多次调和函数相关问题最近进展

汪志威

(北京师范大学)

2021 全国多复变年会

吉林师范大学

2021.11.14

报告内容来源于与下列老师的合作结果：

- 邓富声
- 宁家福
- 张利友
- 周向宇

报告提纲：

1. 基本概念及相关定理.

2. Ohsawa-Takegoshi L^2-延拓定理的逆与Griffith正性的新判别.
   (邓-汪-张-周)

3. Hörmander L^2-估计的逆与Nakano正性的新刻画.
   (邓-宁-汪，邓-宁-汪-周)

§1. 基本概念

多次调和函数（Lelong, Oka）.

<u>定义</u>：设 $\Omega\subset\mathbb{C}^n$ 为开集，一个函数 $u:\Omega\longrightarrow[-\infty,+\infty)$ 被称为多次调和函数，如果其满足如下两个条件：

① u 为上半连续；

② 对任意 $\mathbb{C}^n$ 中复直线 L，$u\big|_{\Omega\cap L}$ 为 $\Omega\cap L$ 上次调和函数

$\Updownarrow$

②′ $\forall\, a\in\Omega$，$\forall\,\xi\in\mathbb{C}^n$，$|\xi|<d(a,\Omega^c)$，$u$ 满足下面平均值不等式：

$$u(a)\leq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(a+e^{i\theta}\xi)\,d\theta$$

<u>记号</u>：Ω 上多次调和函数全体记为 $Psh(\Omega)$

例：设 $f_1, \cdots, f_N \in \mathcal{O}(\Omega)$，则 $c\log\sum_{i=1}^{N}|f_i|^2 \in Psh(\Omega)$，其中 $c>0$.

注：1. 多次调和性是一个局部性质，且在双全纯映照下保持.

2. $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$，则 $u \in Psh(\Omega) \Longleftrightarrow \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}\right)_{1\le i,j\le n} \ge 0$.

强多次调和函数（记为 $SPsh(\Omega)$）

定义：$u: \Omega \longrightarrow [-\infty, +\infty)$ 为强多次调和函数，若其满足：

① $u \in Psh(\Omega)$

② $\forall z_0 \in \Omega$，$\exists$ $U_{z_0} \subset \Omega$，$\varepsilon > 0$. s.t. $u - \varepsilon|z|^2 \in Psh(U_{z_0})$.

（强）多次调和性在双全纯映照下保持不变 ⟶ 可定义在复流形上.

多次调和函数在多复变和复几何:

① Levi 问题

② 线丛的度量的正性

$h=e^{-\varphi}$

· 光滑 $\varphi\in C^\infty\cap Psh$

· 奇异 $\varphi\in L^1_{loc}\cap Psh$.

③ 向量丛度量的 Griffiths 正性 (近期热点)

h

· 光滑

· 奇异

统一刻画为 $\log|s^*|_{h^*}\in Psh$.

$\forall\ s^*\in E^*$, h^*为h诱导的E^*的 hermitian 度量.

· 可推广到(奇异) Finsler 度量.

L^2-理论

定理 (Hörmander's L^2-估计, 1965)

令 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 为光滑边界有界强拟凸域, $\varphi \in Psh(\Omega) \cap \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$.

令 f 为 Ω 上 $(0,1)$ 形式, 且 $\bar\partial f = 0$, 则存在 $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, s.t. $\bar\partial u = f$,

且满足下列 L^2-估计:

$$\int_\Omega |u|^2 e^{-\varphi} \le \int_\Omega |f|^2_{i\partial\bar\partial\varphi}\, e^{-\varphi}$$

若 $\int_\Omega |f|^2_{i\partial\bar\partial\varphi}\, e^{-\varphi} < +\infty$.

微分几何性质蕴含分析性质

进一步发展:

Nadel 型消灭定理, Cao, 关-周, 孟-周.

定理（Ohsawa–Takegoshi L^2-延拓定理, 1987）

设 Ω 为 $\mathbb{C}^n$ 中有界拟凸域，$V\subset\Omega$ 为 Ω 的一个光滑子流形。设 $\varphi\in Psh(\Omega)$

s.t. $\varphi|_V\not\equiv-\infty$. 则 $\forall\ f\in\mathcal{O}(V)$, s.t. $\int_V |f|^2e^{-\varphi}<+\infty$, 存在 $F\in\mathcal{O}(\Omega)$

- $F|_V=f$
- $\int_\Omega |F|^2e^{-\varphi}\le c\int_V |f|^2e^{-\varphi}$

微分几何性质蕴含着分析性质

其中 c 为一个只依赖于 Ω 的直径和 V 的余维数的一致常数.

