数学分析 III

主讲：施翔晖

2022 · 秋

第十九章

- 含参量正常积分
- 含参量反常积分
- 欧拉积分

二元函数的积分

含参量 x 的（正常）积分

- 设 $f(x,y)$ 是定义在矩形区域 $R=[a,b]\times[c,d]$ 上的二元函数. 若 $f(x,y)$ 在 $[c,d]$ 上可积, 则有

$$\varphi(x)=\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y,\quad x\in[a,b].$$

- 设 $f(x,y)$ 是定义在区域

$$G=\{(x,y)\mid c(x)\leqslant y\leqslant d(x),\ a\leqslant x\leqslant b\}$$

上的二元函数. 若对每个 x 值, $f(x,y)$ 在 $[c(x),d(x)]$ 上可积, 则有

$$F(x)=\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y,\ x\in[a,b].$$

含参量积分的连续性

定理 19.1 (连续性)

若二元函数 $f(x,y)$ 在矩形区域 $R=[a,b]\times[c,d]$ 上连续，则函数

$$\varphi(x)=\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

在 $[a,b]$ 上连续.

- 亦可写成

$$\lim_{x\to x_0}\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_c^d \lim_{x\to x_0} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

- 同理可得

$$\psi(y)=\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

在 $[c,d]$ 上连续.

- 设 $x, x+\Delta x \in [a,b]$,
$$\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)=\int_c^d \left[f(x+\Delta x,y)-f(x,y)\right]\mathrm{d}y.$$
- f 在 R 上连续, R 有界闭, f 在 R 上一致连续.
- 所以对任意 $\varepsilon>0$, 存在 δ 使得当 $|\Delta x|<\delta$ 时,
$$|\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)|\leqslant \int_c^d |f(x+\Delta x,y)-f(x,y)|\mathrm{d}y<\varepsilon(d-c).$$
- 所以 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

含参量积分的连续性

定理 19.2 (连续性)

设二元函数 $f(x,y)$ 是定义在区域

$$G=\{(x,y)\mid c(x)\leqslant y\leqslant d(x),\ a\leqslant x\leqslant b\}$$

上连续, 其中 $c(x),d(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数, 则函数

$$F(x)=\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y, \qquad (x\in[a,b])$$

在 $[a,b]$ 上连续.

- 用换元积分法. 令

$$y = c(x) + t(d(x) - c(x)), \qquad (t \in [0,1])$$

- 此时 y 在 $c(X)$, $d(x)$ 之间取值, 而且

$$\mathrm{d}y = (d(x) - c(x))\,\mathrm{d}t.$$

- 这样

$$F(x) = \int_0^1 f(x, c(x) + t(d(x) - c(x)))(d(x) - c(x))\,\mathrm{d}t.$$

被积函数在 $[a,b] \times [0,1]$ 上连续, 所以 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

求 $I(\alpha) = \lim_{\alpha \to 0} \int_{\alpha}^{1+\alpha} \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2 + \alpha^2}$.

求 $I(\alpha)=\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+\alpha^2}$.

$c(\alpha)=\alpha$, $d(\alpha)=1+\alpha$ 和 $f(\alpha,x)=(1+x^2+\alpha^2)^{-1}$ 是连续函数, 所以 $I(\alpha)$ 在 $\alpha=0$ 时连续.

$$\lim_{\alpha\to 0}I(\alpha)=I(0)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}.$$

求导与积分运算的可交换性

定理 19.3 (可微性)

若函数 $f(x,y)$ 与其偏导数 $f_x(x,y)$ 都在矩形区域 $R=[a,b]\times[c,d]$ 上连续，则

$$\varphi(x)=\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

在 $[a,b]$ 上可微，且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_c^d \frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

- 取 $x, x+\Delta x \in [a,b]$, 则
$$\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x} = \int_c^d \frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}\,\mathrm{d}y.$$
- 根据拉格朗日中值定理和 $f_x(x,y)$ 在（有界闭域）R 上的一致连续性: $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, $|\Delta x|<\delta$ 时, 存在 $\theta\in(0,1)$ 使得
$$\begin{aligned}&\left|\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x} - f_x(x,y)\right|\\ =\ & |f_x(x+\theta\Delta x,y)-f_x(x,y)|<\varepsilon.\end{aligned}$$

