座号______

北京师范大学 2022 ～ 2023 学年第一学期期中考试试卷（A 卷）

课程名称：　数学分析 III　　　　任课老师姓名：　施翔晖

卷面总分：100 分　　考试时长：100 分钟　　考试类别：闭卷 ☒ 开卷 ☐ 其他 ☐

院（系）：__________　　专业：__________　　年级：__________

姓名：__________　　学号：__________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
分数											

阅卷老师（签字）：__________

一、 选择题 $[4 \times 2$ 分$]$

(a) 对于二元函数 $z = f(x, y)$, 下列结论正确的是 C .

A. 若 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$, 则必有 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x, y) = A$ 且有 $\lim\limits_{y \to y_0} f(x, y) = A$.

B. 若在 $P_0(x_0, y_0)$ 附近 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 都存在, 则在 P_0 处 $z = f(x, y)$ 可微.

C. 若在 $P_0(x_0, y_0)$ 附近 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 存在且连续, 则在 P_0 处 $z = f(x, y)$ 可微.

D. 若 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 都存在, 则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

(b) 二元函数 $z = f(x, y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 处满足关系 B .

A. 可微（即全微分存在）$\Rightarrow$ 可导（即偏导数存在）$\Rightarrow$ 连续;

B. 可微 $\Rightarrow$ 可导, 或可微 $\Rightarrow$ 连续, 但可导不一定连续;

C. 可导 $\Rightarrow$ 连续, 但可导不一定可微;

D. 可微 $\Leftrightarrow$ 可导 $\Leftrightarrow$ 连续.

二、 填空题 $[4 \times 3$ 分$]$

(a) 函数 $f(x, y, z) = z e^{x/y}$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处函数值下降最快的方向为 $(-1, 1, -1)$.

(b) 设 $u = z^{xy}$, 则 $\mathrm{d}u = z^{xy}\left(y \ln z \cdot \mathrm{d}x + x \ln z \cdot \mathrm{d}y + \dfrac{xy}{z} \cdot \mathrm{d}z\right)$.

(c) $f(x, y) = e^{x+y}$ 在 $(0, 0)$ 的 n 阶泰勒展开式的余项 $R_n = \dfrac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta(x+y)},\ 0 < \theta < 1$.

三、 [10 分] 讨论函数 $f(x,y)=\dfrac{x^2(1+x^2)-y^2(1+y^2)}{x^2+y^2}$ 在原点的二重极限和两个累次极限.

解答. 代入 $y=kx$, 则有

$$\lim_{\substack{x\to0\\y=kx}} f(x,y)=\lim_{x\to0}\frac{x^2(1+k^2)-k^2x^2(1+k^2x^2)}{x^2(1+k^2)}=\frac{1-k^2}{1+k^2}.$$

所以二重极限不存在. 而两个累次极限分别为

$$\lim_{y\to0}\lim_{x\to0} f(x,y)=-\lim_{y\to0}(1+y^2)=-1$$
$$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0} f(x,y)=\lim_{x\to0}(1+x^2)=1.$$

所以两个累次极限都存在但不相等. □

四、 [10 分] 设 $\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解答. 方程 $\dfrac{x}{z}=\ln z-\ln y$ 两边同时对 x 求导, 得

$$\frac{z-xz_x}{z^2}=\frac{1}{z}\cdot z_x \quad\Longrightarrow\quad z_x=\frac{z}{x+z}.$$ □

然后

$$z_{xx}=\frac{z_x(x+z)-(1+z_x)z}{(x+z)^2}=\frac{z(x+z)-z(x+2z)}{(x+z)^3}=\frac{-z^2}{(x+z)^3}.$$

五、 [10 分] 如果可微函数 $f(x,y)$ 在点 $(1,2)$ 处从点 $(1,2)$ 到点 $(2,2)$ 方向 $\vec{v}_1$ 的方向导数为 2, 从点 $(1,2)$ 到点 $(1,1)$ 方向 $\vec{v}_2$ 的方向导数为 -2. 求

(a) $f(x,y)$ 在点 $(1,2)$ 处的梯度;

(b) 在点 $(1,2)$ 处从点 $(1,2)$ 到点 $(4,6)$ 方向 $\vec{v}_3$ 的方向导数.

解答.

(a) 首先 $\vec{v}_1=(1,0)$, $\vec{v}_2=(0,-1)$. 在点 $(1,2)$ 处两个方向导数的计算:

$$\frac{\partial f}{\partial\vec{v}_1}=f_x\cdot1+f_y\cdot0=f_x=2,\qquad \frac{\partial f}{\partial\vec{v}_2}=f_x\cdot0+f_y\cdot(-1)=-f_y=-2.$$

所以, $\mathbf{grad}\,f(1,2)=(2,2)$.