最优常数问题：关-周-朱, Błocki, 关-周, Cao, 周-朱等.

L^2-理论的近期部分重要应用：

- Siu：1. 射影代数流形多亏格形变不变性
  2. 多典则环的有限生成性.

- Berndtsson：1. Bergman 核的多次调和变分
  2. direct image 的正性

- 关一周：1. 最优 L^2-延拓定理及 Suita 猜想的完全解决.
  ($\mathbb{C}^n$ 中有界域情形和 $\mathbb{C}$ 中有界域 Suita 猜想一部分由 Blocki).
  2. 最优 L^2-延拓蕴含 Bergman 核的多次调和变分。
  进一步蕴含：线丛度量若满足最优 L^2-延拓则为正 — 引发了大量后续研究.
  分析性质蕴含微分几何性质.
  3. Demailly 强开性猜想及一系列相关猜想的解决.
  (被认为是"复分析与代数几何交叉领域近期最伟大成就之一")

§2. Ohsawa-Takegoshi L^2-extension 的逆与全纯向量丛奇异度量的 Griffiths 正性新判别

(邓-张-张-周: arXiv: 1809.10371)

多重种类 L^p-延拓性质:

设 $D \subset \mathbb{C}^n$ 为开集. 函数 $\varphi: D \to [-\infty, +\infty)$ 为上半连续函数. 称 φ 满足多重种类 L^p-延拓性质, 如果 $\forall m \geq 1$, $\forall z \in D$ s.t $\varphi(z) \neq -\infty$, 存在 $f \in \mathcal{O}(D)$, s.t $f(z) = 1$ 且

$$\int_D |f|^p e^{-m\varphi} \leq C_m e^{-m\varphi(z)}$$

其中 C_m 为与 z 无关的常数, 且满足 $\lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{\log C_m}{m} = 0$.

定理1 (DWZZ) 若 φ 满足多重 L^p-延拓性质 $\Rightarrow \varphi \in Psh(D)$.

证明受 Demailly 关于多次调和函数的逼近定理启发.

Demailly: $\varphi \in Psh(D) \Rightarrow \varphi = \lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{1}{2m} \log\left(\sum |f_{j,m}|^2\right)$. 其中 $f_{j,m}$ 为加权 $(e^{-2m\varphi})$ Bergman 空间标准正交基.

全纯 Hermitian 向量丛的多重粗糙 L^p-延拓性质

设 (E,h) 为 $D\subset\mathbb{C}^n$ 上全纯向量丛，h 为 E 的一个奇异度量，$p>0$ 固定常数。称 (E,h) 满足多重粗糙 L^p-延拓性质，如果：$\forall z\in D$，$\forall\ a\in E_z$，$|a|_h<+\infty$，$\forall\ m\geq 1$，$\exists\ f_m\in\mathcal{O}(D,E^m)$，s.t. $f_m(z)=a^{\otimes m}$ 且满足如下估计：

$$\int_D |f_m|^p_{h^{\otimes m}} \leq C_m\left|a^{\otimes m}\right|^p_{h^{\otimes m}} = C_m|a|_h^{mp}$$

其中 C_m 为与 z 无关的常数，且满足 $\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{\log C_m}{m}=0$.

<u>定理2</u> (DWZZ)　(E,h) 为 $D\subset\mathbb{C}^n$ 上全纯向量丛，h 为奇异度量

$$(E,h)\text{ 满足多重粗糙 }L^p\text{ 延拓性质}\Longrightarrow (E,h)\underset{\text{Griffith.}}{\geq} 0$$

<u>证明方法</u>：(E,h) 满足多重粗糙 L^p 延拓性质 $\Longrightarrow \log|S^*|_{h^*}$ 满足正数的多重粗糙 L^1-延拓性质 $\xRightarrow{\text{定理1}} \log|S^*|_{h^*}$ 多次调和 #.

应用(DWZZ): 给出研究 direct image 正性的新方法

$\pi: X \to Y$ 逆紧, 淹没. X Kähler. $L \to X$ 全纯线丛. h 为 hermitian 度量. $h = e^{-\varphi}$, $\varphi \in psh$. 则 $\left(\pi_*\left((K_{X/Y}+L)\otimes \mathcal{J}(h)\right), \|\cdot\|\right) \underset{\text{Griffiths}}{\geq} 0$

解释: 由 Grauert direct image 定理 $\pi_*\left((K_{X/Y}+L)\otimes \mathcal{J}(h)\right)$ 为 Y 上 coherent analytic sheaf.