所以
$$\begin{aligned}&\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta x} - \int_c^d f_x(x,y)\,\mathrm{d}y\right|\\ \leqslant\ & \int_c^d |f_x(x+\theta\Delta x,y)-f_x(x,y)|\,\mathrm{d}y < \varepsilon(d-c).\end{aligned}$$

求导与积分运算的可交换性

定理 19.4 (可微性)

设 $f(x,y)$, $f_x(x,y)$ 在 $R=[a,b]\times[p,q]$ 上连续, $c(x)$, $d(x)$ 为定义在 $[a,b]$ 上其值含于 $[p,q]$ 内的可微函数, 则函数

$$F(x)=\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

在 $[a,b]$ 上可微, 且

$$F'(x)=\int_{c(x)}^{d(x)} f_x(x,y)\,\mathrm{d}y+f(x,d(x))d'(x)-f(x,c(x))c'(x).$$

- 视 $F(x)$ 为复合函数: $u=c(x)$, $v=d(x)$,

$$F(x)=H(x,u,v)=\int_u^v f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

- 用链式法则和变上限积分的求导法则,

$$\begin{aligned}F'(x)&=\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial u}u'+\frac{\partial H}{\partial v}v'\\&=\int_{c(x)}^{d(x)} f_x(x,y)\,\mathrm{d}y+\\&\qquad f(x,d(x))d'(x)-f(x,c(x))c'(x).\end{aligned}$$

设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域 U 上连续, 验证当 $x \in U$ 时, 函数

$$\varphi(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$\leqslant n$ 的各阶导数存在, 且 $\varphi^{(n)}(x)=f(x)$.

设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域 U 上连续，验证当 $x\in U$ 时，函数

$$\varphi(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1}f(t)\,\mathrm{d}t$$

$\leqslant n$ 的各阶导数存在，且 $\varphi^{(n)}(x)=f(x)$.

- 记 $F(x,t)=(x-t)^{n-1}f(t)$，则 $F_x(x,t)=(n-1)(x-t)^{n-2}f(t)$ $(n>1)$. F 和 F_x 在 U 上连续
- $$\begin{aligned}\varphi'(x)&=\frac{1}{(n-1)!}\left(\int_0^x F_x(x,t)\,\mathrm{d}t+F(x,x)\cdot 1-F(x,0)\cdot 0\right)\\&=\frac{1}{(n-2)!}\int_0^x (x-t)^{n-2}f(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

  类似的，可归纳证明

  $$\varphi^{(k)}(x)=\frac{1}{(n-k-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-k-1}f(t)\,\mathrm{d}t \qquad (1\leqslant k\leqslant n-1)$$
- $k=n-1$ 时，$\varphi^{(n-1)}(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$，所以 $\varphi^{(n)}(x)=f(x)$.

可积性

定理 19.5 (可积性)

若二元函数 $f(x,y)$ 在矩形区域 $R=[a,b]\times[c,d]$ 上连续, 则 $\varphi(x)$ 和 $\psi(y)$ 分别在 $[a,b]$ 和 $[c,d]$ 上可积.

可积性

定理 19.5 (可积性)

若二元函数 $f(x,y)$ 在矩形区域 $R=[a,b]\times[c,d]$ 上连续, 则 $\varphi(x)$ 和 $\psi(y)$ 分别在 $[a,b]$ 和 $[c,d]$ 上可积.

$$\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \quad 与 \quad \int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

求积顺序不同的积分, 统称为**累次积分**、**二次积分**.

可积性

定理 19.5 (可积性)

若二元函数 $f(x,y)$ 在矩形区域 $R=[a,b]\times[c,d]$ 上连续, 则 $\varphi(x)$ 和 $\psi(y)$ 分别在 $[a,b]$ 和 $[c,d]$ 上可积.

$$\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \quad 与 \quad \int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

求积顺序不同的积分, 统称为**累次积分**、**二次积分**.

