text{对 } k \geq i \text{ 都有 } q_{k,k+1} > 0\} < \infty, \end{aligned}$$

  当 $N \geqslant 1$ 时, 也称该 $Q$ 矩阵为带吸收边界的单生 $Q$ 矩阵.
- 单死 $Q$ 矩阵: 若对所有 $i,j \in \mathbb{Z}_+, j \leqslant i-2$ 都有 $q_{ij} = 0, q_{i,i-1} > 0$.

单生 $Q$ 矩阵




$$Q=\begin{pmatrix} - & + & 0 & 0 & \cdots \\ * & - & + & 0 & \cdots \\ * & * & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

# 研究背景

- 对无吸收边界的保守单生 $Q$ 矩阵, 张建康(1984)用概率方法首先给出了零流出的判别准则. 严士健和陈木法(1986)给出该准则的分析证明.
- 对带吸收边界的保守单生 $Q$ 矩阵, 陈木法(1999)用分析方法得到零流出的判别准则.
- Chen A-Y (2005)用分析方法研究了无吸收边界的保守单生 $Q$ 矩阵零流出和保守单死 $Q$ 矩阵零流入的判别准则, 并且本质上给出了非保守生灭 $Q$ 矩阵的零流出和零流入的判别.

# 研究背景

我们将单生 $Q$ 矩阵零流出和单死 $Q$ 矩阵零流入的判别准则推广至非保守情形, 而且将两种情形下的判别相统一. 还统一处理了保守和非保守两种情形下带移民的单生 $Q$ 矩阵零流出的判别问题.


Chen A-Y, Pollett P, Zhang H-J, Cairns B. (2005). Uniqueness criteria for continuous-time Markov chains with general transition structure. Adv Appl Probab 37(4): 1056-1074.

Chen M-F.(1999). Single birth processes. Chinese Ann Math 20B: 77-82.

记 $c_i := q_i - \sum_{j\neq i} q_{ij}$ 为 $Q$ 矩阵在 $i$ 点的非保守量.

**Theorem**

给定单生 $Q$ 矩阵 $Q = (q_{ij} : i,j \in \mathbb{Z}_+)$. 定义 $q_n^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} q_{nj}$ $(k < n)$. 则 $Q$ 矩阵是零流出的当且仅当 $R := \sum_{n=N}^{\infty} m_n = \infty$, 其中

$$m_n = \frac{1}{q_{n,n+1}}\left(1 + c_n + q_n^{(N-1)} + \sum_{k=N}^{n-1} q_n^{(k)} m_k\right), \ n \geq N.$$

证明思路:

(1) 在扩大的状态空间 $\overline{\mathbb{Z}}_+ := \{-1, 0, 1, \cdots\}$ 上定义新的带吸收边界的保守单生 $Q$ 矩阵 $\widehat{Q} = (\hat{q}_{ij} : i, j \in \overline{\mathbb{Z}}_+)$ 如下:

$$\hat{q}_{-1,j} = 0,\ j \in \overline{\mathbb{Z}}_+;\ \hat{q}_{i,-1} = c_i,\ \hat{q}_{ij} = q_{ij},\ i, j \in \mathbb{Z}_+.$$

(2) 证明矩阵 $Q$ 是零流出的当且仅当 $\widehat{Q}$ 是零流出的. 因此, 将状态空间 $\mathbb{Z}_+$ 上非保守单生 $Q$ 矩阵零流出的判定转化成了扩大状态空间 $\overline{\mathbb{Z}}_+$ 上带吸收边界的保守单生 $Q$ 矩阵零流出的判定.

证明思路(续):

(3) 由 Chen(1999), $\widehat{Q}$ 零流出当且仅当 $\sum_{n=N}^{\infty}\widehat{m}_n=\infty$.

$$\widehat{m}_n=\frac{1}{q_{n,n+1}}\left(1+c_n+q_n^{(N-1)}+\sum_{k=N}^{n-1}(c_n+q_n^{(k)})\widehat{m}_k\right),\ n\geq N;$$

(4) 证明两个级数 $\sum_{n=N}^{\infty}\widehat{m}_n$ 和 $\sum_{n=N}^{\infty}m_n$ 同敛散.