则 $\exists A \subset Y$ 解析子集. s.t.

① $\pi_*\left((K_{X/Y}+L)\otimes \mathcal{J}(h)\right)\big|_{Y\setminus A}$ 为全纯向量丛

② $\forall t \in Y\setminus A$, $\pi_*\left((K_{X/Y}+L)\otimes \mathcal{J}(h)\right)_t = H^0\left(X_t, (K_{X_t}+L)\otimes \mathcal{J}(h)\big|_{X_t}\right)$

则对 $\forall s \in \pi_*\left((K_{X/Y}+L)\otimes \mathcal{J}(h)\right)_t = H^0\left(X_t, (K_{X_t}+L)\otimes \mathcal{J}(h)\big|_{X_t}\right)$

$$\|s\|^2 := \int_{X_t} s\wedge\bar{s}\, h\big|_{X_t} = \int_{X_t} s\wedge\bar{s}\, e^{-\varphi|_{X_t}}$$

定义了 $\pi_*\left((K_{X/Y}+L)\otimes \mathcal{J}(h)\right)\big|_{Y/A}$ 上一个奇异 Hermite 度量.

问题和进展：

问题1(DWZZ): Hörmander's L^2-估计的逆？

(此前 Berndtsson 在一维时对连续函数给出一种形式的逆，但其证明方法无法推广到高维)

问题2(DWZZ): 多重调和 L^p-延拓性质是否能刻画更强的正性，如 Nakano 正性？

进展： Hosono-Inayama: Sci China Math, 2020, (63), arXiv: 1901.02223.

Twisted Hörmander Condition: $\Omega \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{C}^n$, $\varphi: \Omega \to [-\infty, +\infty)$ u.s.c.

称 (Ω, φ) 满足 twisted Hörmander condition，如果 $\forall m \in \mathbb{Z}^+$, $\forall \psi \in SPsh(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$,

及一闭具有紧支集 $(0,1)$-形式 α, s.t. $\int_\Omega |\alpha|^2_{\sqrt{-1}\partial\bar\partial\psi} e^{-(m\varphi+\psi)} < +\infty$,

存在一个光滑函数 u s.t. (1) $\bar\partial u = \alpha$

(2) $\int_\Omega |u|^2 e^{-(m\varphi+\psi)} \leq \int_\Omega |\alpha|^2_{\sqrt{-1}\partial\bar\partial\psi} e^{-(m\varphi+\psi)}$.

Hosono-Inayama 给出问题一的部分解答：

定理 (HI) $\varphi:\Omega\to[-\infty,+\infty)$ 上半连续。若 $Pole(\varphi)=\{\varphi=-\infty\}$ 为闭集，且 φ 在 $\Omega\setminus Pole(\varphi)$ 上局部Hölder连续。若 (Ω,φ) 满足 twisted Hörmander condition，则 $\varphi\in Psh(\Omega)$.

证明思路：

twisted Hörmander condition $\xRightarrow{HI}$ 多重粗糙 L^p 延拓性质 $\xRightarrow{DWZZ}$ 多次调和

Hosono-Inayama 给出问题一的部分解答：

Twisted Hörmander condition 向量丛

(E,h) 为 Ω 上全纯向量丛，h 为 E 的奇异度量。称 (E,h) 满足 twisted Hörmander 条件，若 $\forall\ \psi\in SPsh(\Omega)\cap C^\infty(\Omega)$，$\forall$ $\bar\partial$-闭且有紧支集的取值于 $E^{\otimes m}$ 的 $(n,1)$-形式

$$\alpha=\sum\alpha_j\, dz\wedge d\bar z_j,\ \text{s.t.}\ \int_\Omega\sum_{1\le i,j\le n}(\psi^{i\bar j}\alpha_i,\alpha_j)_{h^{\otimes m}}e^{-\psi}dV_\omega<+\infty$$

存在光滑取值于 $E^{\otimes m}$ 的 $(n,0)$-形式 u s.t.