定理 19.6 (累次积分与求积顺序无关)

若 $f(x,y)$ 在矩形区域 $R=[a,b]\times[c,d]$ 上连续, 则

$$\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

- 对 $u \in [a,b]$, 记 $\varphi(x) = \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$,

$$\Phi_1(u) = \int_a^u \mathrm{d}x \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_a^u \varphi(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\Phi_2(u) = \int_c^d \mathrm{d}y \int_a^u f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

- 分别求导数 Φ_1' 和 Φ_2': 先有 $\Phi_1'(u) = \varphi(u)$. 对于 $\Phi_2(u)$, 令 $\psi(u,y) = \int_a^u f(x,y)\,\mathrm{d}x$, 则 $\psi_u(u,y) = f(u,y)$

$$\begin{aligned}\Phi_2'(u) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\int_c^d \psi(u,y)\,\mathrm{d}y = \int_c^d \psi_u(u,y)\,\mathrm{d}y \qquad (\psi \text{ 在 } R \text{ 上连续})\\ &= \int_c^d f(u,y)\,\mathrm{d}y = \varphi(u) = \Phi_1'(u) \qquad (f \text{ 在 } R \text{ 上连续})\end{aligned}$$

- 所以 $\Phi_1(u) = \Phi_2(u) + k$ (常数). $u = a$ 时, $\Phi_1(a) = \Phi_2(a) = 0$, 由此得 $k = 0$. 即对所有 $u \in [a,b]$, $\Phi_1(u) = \Phi_2(u)$.
- $u = b$ 时即为定理所述结论.

求 $I=\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x\ (b>a>0)$.

求 $I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} \mathrm{d}x \ (b > a > 0)$.

因 $\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^y \, \mathrm{d}y$, 所以

$$I = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_a^b x^y \, \mathrm{d}y.$$

x^y 在 $[0,1] \times [a,b]$ 上满足交换积分顺序的条件, 所以

$$I = \int_a^b \mathrm{d}y \int_0^1 x^y \, \mathrm{d}x = \int_a^b \frac{1}{1+y} \mathrm{d}y = \ln \frac{1+b}{1+a}.$$

计算积分 $I=\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$

计算积分 $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

设 $F(\alpha, x) = \frac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2}$, 则 $F_\alpha(\alpha, x) = \frac{x}{(1+x^2)(1+\alpha x)}$. 令

$$\varphi(\alpha) = \int_0^1 F(\alpha, x)\,\mathrm{d}x,$$

这样 $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = I$.

计算积分 $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

设 $F(\alpha,x) = \dfrac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2}$, 则 $F_\alpha(\alpha,x) = \dfrac{x}{(1+x^2)(1+\alpha x)}$. 令

$$\varphi(\alpha) = \int_0^1 F(\alpha,x)\,\mathrm{d}x,$$

这样 $\varphi(0)=0$, $\varphi(1)=I$. F 和 F_α 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上连续, 所以 φ 可微,

$$\begin{aligned}
\varphi'(\alpha) &= \int_0^1 F_\alpha(\alpha,x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1+\alpha^2}\int_0^1 \left(\frac{\alpha+x}{1+x^2} - \frac{\alpha}{1+\alpha x}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{1+\alpha^2}\left[\alpha\cdot\arctan x + \frac{\ln(1+x^2)}{2} - \ln(1+\alpha x)\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{1+\alpha^2}\left[\alpha\cdot\frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2} - \ln(1+\alpha)\right].
\end{aligned}$$

计算积分 $I=\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$

$$\begin{aligned}\varphi(1)&=\varphi(1)-\varphi(0)=\int_0^1 \varphi'(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha\\&=\int_0^1 \frac{1}{1+\alpha^2}\left[\frac{\pi}{4}\alpha+\frac{\ln 2}{2}-\ln(1+\alpha)\right]\mathrm{d}\alpha\\&=\left[\frac{\pi}{8}\ln(1+\alpha^2)+\frac{\ln 2}{2}\arctan\alpha\right]_0^1-\varphi(1)\\&=\frac{\pi}{4}\ln 2-\varphi(1)\end{aligned}$$

所以

$$I=\varphi(1)=\frac{\pi}{8}\ln 2.$$

作业

习题

- 习题 19.1: 1-6

研究函数 $F(y)=\int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x$ 的连续性, 其中 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且 >0.