# 单生 Q 矩阵零流出

**Corollary**

给定生灭 Q 矩阵 $Q = (a_i, b_i, c_i : i \in \mathbb{Z}_+)$, 其中 $a_i := q_{i,i-1}, b_i := q_{i,i+1}, c_i := q_i - (a_i + b_i)$, 约定 $a_0 = 0$. 假定

$$b_i > 0, \quad i \geq N; \qquad a_i > 0, \quad i \geq N+1,$$

令

$$\mu_N = 1, \qquad \mu_n = \frac{b_N b_{N+1} \cdots b_{n-1}}{a_{N+1} a_{N+2} \cdots a_n}, \qquad n \geq N+1.$$

# 单生 $Q$ 矩阵零流出

**Corollary (continued)**

则该生灭 $Q$ 矩阵零流出当且仅当

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{\mu_n b_n} \left( \sum_{k=N}^{n} \mu_k (1 + c_k) + \mu_N a_N \right) = \infty.$$

特别地, 当 $N = 0$ 时, 该生灭 $Q$ 矩阵零流出当且仅当

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_n b_n} \sum_{k=0}^{n} \mu_k (1 + c_k) = \infty.$$

# 带移民单生 $Q$ 矩阵零流出

带移民单生 $Q$ 矩阵:

$$q_{01} > 0(q_{0k} \geq 0, k \geq 2);$$

$$q_{i,i+1} > 0,\ q_{ij} = 0,\ i \geq 1,\ j \geq i + 2.$$

张余辉, 赵 .(2010). 带移民的单生过程. 数学学报, 53(5): 833-846.

# 带移民单生 $Q$ 矩阵零流出

**Theorem**

对带移民单生 $Q$ 矩阵 $Q = (q_{ij} : i, j \in \mathbb{Z}_+)$, 则 $Q$ 矩阵是零流出的当且仅当 $R := \sum_{n=0}^{\infty} m_n = \infty$, 其中

$$m_0 = \frac{1}{q_0}, \ m_n = \frac{1}{q_{n,n+1}} \left( 1 + c_n + \sum_{k=0}^{n-1} q_n^{(k)} m_k \right), \ n \geq 1.$$

# 单死 Q 矩阵零流入

**Theorem**

给定单死 $Q$ 矩阵 $Q = (q_{ij} : i, j \in \mathbb{Z}_+)$. 定义 $\bar{q}_k^{(n)} = \sum_{j=n}^{\infty} q_{kj}$ $(n > k)$. 则 $Q$ 矩阵是零流入的当且仅当 $\overline{R} := \sum_{n=0}^{\infty} \overline{m}_n = \infty$, 其中

$$\overline{m}_0 = 0, \ \overline{m}_n = \frac{1}{q_{n,n-1}} \left( 1 + \sum_{k=0}^{n-1} (c_k + \bar{q}_k^{(n)}) \overline{m}_k \right), \ n \geq 1.$$

# 单死 Q 矩阵零流入

**Theorem**

给定单死 Q 矩阵 $Q=(q_{ij}:i,j\in\mathbb{Z}_+)$. 则该 Q 矩阵有唯一不变测度 $(\mu_i)$ 如下:

$$\mu_0=1,\ \mu_n=\frac{1}{q_{n,n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}(c_k+\bar{q}_k^{(n)})\mu_k,\ n\geq 1.$$

进一步, 该 Q 矩阵有唯一不变概率测度 $(\pi_i)$ 当且仅当 $\mu:=\sum_{n=0}^{\infty}\mu_n<\infty$, 此时 $\pi_i=\mu_i/\mu$.

谢谢!