(1) $\bar\partial u=\alpha$

(2) $$\int_\Omega |u|^2_{(h^{\otimes m},\omega)}e^{-\psi}dV_\omega\le\int_\Omega\sum_{1\le i,j\le n}(\psi^{i\bar j}\alpha_i,\alpha_j)_{h^{\otimes m}}e^{-\psi}dV_\omega.$$

定理(HI). (E,h) 如上. 设 $\forall\ s\in E^*$，$\log|s^*|_{h^*}$ 上半连续，固定 $\Omega'\subset\subset\Omega$.
若 $\log|u|_h$ 在 Ω 上满足局部Hölder连续条件，且满足 twisted Hörmander条件，则 (E,h) 满足多重次调和 L^p-延拓条件，从而由DWZZ 得到 $(E,h)\ge_{Griff}0$.

Hosono-Inayama 给出问题二的部分解答:

定理: $\exists\ (E,h)$ 满足多重粗糙 L^2-延拓性质, 但 (E,h) 不是 Nakano 正.

总结:

$$
\begin{tikzcd}
\text{twisted Hörmander} \arrow[r, Rightarrow, "HI"] & \text{多重粗糙 } L^p\text{-延拓} \arrow[r, Rightarrow, "DWZZ"] \arrow[d, Rightarrow, "\not" description, "HI"] & \text{Griffiths 正.} \\
& \text{Nakano 正} &
\end{tikzcd}
$$

§3 Hörmander L^2-估计的逆与Nakano正性的新刻画.

邓-宁-汪: Sci China Math. 2021 (64); arXiv:1910.06518.
邓-宁-汪-周: arXiv: 2001.01762.

邓-宁-汪:

· **最优 L^p-估计性质**: $\forall$ $\bar\partial$-闭具有紧支集的 $(0,1)$-形式 α, $\forall \psi \in SPsh(\Omega) \cap \mathcal{C}^\infty(\Omega)$,

若 $\int_\Omega |\alpha|^2_{i\partial\bar\partial\psi} e^{-(\varphi+\psi)} < +\infty$, 则存在 $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, s.t

(i) $\bar\partial u = f$ (ii) $\int_\Omega |u|^2 e^{-(\varphi+\psi)} \le \int_\Omega |\alpha|^2_{i\partial\bar\partial\psi} e^{-(\varphi+\psi)}$

· **最优 L^p-延拓性质**: $\forall z \in \Omega$. $\varphi(z) \neq -\infty$, $\forall$ 全纯 cylinder P, s.t $z+P \subset \Omega$

存在 $f \in \mathcal{O}(z+P)$ s.t. $f(z)=1$ 且 $\frac{1}{\mu(P)} \int_{z+P} |f|^p e^{-\varphi} \le e^{-\varphi(z)}$.

$\mu(P)$ 为 P 的 Lebesgue 体积, 全纯 cylinder $= A(P_{r,s})$. $A \in U(n)$.

$P_{r,s} = \{ |z_1|^2 < r^2, |z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2 < s^2 \}$.

定理3（邓-宁-汪）

- $\varphi\in C^2(\Omega)$，φ 满足最优 L^2 估计性质 $\Rightarrow$ $\varphi\in Psh(\Omega)$

证明方法：从 Hörmander 原始证明出发，反证法，利用 Bochner-Kodaira 恒等式＋新的局部化技术得出矛盾.

- $\varphi:\Omega\to[-\infty,+\infty)$ 上半连续，φ 满足最优 L^p-延拓性质 $\Rightarrow$ $\varphi\in Psh(\Omega)$

证明方法：本质上为关-周方法.

闭

- $\varphi\in C(\Omega\setminus Pole(\varphi))$，$\varphi$ 满足多重加权 L^2-估计性质（即 Hosono-Inayama 的 twisted Hörmander 条件）$\Longrightarrow$ $\varphi\in Psh(\Omega)$.

注：考察 H-I 的证明，发现局部 Hölder 连续条件可减弱为连续条件.

邓-宁-汪-周(向量丛情形):

设 (X, ω) 为 Kähler, 其上存在一个正的全纯线丛. (E, h) 为 X 上具有奇异Hermite度量 h 的全纯向量丛.

• 最优 L^p-估计条件: 若对 $\forall$ 正线丛 (A, h_A), $\forall f \in \mathcal{C}_c^\infty(X, \Lambda^{n,1} T_X^* \otimes E \otimes A)$ s.t. $\bar\partial f = 0$, 若 $\int_X \langle B^{-1}_{A,h_A} f, f\rangle^{\frac{p}{2}} dV_\omega < +\infty$, 则存在 $u \in L^p(X, \Lambda^{n,0} T_X^* \otimes E \otimes A)$ s.t. $\bar\partial u = f$ 且

$$\int_X |u|^p_{h\otimes h_A} dV_\omega \leq \int_X \langle B^{-1}_{A,h_A} f, f\rangle^{\frac{p}{2}} dV_\omega$$

其中 $B_{A,h_A} = [i\Theta_{A,h_A} \otimes Id_E, \Lambda_\omega]$.