(b) $\vec{v}_3=(3,4)/5$, 所以

$$\left.\frac{\partial f}{\partial\vec{v}_3}\right|_{(1,2)}=(2,2)\cdot\frac{(3,4)}{5}=\frac{14}{5}.$$ □

六、 [10 分] 在马鞍面 $z=xy$ 上求一点, 使得这一点的法线与平面 $x+3y+z+9=0$ 垂直, 并写出此点的法线方程和切平面方程.

解答. 马鞍面上一点 (x_0, y_0, z_0) 处的法向量为 $(y_0, x_0, -1)$, 它与平面的法向量 $(1,3,1)$ 平行, 所以

$$\frac{y_0}{1} = \frac{x_0}{3} = \frac{-1}{1} \quad \Longrightarrow \quad x = -3,\ y = -1,\ z_0 = x_0 y_0 = 3$$

所求点为 $(-3,-1,3)$, 该点处的法线方程为

$$x + 3 = \frac{y+1}{3} = z - 3,$$

切平面方程为 $x + 3y + z = (-3) + 3 \cdot (-1) + (3) = -3$, 即

$$x + 3y + z + 3 = 0. \qquad \square$$

七、 [10 分] 设 $\varphi(x) = \int_x^{x^2} \frac{\sin xy}{y} \mathrm{d}y$, 求 $\varphi'(x)$.

解答.

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \int_x^{x^2} \cos xy \,\mathrm{d}y + \frac{\sin(x \cdot x^2)}{x^2} \cdot (2x) - \frac{\sin(x \cdot x)}{x} \cdot 1 \\ &= \frac{1}{x}\Big[\sin xy\Big]_x^{x^2} + \frac{2\sin x^3 - \sin x^2}{x} \\ &= \frac{3\sin x^3 - 2\sin x^2}{x}. \end{aligned} \qquad \square$$

八、 [10 分] 证明: 反常积分 $J(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{\sin x} \cdot \frac{\sin 2x}{x^\lambda} \mathrm{d}x$ 关于~~$\lambda \geq 0$ 一致收敛~~λ 在 $(0,+\infty)$ 上内闭一致收敛.

解答. 设 $\lambda > 0$. 取任意闭区间 $[a,b] \subset (0,+\infty)$. 令 $g(x,\lambda) = \frac{1}{x^\lambda}$. 当 $x \to +\infty$ 时, $g(x,\lambda)$ 单调递减, 且在 $[a,b]$ 上关于 λ 一致收敛到 0 (因为 $\frac{1}{x^\lambda} \leq \frac{1}{x^a} \to 0$). 另一方面

$$\begin{aligned} \left|\int_0^A e^{\sin x} \sin 2x \,\mathrm{d}x\right| &= 2\left|\int_0^A e^{\sin x} \sin x \cos x \,\mathrm{d}x\right| = 2\left|\Big[(\sin x - 1)e^{\sin x}\Big]_0^A\right| \\ &= 2\left|\sin A \cdot e^{\sin A} - e^{\sin A} + 1\right| \leq 6e. \end{aligned}$$

由狄利克雷判别法可知 $J(\lambda)$ 关于 λ 在 $(0,+\infty)$ 上内闭一致收敛.

注: 1. 也可以令 $f(\lambda,x) = 2e^{\sin x}\cos x$, $g(\lambda,x) = \frac{\sin x}{x^\lambda}$. 计算更简单.

2. $J(\lambda)$ 在 $[0,+\infty)$ 不一致收敛. 当 $\lambda = 0$ 时, 作代换 $t = \sin x$, 令 $A_n = n\pi + \frac{\pi}{2}$, 则 $\lim_n A_n = +\infty$. 令 $u_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \sin 2x \,\mathrm{d}x$, $u_{n+1} = \int_{A_n}^{A_{n+1}} e^{\sin x} \sin 2x \,\mathrm{d}x$, 则部分和

