数学：现实与真理

庄志达

新加坡国立大学

北京师范大学

2017年5月19日

从一个简单问题谈起

- 如要主办一个会议，需要几个人参加才能确定其中至少两位彼此陌生，或彼此相识？

从一个简单问题谈起

- 如要主办一个会议，需要几个人参加才能确定其中至少两位彼此陌生，或彼此相识？

- 答案：2

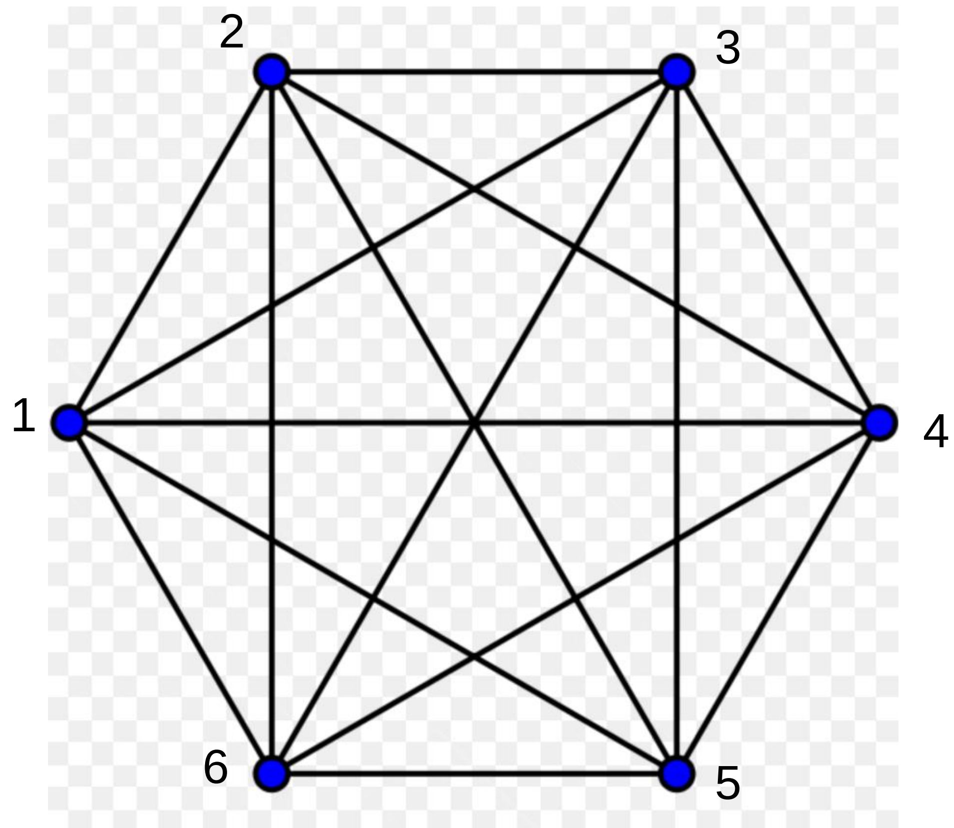
从一个简单问题谈起

- 如要确定至少三位是彼此陌生或彼此相识，需要几个参会者？

从一个简单问题谈起

- 如要确定至少三位是彼此陌生或彼此相识，需要几个参会者？
- 答案：6位 [$R(3) = 6$]

$R(3) = 6$



$R(4) = \ldots$

- 现在要求至少四位是彼此陌生或彼此相识？

$R(4) = \ldots$

- 现在要求至少四位是彼此陌生或彼此相识？
- 如有16人参加会议，在6.4×10^{22} 组合里，只有两个不存在四位参会者满足需求。

$R(4) = \ldots$

- 现在要求至少四位是彼此陌生或彼此相识？
- 如有16人参加会议，在6.4×10^{22} 组合里，只有两个不存在四位参会者满足需求。
- 如有17人参加会议，在2.46×10^{26} 组合里，只有一个不能满足需求。

$R(4) = \ldots$

- 现在要求至少四位是彼此陌生或彼此相识？
- 如有16人参加会议，在6.4×10^{22} 组合里，只有两个不存在四位参会者满足需求。
- 如有17人参加会议，在2.46×10^{26} 组合里，只有一个不能满足需求。

- 答案：18

$R(5) = ?$

- 这是一个至今还未解决的问题。

$R(5) = ?$

- 这是一个至今还未解决的问题。
- 只知$43 \leq R(5) \leq 48$ [2017年的结果]

有穷 Ramsey 定理

令k为任意自然数。存在某最小的自然数$R(k)$满足以下条件：

如在有$R(k)$个顶点的完全图上每一边涂红或蓝色，里面必有个全红或全蓝的k个顶点完全图。

F P Ramsey (1903--1930)

有穷 Ramsey 定理

- 令k为任意自然数。存在某最小的自然数$R(k)$满足以下条件:

有穷 Ramsey 定理

- 令k为任意自然数。存在某最小的自然数$R(k)$满足以下条件：

如将$\{0,1,\ldots,R(k)\}$里的每一对自然数$\{m,n\}$涂红或蓝色则必有个子集 Y，里面每一对自然数都涂红或都涂蓝色，而且$|Y| \geq k$。

有穷 Ramsey 定理

- 令k为任意自然数。存在某最小的自然数$R(k)$满足以下条件:

  如将$\{0,1,\ldots,R(k)\}$里的每一对自然数$\{m,n\}$涂红或蓝色则必有个子集 Y，里面每一对自然数都涂红或都涂蓝色，而且$|Y| \geq k$。

- 用最粗浅的方法计算$R(k)$，需经过大约$O(2^{k^2})$步。这超越了现今计算机的能力。

有穷 Ramsey 定理

- 我们可以把红或蓝改为有穷多个颜色，并把“一对”自然数改为任意 i 个自然数子集，结论是一样的。

有穷 Ramsey 定理

- 我们可以把红或蓝改为有穷多个颜色，并把“一对”自然数改为任意 i 个自然数子集，结论是一样的。
- 这定理给我们带来什么启示？

有穷 Ramsey 定理

- 我们可以把红或蓝改为有穷多个颜色，并把“一对”自然数改为任意 i 个自然数子集，结论是一样的。
- 这定理给我们带来什么启示？
- 即使在随机世界里运作，也必须遵行某个规律。

哥德尔不完全定理

- Kurt Gödel (1906—1976):

  *Peano*算术公理系统是不完全的。如果它是一致的，它的一致性不能通过PA本身来证明。

有穷 Ramsey* 定理

- 令i, j, k为三个任意自然数。存在某个最小自然数, 命为$R(i, j, k)$ 满足以下条件：

有穷 Ramsey* 定理

- 令i, j, k为三个任意自然数。存在某个最小自然数, 命为$R(i, j, k)$ 满足以下条件：

- 若将$\{0,1,2, R(i, j, k)\}$里面每i个元素子集涂一个颜色（有j种可选)，就必存在一个至少有k个元素的子集Y，里面每i个元素子集都涂同一色，并且$|Y| \geq \min Y$。

Paris-Harrington 定理

- *Peano*算术公理系统能证明:

Paris-Harrington 定理

- *Peano*算术公理系统能证明:

  假如*Ramsey**定理成立，我们就能推出*Peano*算术公理系统是一致的。

Paris-Harrington 定理

- *Peano*算术公理系统能证明：

  假如*Ramsey**定理成立，我们就能推出*Peano*算术公理系统是一致的。

- 因此，这系统不能证明*Ramsey**定理。

无穷 Ramsey 定理

- 令i, j为两个任意自然数。

  若将$\{0,1,\ldots\}$里面每i个元素子集涂一个颜色（有j种可选），就必存在一无穷子集Y，里面每i个元素子集都涂同一色。

无穷 Ramsey 定理

- 令i, j为两个任意自然数。

  若将$\{0,1,...\}$里面每i个元素子集涂一个颜色（有j种可选），就必存在一无穷子集Y，里面每i个元素子集都涂同一色。

- 无穷*Ramsey*定理能推出有穷*Ramsey**定理。

无穷 Ramsey 定理

- 寻找子集Y满足涂色条件，并不容易。

无穷 Ramsey 定理

- 寻找子集Y满足涂色条件，并不容易。
  - 当$i = 2$时，有个涂色法不能通过用电脑程序甚至借停机问题的帮忙来计算Y。

无穷 Ramsey 定理

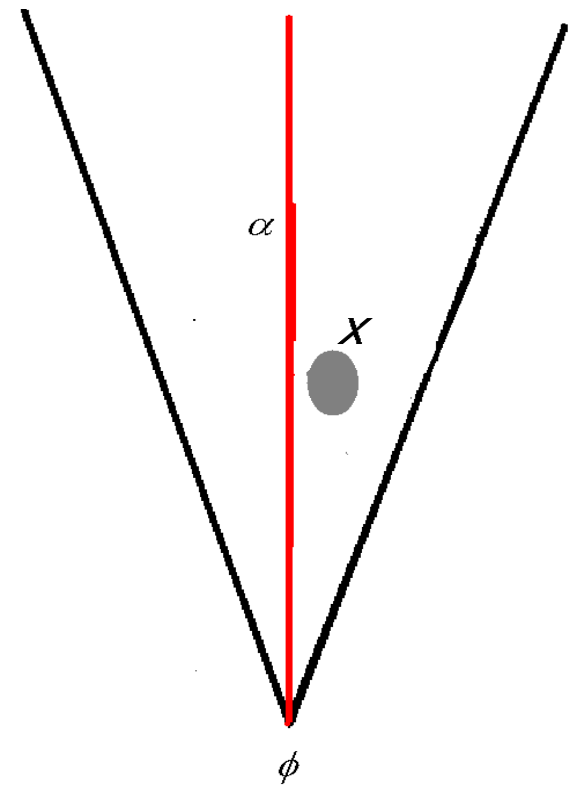
- 寻找子集Y满足涂色条件，并不容易。
  - 当$i = 2$时，有个涂色法不能通过用电脑程序甚至借停机问题的帮忙来计算Y。
  - 当$i \geq 3$时，有涂色法令每个Y都能计算停机问题甚至更复杂的集合。