定理4 (邓-宁-汪-周)

(E, h) 为具有 $\mathcal{C}^2$-Hermite 度量 h 的全纯向量丛. 则

(E,h) 满足最优 L^2-估计条件 $\Longrightarrow (E,h) \underset{\text{Nakano}}{\geq} 0$.

注记：

- Nakano正 $\Rightarrow$ 满足最优 L^2-估计（Hörmander），因此我们给出 Nakano正新刻画.

  （分析条件 $\Longleftrightarrow$ 微分几何条件）

- 证明方法：反证法：

  利用 Bochner-Kodaira 恒等式 + 新局部化技术

- 我们的证明还可以刻画 Nakano强正，$\forall\, \theta \in \mathcal{C}^0(X, \Lambda^{1,1}T^*X \otimes End(E))$

  s.t. $\theta^* = \theta$. 将 B_{A,h_A} 替换为 $B_{h_A,\theta} := [i\Theta_{A,h_A} \otimes Id_E + \theta, \Lambda_\omega]$

  则 (E,h) 满足相应条件 $\Rightarrow$ $i\Theta_{E,h} \geq_{Nakano} \theta$.

- Hosono-Inayama 的方法无法得到 Nakano正性.

  注意到 twisted Hörmander condition $\xRightarrow{HI}$ 多重次调和 L^p-延拓 $\xRightarrow{DWZZ}$ Griffith正

  $$\not\Downarrow \; HI$$

  Nakano正.

应用(DNWZ): 全新的研究 direct image Nakano正性的方法

$\pi: X \to Y$ 逆紧, 淹没. X Kähler. $(E,h)\to X$ C^2-Nakano正,

则 $(\pi_*(K_{X/Y}\otimes E), \|\cdot\|) \geq_{\text{Nakano}} 0$.

- 由 O-T L^2 延拓. $\pi_*(K_{X/Y}\otimes E)$ 为全纯向量丛, 且 $(\pi_*(K_{X/Y}\otimes E))_t = H^0(X_t, K_{X_t}\otimes E)$
- $\forall s \in (\pi_*(K_{X/Y}\otimes E))_t$, $\|s\|^2 := \int_{X_t} |s|^2_{h|_{X_t}\otimes h_{\omega_t}}\, dV_{\omega_t}$

证明方法: $(E,h) \geq_{\text{Nakano}} 0 \xRightarrow[L^2\text{- estimate}]{\text{Hörmander}}$ $\bar\partial$-方程在 X 上有 L^2-解

Fubini 定理

$(\pi_*(K_{X/Y}\otimes E), \|\cdot\|)$ 在 Y 上满足最优 L^2-估计性质 $\xRightarrow{\text{DNWZ}}$ Nakano正.

其他应用

- Inayama (arXiv: 2004.05798): 利用我们的Nakano正性的分析刻画给出一种奇异度量Nakano正性的定义，并得到Demailly-Nadel-Nakano型消灭定理.

问题与进展:

多重粗糙 L^p-延拓, 最优 L^p-延拓 $\Rightarrow$ Griffiths 正性.

最优 L^2-估计 $\Longleftrightarrow$ Nakano 正性.

问题3 (DNWZ): Griffiths 正 $\overset{?}{\Longrightarrow}$ 多重粗糙 L^p 延拓, 最优 L^p-延拓?

进展: Khare–Pingali (Bull. Sci. math 167 (2021) 102956)

定理 (KP) (E, h) 为全纯向量丛, h 为奇异 Hermite 度量. 设 h_0 为 E 上任意选定的光滑 Hermite 度量. 若 $\ln\det(h h_0^{-1})$ 在紧集上有界, 且 (E, h) 为 Griffiths 正, 则 (E, h) 满足一种多重粗糙 L^2 延拓条件.

部分回答了问题3.

问题4 (DNWZ)：多重粗糙 L^2 (L^p)-估计 $\overset{?}{\Longrightarrow}$ Nakano正？

问题5 (DNWZ)：发展合适的奇异度量 Nakano正性的定义，并在奇异度量相容下建立 Nakano正性的刻画。

进展：Inayama (arXiv: 2004.05798) 已有部分结果.

问题6 (DNWZ)：寻找更多应用.

谢谢大家！