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \left[\int_0^{\sin\frac{\pi}{2}} + \sum_{i=0}^{n-1}\left(\int_{\sin A_{2i}}^{\sin A_{2i+1}} + \int_{\sin A_{2i+1}}^{\sin A_{2i+2}}\right)\right] 2te^t \,\mathrm{d}t \\ &= \left[\int_0^1 + \sum_{i=0}^{n-1}\left(\int_1^{-1} + \int_{-1}^{1}\right)\right] 2te^t \,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 te^t \,\mathrm{d}t = 2\left[(t-1)e^t\right]_0^1 = 2 \\ S_{2n+1} &= \left[\int_0^{A_0} + \sum_{i=0}^{n-1}\left(\int_{\sin A_{2i}}^{\sin A_{2i+1}} + \int_{\sin A_{2i+1}}^{\sin A_{2i+2}}\right) + \int_{\sin A_{2n}}^{\sin A_{2n+1}}\right] 2te^t \,\mathrm{d}t \\ &= 2\left[\int_0^1 + \int_1^{-1}\right] te^t \,\mathrm{d}t = 2\int_0^{-1} te^t \,\mathrm{d}t = 2\left[(t-1)e^t\right]_0^{-1} = 2(1 - 2e^{-1}). \end{aligned}$$

级数 $\sum_n u_n$ 不收敛, 所以 $\lambda = 0$ 时, 反常积分不收敛.

3. 另外, 有同学利用 $e^{\sin A} \le e$ 得到

$$\left|\int_0^A e^{\sin x} \sin 2x \,\mathrm{d}x\right| \le e \left|\int_0^A \sin 2x \,\mathrm{d}x\right|$$

当 $x \in (0, A)$ 时, 若 $\sin x \ge 0$ 成立, 则这个不等式成立, 但一般情况下不成立. 如果是

$$\left|\int_0^A e^{\sin x} \sin 2x \,\mathrm{d}x\right| \le e \int_0^A |\sin 2x| \,\mathrm{d}x$$

右侧当 $A \to 0$ 时, 趋于 $+\infty$, 得不到有界性. □

九、 [10 分] 求由方程 $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8yz - z + 8 = 0$ 所确定的隐函数 $z = z(x, y)$ 的极值.

解答. 令 $F(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8yz - z + 8$. $F_x = 4x$, $F_y = 4y + 8z$, $F_z = 2z + 8y - 1$. 先求驻点: 解方程组

$$\begin{cases} z_x = \dfrac{4x}{1 - 2z - 8y} = 0 \\ z_y = \dfrac{4(y + 2z)}{1 - 2z - 8y} = 0 \end{cases}$$

得到 $x = 0$ 和 $y + 2z = 0$. 代入 $F(x, y, z) = 0$ 得到 $z = 1, -\frac{8}{7}$. 这样隐函数 $z = z(x, y)$ 的驻点为 $(0, -2)$ 和 $\left(0, \frac{16}{7}\right)$. 由

$$z_{xx} = \frac{4}{1 - 2z - 8y}, \quad z_{xy} = 0, \quad z_{yy} = \frac{4}{1 - 2z - 8y}.$$

总有 $z_{xx} z_{yy} - z_{xy}^2 = 16(1 - 2z - 8y)^{-2} > 0$.

在 $(0, -2)$, $z = 1$, $z_{xx} = \frac{4}{15} > 0$, 所以 $z(0, -2) = 1$ 是极小值;

在 $\left(0, \frac{16}{7}\right)$, $z = -\frac{8}{7}$, $z_{xx} = -\frac{4}{15} < 0$, 所以 $z\left(0, \frac{16}{7}\right) = -\frac{8}{7}$ 是极大值. □

十、 [10 分] 求椭圆 $x^2 + 3y^2 = 12$ 的内接等腰三角形, 其底边平行于椭圆的长轴, 而使面积最大.

解答. 设 (x, y), $x \ge 0$ 为三角形底边上的点, 则三角形面积为 $S = x(2 - y)$. 令

$$L(x, y, \lambda) = x(2 - y) + \lambda(x^2 + 3y^2 - 12).$$

求偏导数, 得到

$$\begin{cases} L_x = 2 - y + 2\lambda x = 0 \\ L_y = -x + 6\lambda y = 0 \\ L_\lambda = x^2 + 3y^2 - 12 = 0 \end{cases}$$

消去 λ 得到 $6y - 3y^2 + x^2 = 0$, 联立 $x^2 + 3y^2 = 12$, 可得满足 $x \ge 0$ 的驻点只有 $(0, 2)$ 和 $(3, -1)$.

当 $(x, y) = (0, 2)$ 时, $S = 0$; 当 $(x, y) = (3, -1)$ 时, $S = 9$. 因满足约束条件的点集是有界闭集, 目标函数连续, 必有最大和最小值. 所以 $S_{\max} = 9$. □