研究函数 $F(y)=\int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x$ 的连续性, 其中 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且 >0.

- 因 $[0,1]$ 是闭集, $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 可取到最小值, 故 $m=\min_{x\in[0,1]} f(x)>0$.
- 当 $y>0$ 时, $F(y)\geqslant m\int_0^1 \frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x = m\cdot\arctan\frac{1}{y}$.

  当 $y<0$ 时, $F(y)\leqslant m\int_0^1 \frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x = m\cdot\arctan\frac{1}{y}$.
- 因此, $\lim_{y\to0^+} F(y)\geqslant \frac{m\pi}{2}>0, \quad \lim_{y\to0^-} F(y)\leqslant -\frac{m\pi}{2}<0$.
- 所以 $F(y)$ 在 $y=0$ 处不连续. 若 $0\notin[a,b]$, $\frac{yf(x)}{x^2+y^2}$ 在 $[0,1]\times[a,b]$ 上连续, 所以当 $y\neq0$ 时, $F(y)$ 连续.

设函数 $f(x)$ 在 $[a, A]$ 上连续, 证明

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^x \big[f(t+h)-f(t)\big]\,\mathrm{d}t = f(x)-f(a), \qquad (a<x<A).$$

设函数 $f(x)$ 在 $[a,A]$ 上连续，证明

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^x \big[f(t+h)-f(t)\big]\,\mathrm{d}t = f(x)-f(a), \qquad (a<x<A).$$

$$\begin{aligned}
\int_a^x \big[f(x+h)-f(t)\big]\,\mathrm{d}t &= \int_{a+h}^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \left(\int_{a+h}^{x+h} - \int_a^{a+h} - \int_{a+h}^{x}\right) f(t)\,\mathrm{d}t = \left(\int_x^{x+h} - \int_a^{a+h}\right) f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= f(\xi_1)\cdot h - f(\xi_2)\cdot h \qquad\qquad (\xi_1\in[x,x+h],\ \xi_2\in[a,a+h])
\end{aligned}$$

当 $h\to 0$ 时，$\xi_1\to x$，$\xi_2\to a$，所以

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^x \big[f(t+h)-f(t)\big]\,\mathrm{d}t = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\big[f(\xi_1)h - f(\xi_2)h\big] = f(x)-f(a)$$

设 $F(x,y)=\int_{\frac{x}{y}}^{xy}(x-yz)f(z)\mathrm{d}z$, 其中 $f(x)$ 可微, 求 F_{xy}.

设 $F(x,y)=\int_{\frac{x}{y}}^{xy}(x-yz)f(z)\,\mathrm{d}z$, 其中 $f(x)$ 可微, 求 F_{xy}.

$$\begin{aligned}
F_x(x,y)&=\int_{\frac{x}{y}}^{xy}f(z)\,\mathrm{d}z+(x-y\cdot xy)f(xy)y-\left(x-y\cdot\frac{x}{y}\right)f\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{y}\\
&=\int_{\frac{x}{y}}^{xy}f(z)\,\mathrm{d}z+xy(1-y^2)f(xy).\\
F_{xy}(x,y)&=\int_{\frac{x}{y}}^{xy}0\,\mathrm{d}z+f(xy)\cdot x-f\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\\
&\quad+x(1-y^2)f(xy)+xy(-2y)f(x,y)+xy(1-y^2)f'(xy)\cdot x\\
&=(2x-3y^2)f(xy)+\frac{x}{y^2}f\left(\frac{x}{y}\right)+x^2y(1-y^2)f'(xy).
\end{aligned}$$