无穷 Ramsey 定理

- 寻找子集Y满足涂色条件，并不容易。
  - 当$i = 2$时，有个涂色法不能通过用电脑程序甚至借停机问题的帮忙来计算Y。
  - 当$i \geq 3$时，有涂色法令每个Y都能计算停机问题甚至更复杂的集合。
- 因此从计算理论来看，无穷*Ramsey*定理是一个非常强的组合学定理。

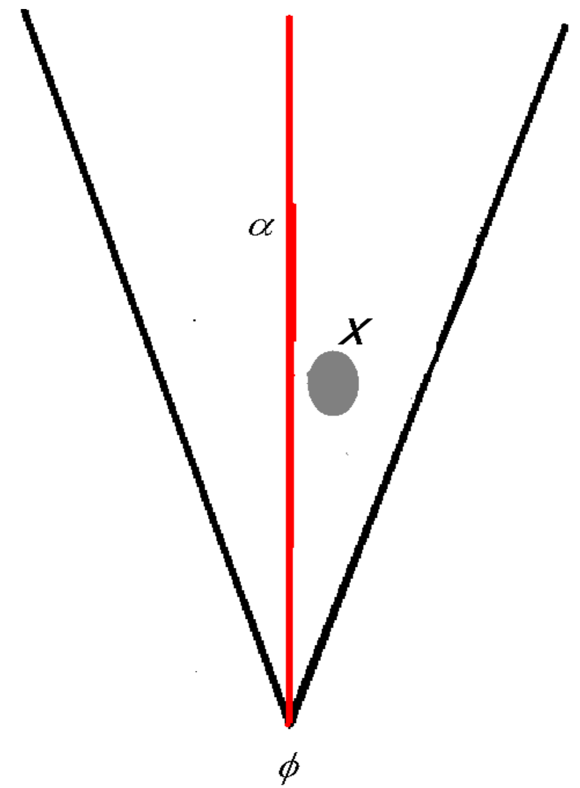
Ramsey 定理与集合宇宙 V

- 存在一个V是集合论公理系统里的基本宇宙。



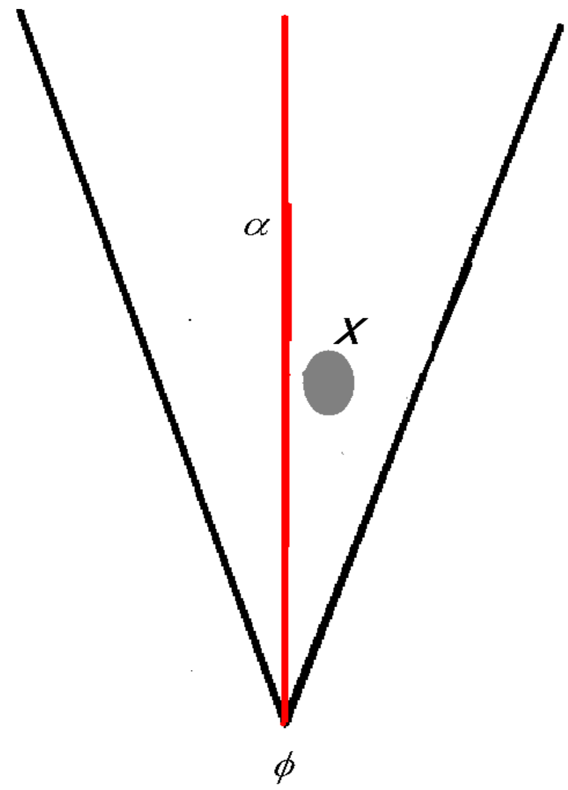
Ramsey 定理与集合宇宙 V

- 存在一个V是集合论公理系统里的基本宇宙。
- 一般数学都在V里“存在”。



Ramsey 定理与集合宇宙 V

- 存在一个V是集合论公理系统里的基本宇宙。
- 一般数学都在V里“存在”。
- 我们可以在V里引进*Ramsey*基数的概念。



Ramsey 基数与集合宇宙 V

- *Ramsey*基数是个不可数的无穷基数。它满足类似在自然数上的涂色条件。

Ramsey 基数与集合宇宙 V

- *Ramsey*基数是个不可数的无穷基数。它满足类似在自然数上的涂色条件。
- 已知：假如 *Zermelo-Fraenkel* 是一致的，它就不能肯定 *Ramsey* 基数的存在。

Ramsey 基数与集合宇宙 V

- *Ramsey*基数是个不可数的无穷基数。它满足类似在自然数上的涂色条件。
- 已知：假如 *Zermelo-Fraenkel* 是一致的，它就不能肯定 *Ramsey* 基数的存在。
- 这类基数存在吗？

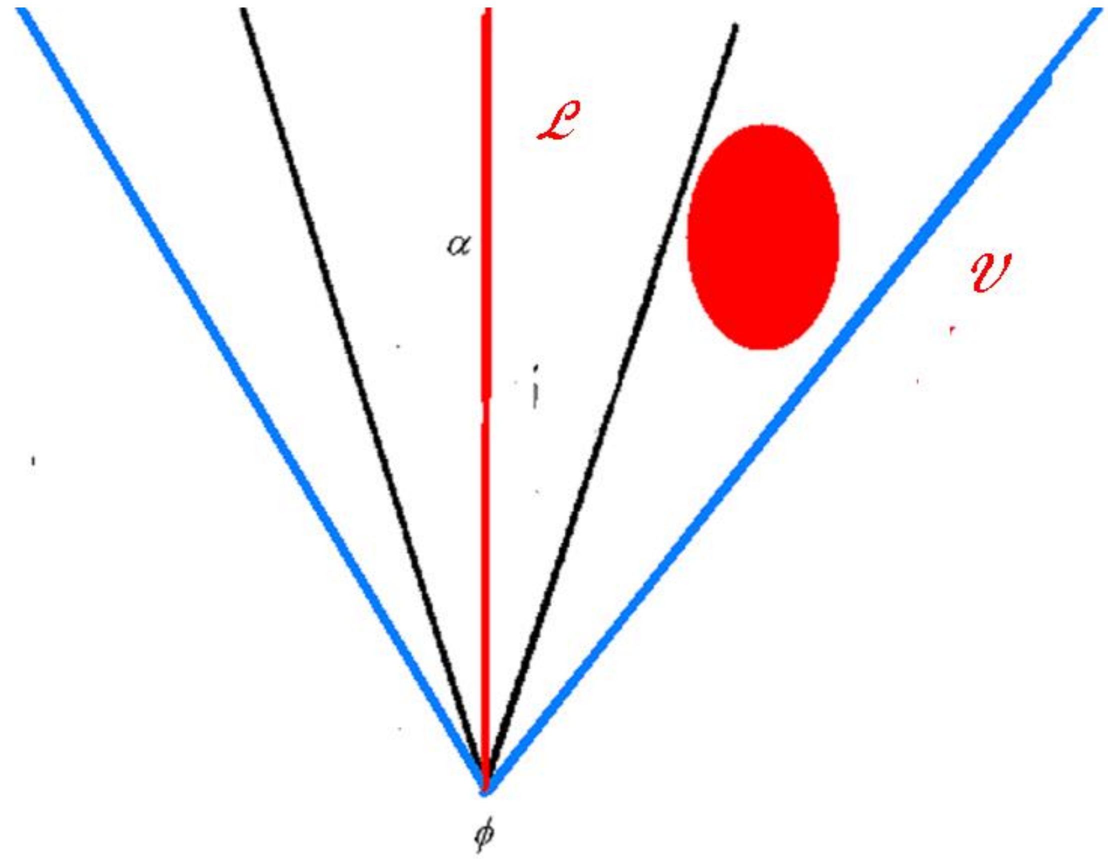
Ramsey 定理与集合宇宙 V

- *Ramsey*基数是集合论里人称为“大基数”的一个例子。

Ramsey 定理与集合宇宙 V

- *Ramsey*基数是集合论里人称为“大基数”的一个例子。
- 这类大基数如存在，对我们所关心的宇宙V的结构有巨大的影响(例如它将绝对大于L，哥德尔的可构造宇宙)。

$\mathcal{V}$ and $\mathcal{L}$



结论:两个问题

- 什么是数学现实？例如$R\left(10^{23}\right)=$？

结论：两个问题

- 什么是数学现实？例如$R\left(10^{23}\right)=$？

- “数学真理”如何定义？

Ramsey 定理带来什么信息？

- 同一个问题可以从不同角度来看，和从不同层次来分析。但结论大致上很相似。

Ramsey 定理带来什么信息？

- 同一个问题可以从不同角度来看，和从不同层次来分析。但结论大致上很相似。

- 人类能力在计算和理解真理两方面都有一定局限，而且似乎是解不脱的。

David Hilbert (1900)

- Wir müssen wissen
- Wir werden wissen